

# **ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

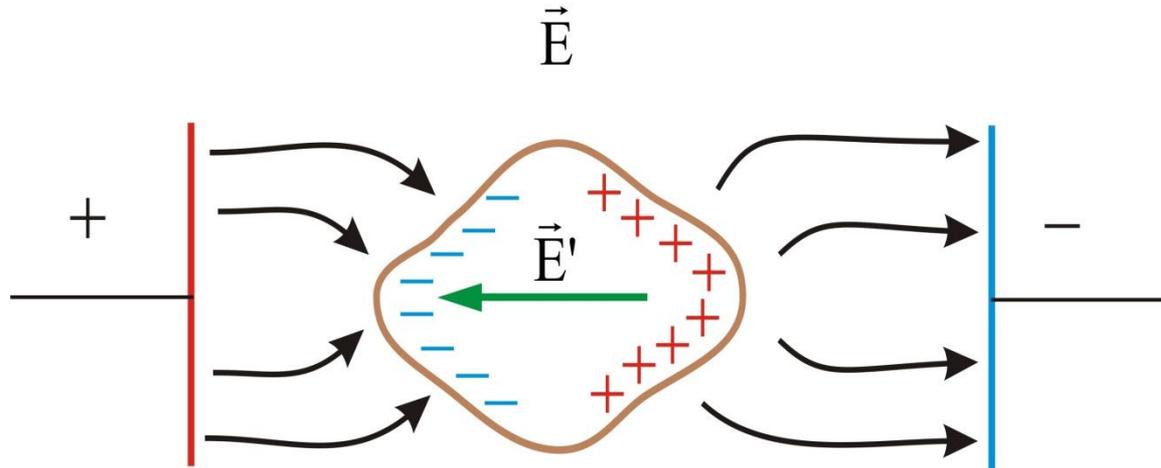
# Напряженность и потенциал электростатического поля в проводнике

В проводниках имеются электрически заряженные частицы – носители заряда (электроны в металлах, ионы в электролитах) способные перемещаться по всему объему проводника под действием внешнего электростатического поля.

*Носителями заряда в металлах являются электроны проводимости.* Они возникают при конденсации паров металла за счет обобществления валентных электронов.

*При отсутствии электрического поля металлический проводник является электрически нейтральным* – электростатическое поле создаваемое положительными и отрицательными зарядами внутри него компенсируется.

- При внесении металлического проводника во внешнее электростатическое поле, **электроны проводимости перемещаются (перераспределяются): положительные – по полю, отрицательные – против поля**. до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов проводимости и положительных ионов не скомпенсирует внешнее поле.



На одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, на другом — избыток отрицательного. **Эти заряды называются индуцированными.**

В установившемся состоянии в проводнике, помещенном в электростатическое поле мы имеем:

Появление у заряженной поверхности на металле заряда противоположного знака – **электростатическая индукция**.

Этот процесс очень краток  $\sim 10^{-8}$  секунд.

• **Электростатическое экранирование** – внутри проводника поле не проникает.

• Во всех точках внутри проводника  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , а во всех точках на поверхности  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n$  ( $\mathbf{E}_\tau = \mathbf{0}$ );

Весь объем проводника, находящегося в электростатическом поле **эквипотенциален**.

• **Диэлектрическая проницаемость**  $\epsilon_{\text{ме}} \rightarrow \infty$ .

• **На поверхности проводника напряженность направлена по нормали к этой поверхности**, иначе, под действием составляющей  $E_\tau$ , касательной к поверхности, заряды перемещались бы по проводнику, а это противоречило бы их статическому распределению.

- Действительно, в любой точке внутри проводника, следовательно,  $\varphi = const.$   

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E = 0$$
- Поверхность проводника тоже эквипотенциальна:

(для любой линии на поверхности)

- Потенциал поверхности равен потенциалу объема проводника.
- В заряженном проводнике *некомпенсированные* заряды, располагаются только на поверхности (их расталкивают кулоновские силы).

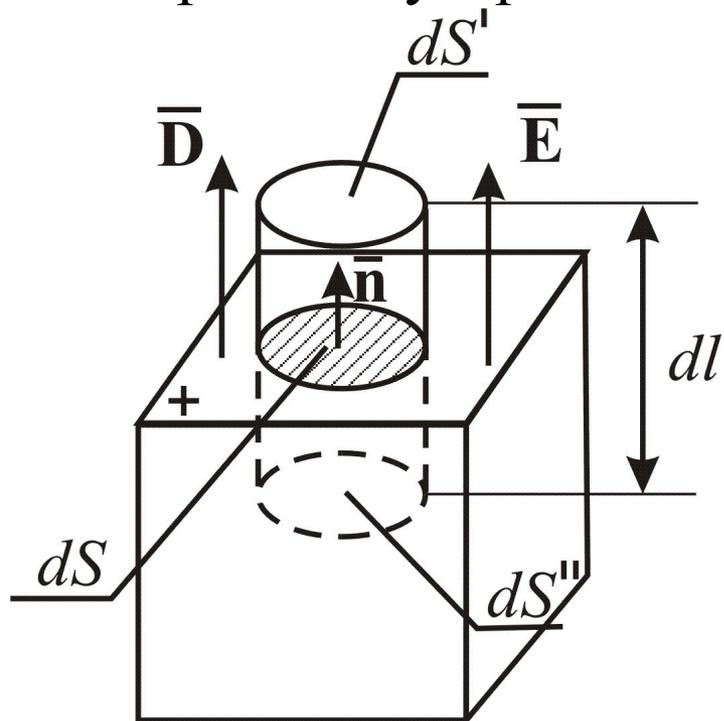
Доказательство:

Согласно теореме Остроградского – Гаусса суммарный заряд  $q$  внутри объема проводника равен нулю, так как  $E=0$

$$q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{E} \cdot \epsilon_0 d\mathbf{S} = 0,$$

# Определение напряженности электростатического поля вблизи проводника

Выделим на поверхности  $S$  проводника площадку  $dS$  и построим на ней цилиндр с образующими, перпендикулярными к площадке  $dS$ , высотой  $dl$ .



$$dS' = dS'' = dS$$

На поверхности проводника вектор напряженности поля  $\vec{E}$  и вектор электрического смещения  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$  перпендикулярны поверхности. Поэтому поток  $\vec{D}$  сквозь боковую поверхность цилиндра равен нулю.

Поток вектора электрического смещения  $\Phi_D$  через  $dS''$  тоже равен нулю, так как  $dS''$  лежит внутри проводника, где следовательно  $\mathbf{D} = 0$  и,  $\mathbf{E} = 0$

- Отсюда следует, что **поток  $d\Phi_D$  сквозь замкнутую поверхность равен потоку  $\mathbf{D}$  через  $dS'$ :**

$$d\Phi_D = D_n dS$$

С другой стороны **по теореме Остроградского-Гаусса:**

$$d\Phi_D = dq = \sigma dS$$

где:  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов на  $dS$ . Из равенства правых частей следует, что  $D_n = \sigma$  тогда

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (5.2.3)$$

**Напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности зарядов.**

- В состоянии равновесия **внутри проводника заряды отсутствуют**, и создание внутри него полости не повлияет на конфигурацию расположения зарядов и тем самым на электростатическое поле.
- Если проводник с полостью заземлить, то потенциал во всех точках полости будет нулевым, т. е. полость полностью изолирована от влияния внешних электростатических полей.
- На этом основана **электростатическая защита** — экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Вместо сплошного проводника для защиты может быть использована густая металлическая сетка.
- Свойство зарядов располагаться на внешней поверхности проводника используется для устройства **электростатических генераторов**, предназначенных для накопления больших зарядов и достижения разности потенциалов в несколько миллионов вольт.

# Конденсаторы

## Электрическая емкость.

При сообщении проводнику заряда, на его поверхности появляется потенциал  $\varphi$ . Но если этот же заряд сообщить другому проводнику, то потенциал будет другой. Это зависит от геометрических параметров проводника. Но в любом случае, потенциал  $\varphi$  пропорционален заряду  $q$ .

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$q = C \varphi$$

- К пропорциональности называют **электроемкостью** – физическая величина, численно равна заряду, который необходимо сообщить проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу.

$$[C] = \frac{1 \text{ Кулон}}{1 \text{ Вольт}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = 1 \text{ Фарад} = 1 \text{ Ф}$$

Один фарад – это емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на один вольт при сообщении ему заряда в один кулон.

Найдем емкость уединенного проводящего шара (сферы):

Имеем: 
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad \text{при } r \geq R$$

$$\varphi = \int_{\infty}^R E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} \quad C = \frac{q}{\varphi} \quad \text{Тогда:}$$

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R} \quad \text{- емкость проводящего шара (сферы).}$$

Емкость уединенного проводника зависит от его геометрических размеров, формы и диэлектрических свойств окружающей среды и не зависит от величины заряда проводника.

Система проводников, емкость которой не зависит от расположения окружающих тел, называется конденсатором, а сами проводники – обкладками конденсатора.

## Конденсаторы

Конденсатор служит для накопления заряда, он состоит из двух обкладок, разделенных диэлектриком. Конденсаторы разделяют на плоские, цилиндрические и сферические.

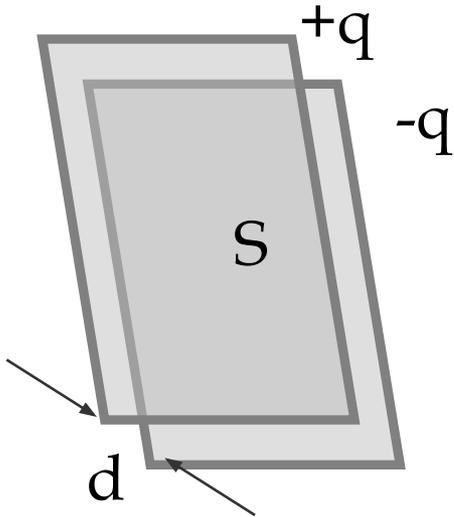
Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и кончаются на другой, поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются равными по модулю разноименными зарядами.

Под **емкостью конденсатора** понимается физическая величина, равная отношению заряда  $q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

# Плоский конденсатор

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных пластин, площадью  $S$  каждая и находящихся на расстоянии  $d$ .



Напряженность внутри конденсатора:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \quad \text{При } (0 \leq x \leq d)$$

С другой стороны:  $E = -\frac{d\varphi}{dx}$  Тогда:

$$-\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \quad \text{Либо:} \quad d\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} dx$$

Проинтегрируем левую и правую часть последнего выражения:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} x \Big|_0^d = -\frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0} = \left\{ \sigma = \frac{q}{S} \right\} = -\frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}$$

Из предыдущего слайда (путем замены знаков) имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Тогда:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

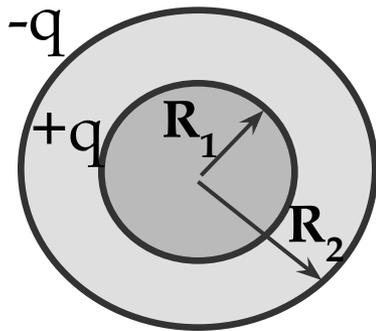
$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

- емкость плоского конденсатора.

## Сферический конденсатор

Сферический конденсатор состоит из двух концентрических металлических сфер, радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ).

**Сфера создает электростатическое поле только вне этой сферы.** При  $R > R_2$  поля взаимно уничтожаются, а поле внутри создается только зарядом  $+q$  внутренней обкладки.



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -E_r = \{ \text{так как } E = -\text{grad } \varphi \} = -\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$d\varphi = -\frac{q \cdot dr}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

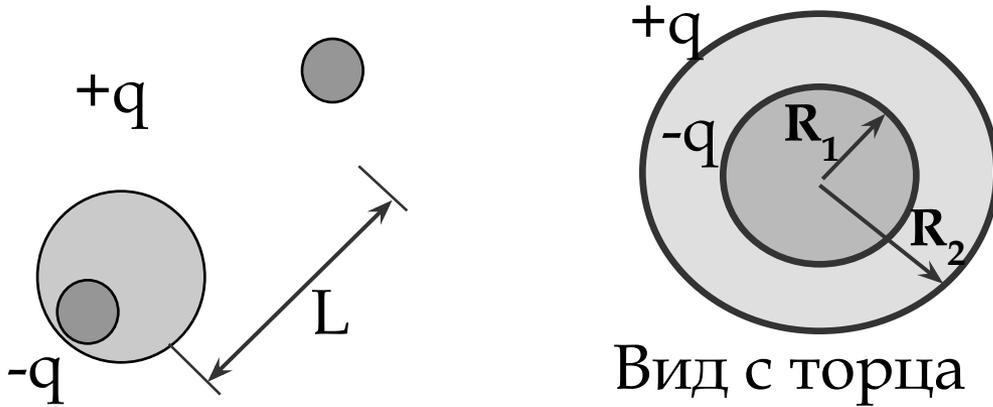
Интегрируем:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = +\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$
$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Емкость сферического конденсатора

# Цилиндрический конденсатор



$R_2 - R_1 = d$  – толщина прослойки диэлектрика.

$$L \gg d, \quad R_1 < r < R_2$$

$r$  – текущий радиус

По т. Гауса-Остроградского:

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad S = 2\pi r \cdot L$$

$$\oint_S E \cdot dS = E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi r L \epsilon_0}$$

$$d\varphi = -E \cdot dr \quad \text{Интегрируем:} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = - \int E \cdot dr =$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int E \cdot dr = - \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = - \frac{q}{2\pi L \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi L \varepsilon \varepsilon_0}{\ln \left[ \frac{R_2}{R_1} \right]}$$

$$C = \frac{2\pi L \varepsilon \varepsilon_0}{\ln \left[ \frac{R_2}{R_1} \right]}$$

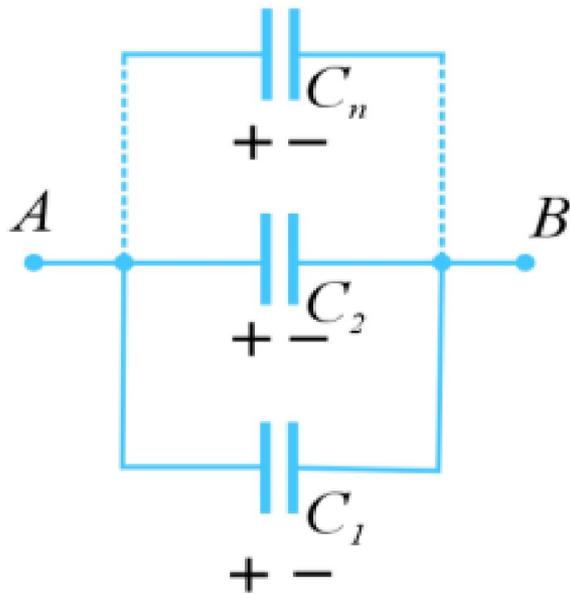
Емкость цилиндрического конденсатора.

Конденсатор (общая формула)	$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dx$	$C = \frac{q}{(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Плоский конденсатор	$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{(\varepsilon_0 \varepsilon)}$	$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$
Цилиндрический конденсатор	$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$	$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$
Сферический конденсатор	$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$	$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

# Последовательное и параллельное соединение конденсаторов

## Параллельное соединение:

Для получения большей емкости конденсаторы соединяют параллельно.



Все конденсаторы батареи заряжаются до одной и той же разности потенциалов  $\Delta\phi$

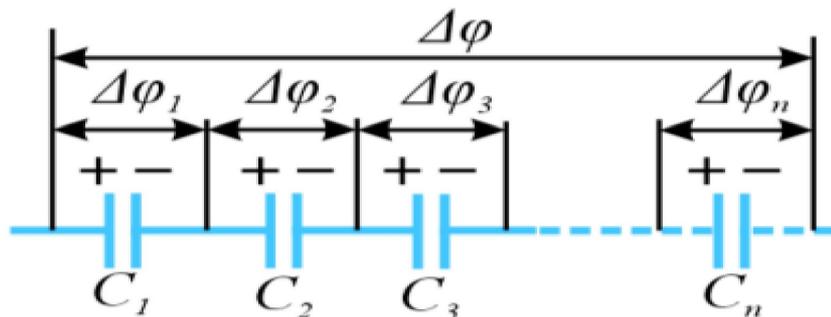
Тогда:  $q_i = C_i \cdot \Delta\phi$

$$q_{\text{ОБЩ.}} = \underline{\underline{C_{\text{ОБЩ.}} \cdot \Delta\phi}} = \sum_i q_i = \underline{\underline{\sum_i C_i \Delta\phi}} =$$

Сокращая на  $\Delta\phi$  получаем:  $C_{\text{ОБЩ.}} = \sum_i C_i$  Т.е.

Для нашей схемы:  $C_{\text{ОБЩ.}} = C_1 + C_2 + C_3$

## Последовательное соединение:



$$\Delta\varphi_{\text{ОБЩ.}} = \sum_i \Delta\varphi_i = \sum_i \frac{q}{C_i} = q \cdot \sum_i \frac{1}{C_i} \quad \text{С другой стороны:}$$

$$\Delta\varphi_{\text{ОБЩ.}} = \frac{q}{C_{\text{ОБЩ.}}} = q \cdot \sum_i \frac{1}{C_i} \quad \text{Сокращаем на заряд } q:$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{ОБЩ.}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

В нашем случае:

$$\frac{1}{C_{\text{ОБЩ.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Емкость такой батареи меньше наименьшей емкости из составляющих батарею конденсаторов.

# Энергия электрического поля

Сообщение проводнику электрического заряда связано с совершением работы по преодолению кулоновских сил отталкивания. Эта работа идет на увеличение энергии заряженного проводника.

$$dA = \varphi \cdot dq = \{dq = C \cdot d\varphi\} = C\varphi \cdot d\varphi$$

Полная работа, необходимая для увеличения потенциала проводника от 0 до  $\varphi$ , равна:

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi \cdot d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}$$

Следовательно, энергия уединенного проводника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}$$

Для заряженного конденсатора :  $dA = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dq = \frac{q \cdot dq}{C}$

$$A = \int_0^q \frac{q \cdot dq}{C} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}$$

Учитывая, что конденсатор - это система из двух проводников, у которых  $q_1 = +q$ ,  $q_2 = -q$ , тогда:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$$

Вычислим энергию плоского конденсатора:

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d$$

$$W = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 \cdot Sd \cdot E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot E \cdot V =$$

$$W = \frac{1}{2} E \cdot D \cdot V$$

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} E \cdot D$$

**Объемная  
плотность  
энергии.**

*Пондермоторные силы – это силы электрического взаимодействия.*

- Разноименные пластины конденсатора будут притягиваться. Силу их притяжения называют **пондермоторной**.
- При незначительном перемещении одной пластины в поле другой совершается работа

$$dA = -dW = Fdx, F = \frac{dW}{dx}$$

Тогда, можно записать, что

$$dW = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 dx}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

- Отсюда можно получить формулу для расчета **пондермоторной силы**

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$$