

# Тригонометрические Функции

$$y = \sin x, y = \cos x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x,$$

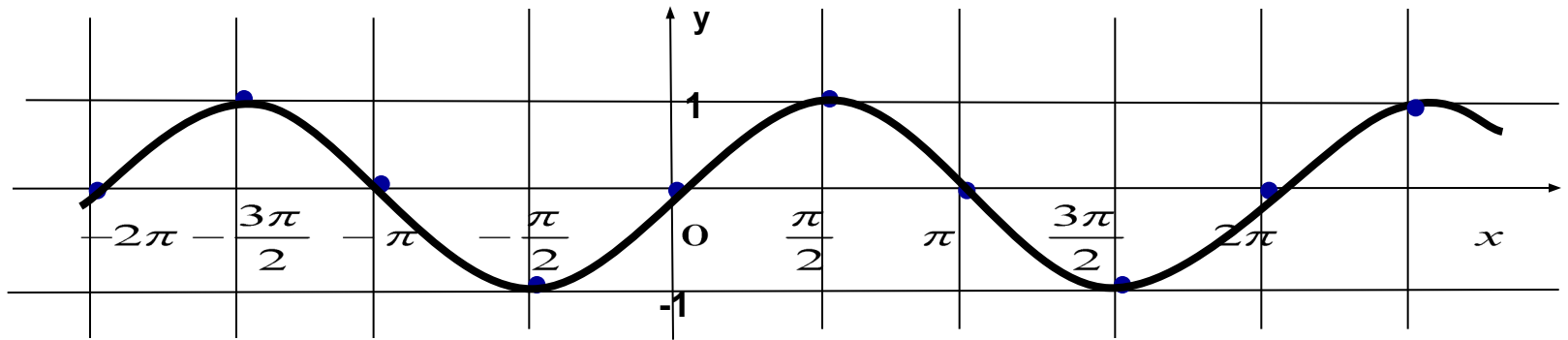
**их свойства и графики**

# Повторение. Схема исследования функции

При исследовании функции находят:

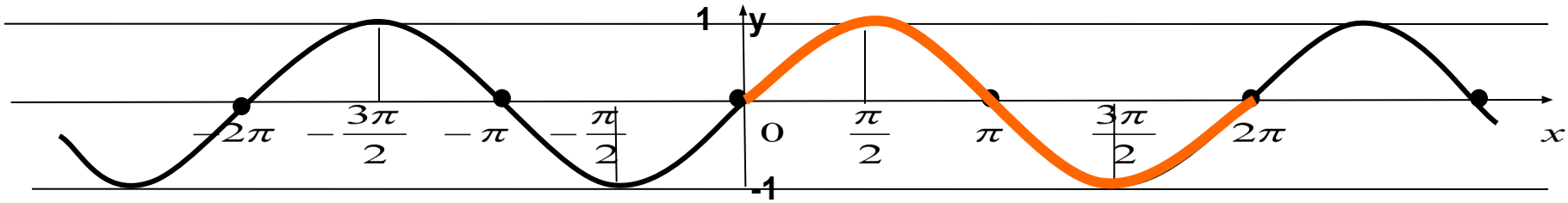
- 1) Область определения  
Область значений
- 2) Четность, периодичность,  
непрерывность
- 3) Нули функции
- 4) Промежутки знакопостоянства
- 5) Промежутки возрастания, убывания
- 6) Экстремумы

# Функция $y = \text{Sin}x$ , ее свойства и график



$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-2\pi$
$y = \text{Sin}x$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$0$

## Свойства синуса



Область определения.....  $x \in (-\infty; +\infty)$

Область значений.....  $y \in [-1; 1]$

Функция нечетная, непрерывная, периодическая ( $T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ )

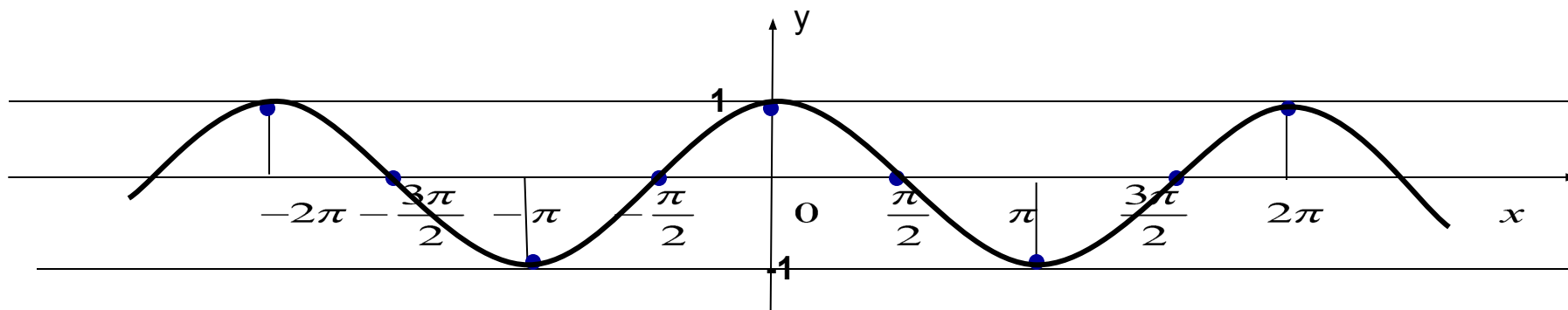
Нули функции в точках  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция положительна при } x \in (\pi n, \pi n + \pi), n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция отрицательна при } x \in (-\pi + \pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

6)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция возрастает при } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция убывает при } x \in \left[\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

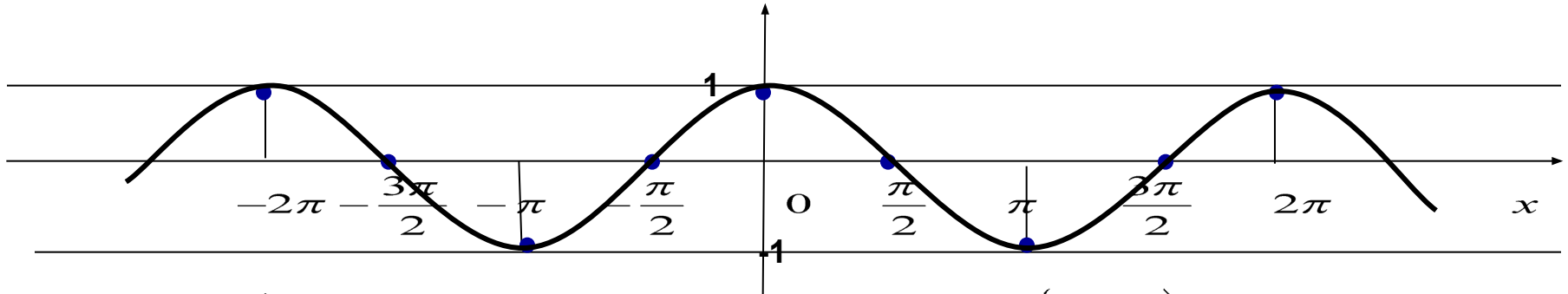
7)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция имеет максимумы, равные 1, при } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \text{б) Функция имеет минимумы, равные -1, при } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

# Функция $y = \cos x$ , ее свойства и график



$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-2\pi$
$y$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

# Свойства косинуса



Область определения .....  $x \in (-\infty; +\infty)$

Область значений .....  $y \in [-1; 1]$

Функция четная, непрерывная, периодическая ( $T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ )

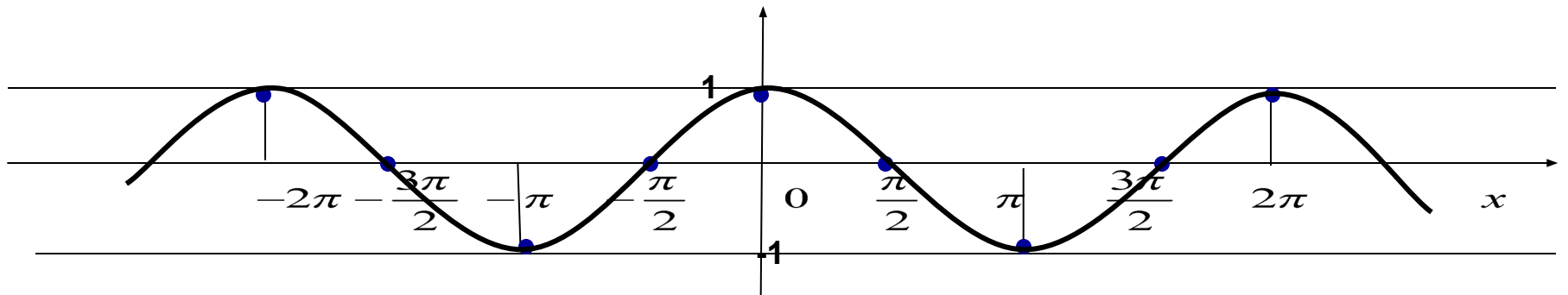
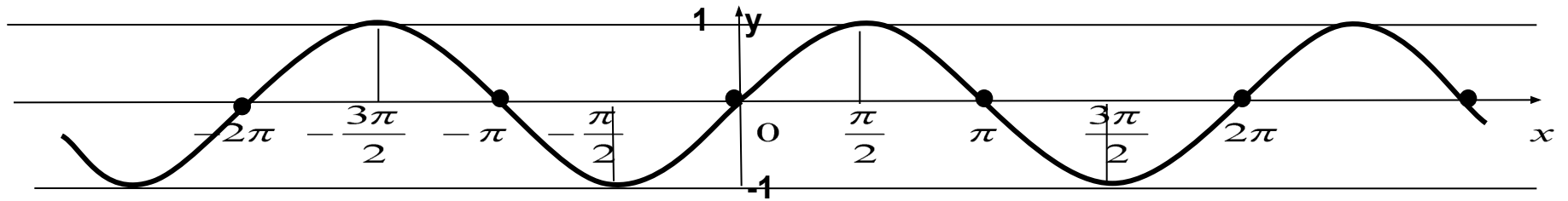
Нули функции в точках  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция положительна при } x \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция отрицательна при } x \in \left( \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

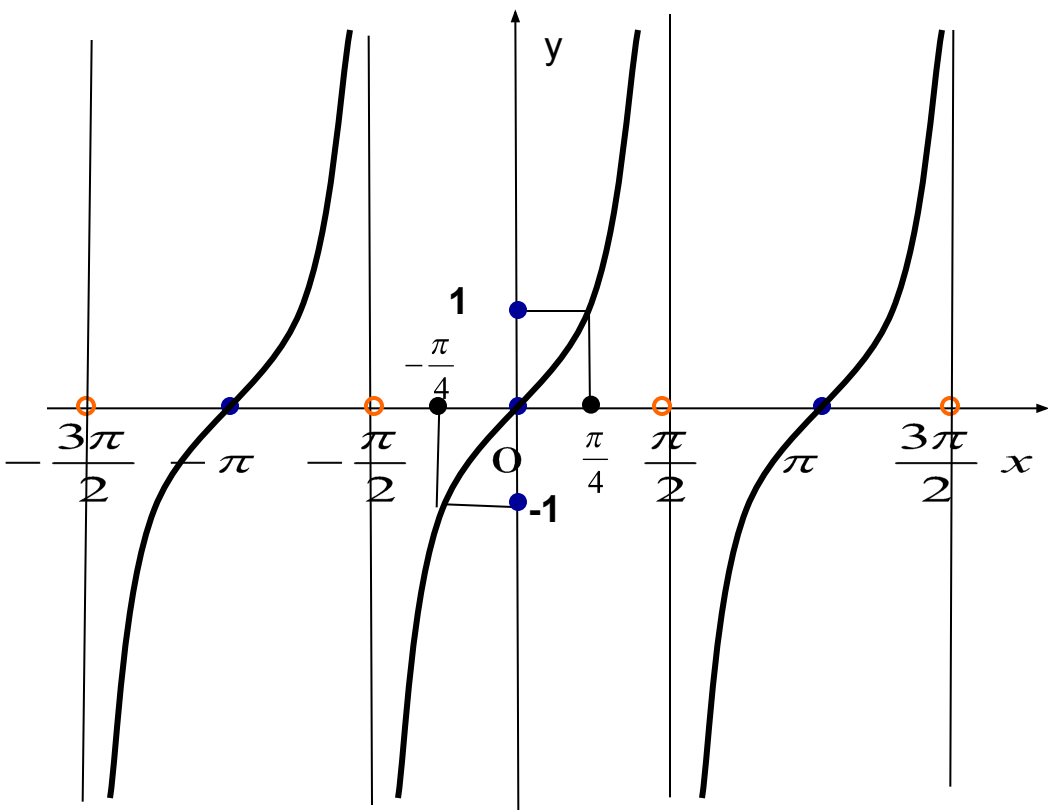
6)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция возрастает при } x \in [-\pi + 2\pi n, \pi n], n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция убывает при } x \in [\pi n, \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

7)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция имеет максимумы, равные 1, при } x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \text{б) Функция имеет минимумы, равные -1, при } x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

# Сравните графики синуса и косинуса



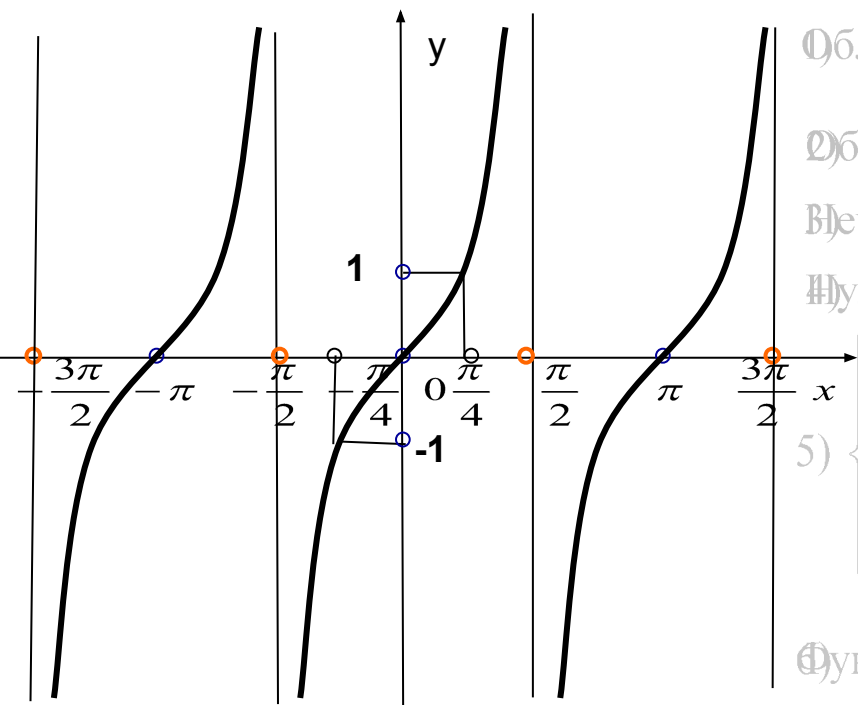
# Функция $y = \operatorname{tg} x$ , ее свойства и график



$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
$y$	0	1	-	0	-1	-	0



# Свойства тангенса



Область определения  $x \in \left( \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z$

Область значений  $y \in (-\infty, +\infty)$

Вчетная, периодическая  $(T = \pi n), n \in Z$

Нули функции в точках  $x = \pi n, n \in Z$

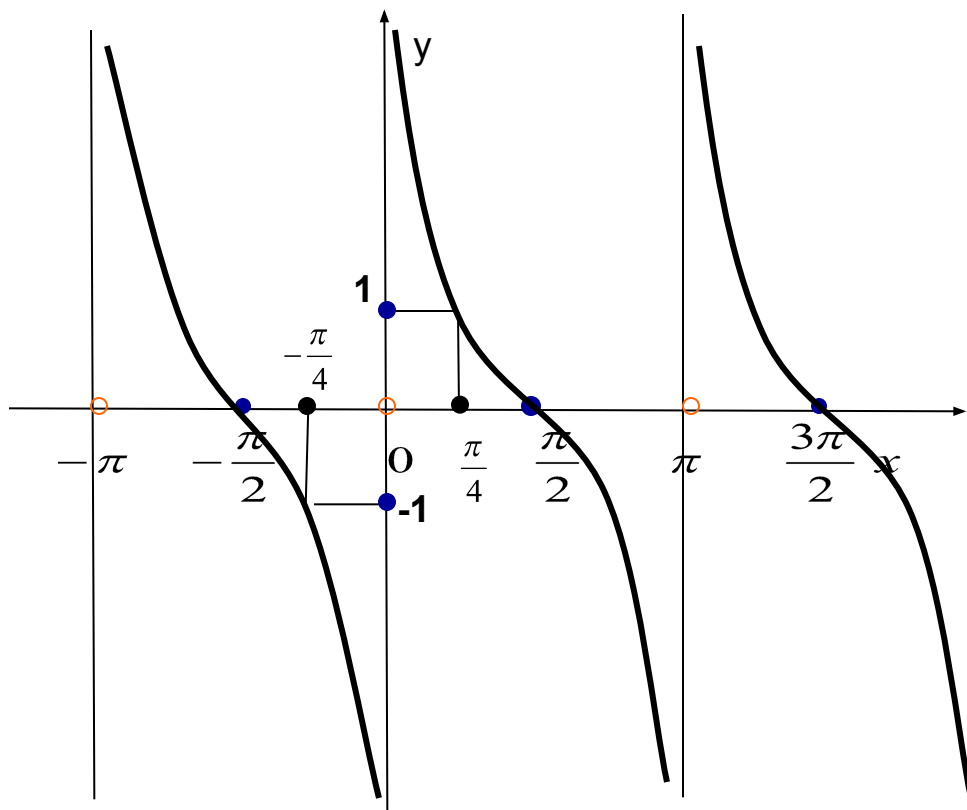
5)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Функция положительна при } x \in \left( \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z \\ \text{Функция отрицательна при } x \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n \right), n \in Z \end{array} \right.$

Функция отрицательна при  $x \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n \right), n \in Z$

Функция возрастает при  $x \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z$

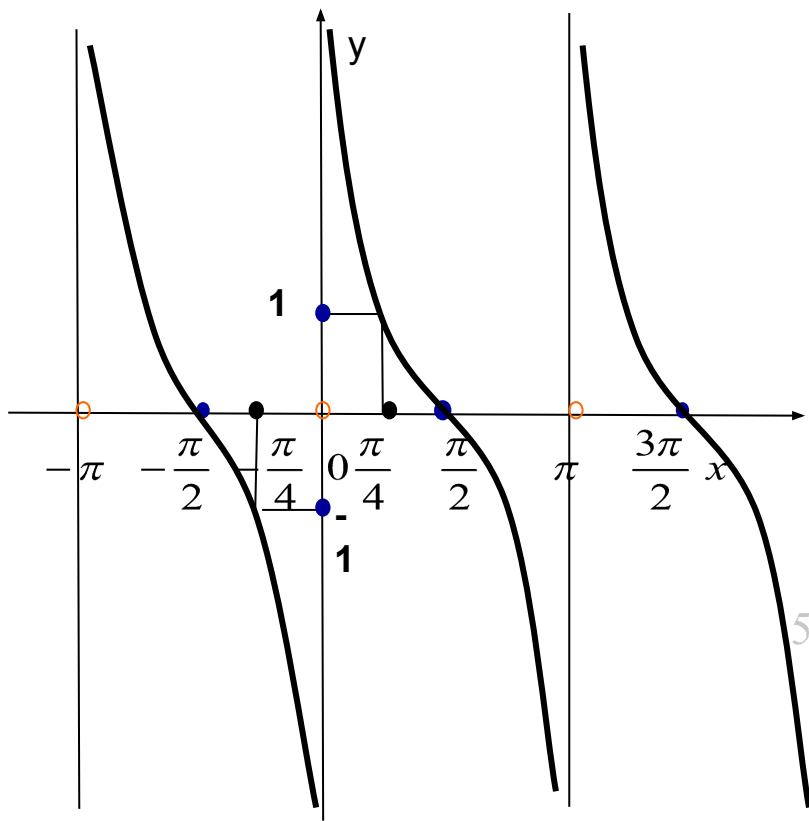
Экстремумов не имеет

# Функция $y = \text{Ctg } x$ , ее свойства и график



$x$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
$y$	$-$	$1$	$0$	$-$	$-1$	$0$	$-$

# Свойства котангенса



Область определения  $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Область значений  $y \in (-\infty; +\infty)$

Вчетная, периодическая  $(T = \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Нули функции в точках  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

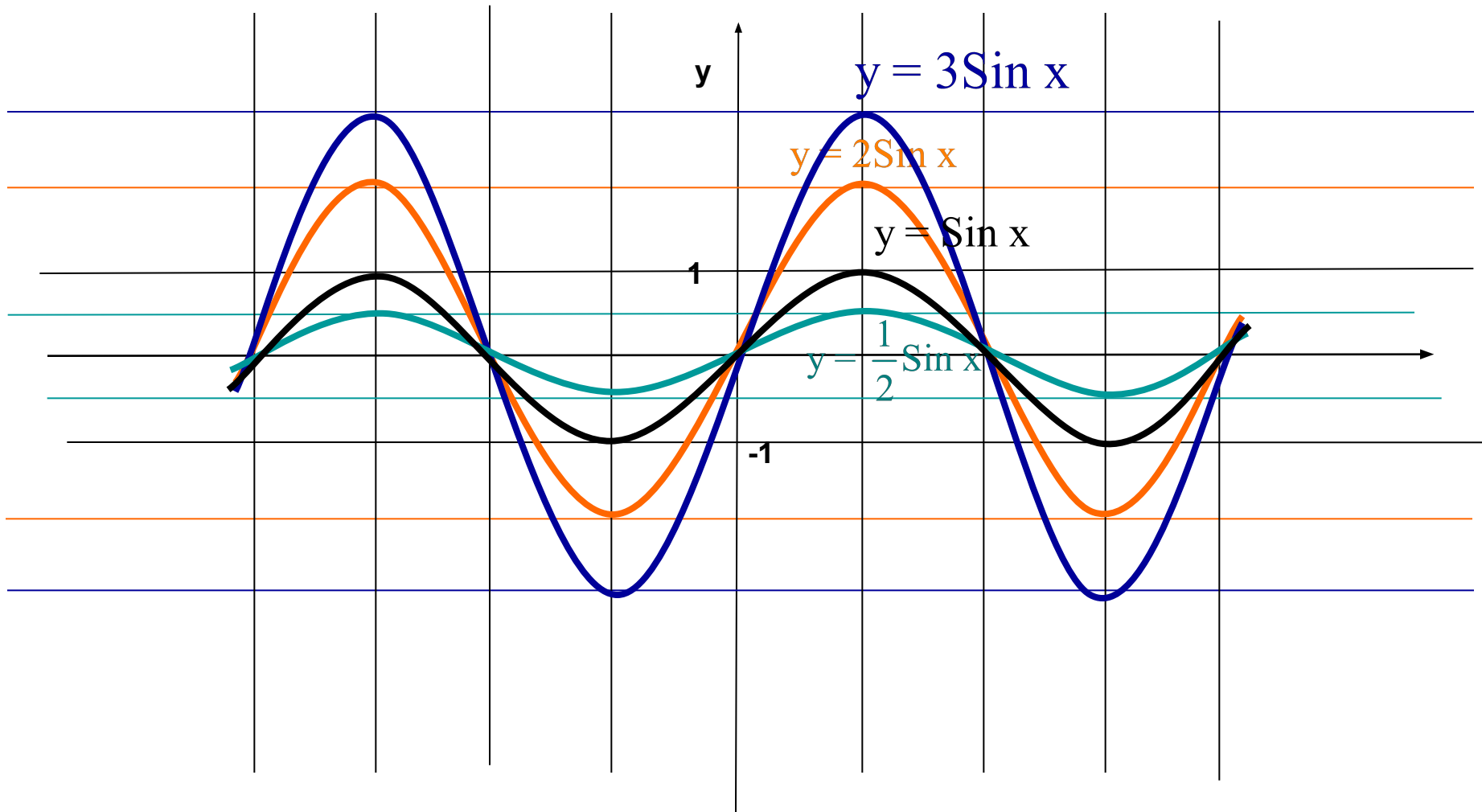
5)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Функция положительна при } x \in \left( \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \\ \text{Функция отрицательна при } x \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Функция убывает при  $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

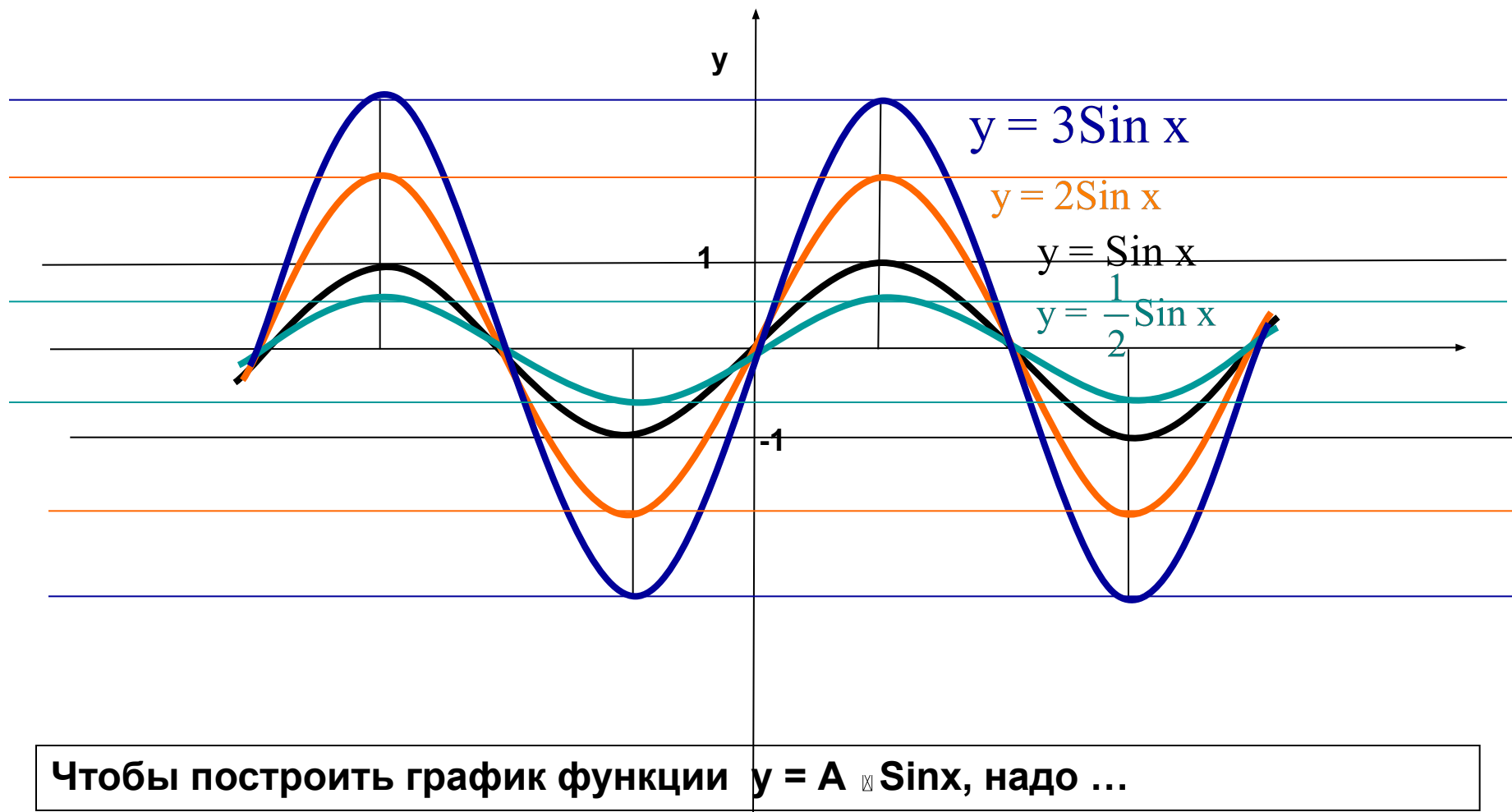
Экстремумов не имеет

# Преобразования графиков тригонометрических функций

# Сжатие и растяжение вдоль оси Oy.

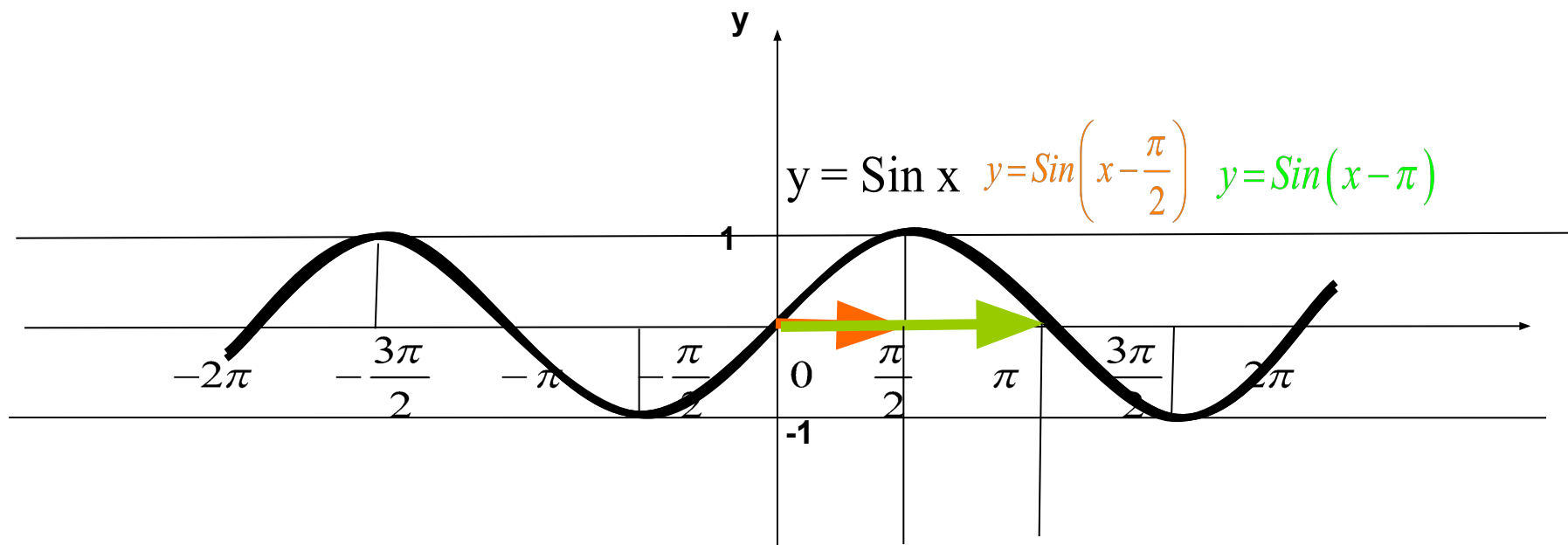


# Вывод

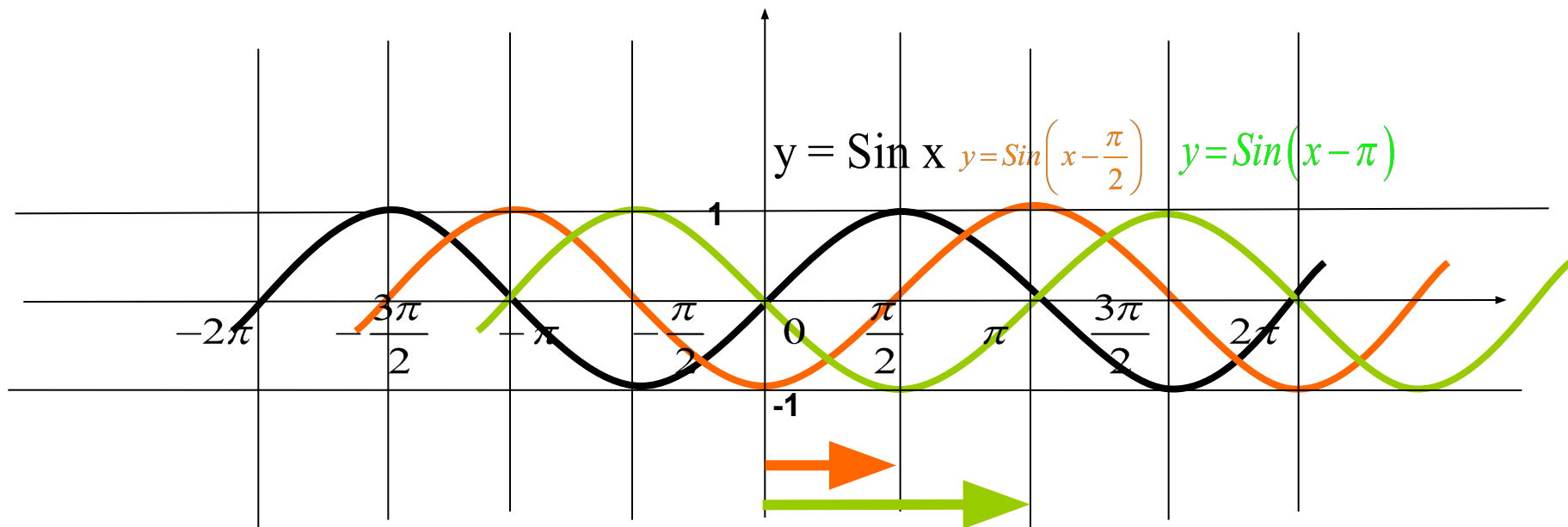


Чтобы построить график функции  $y = A \cdot \text{Sin } x$ , надо ...

# Сдвиг вдоль оси Ох.



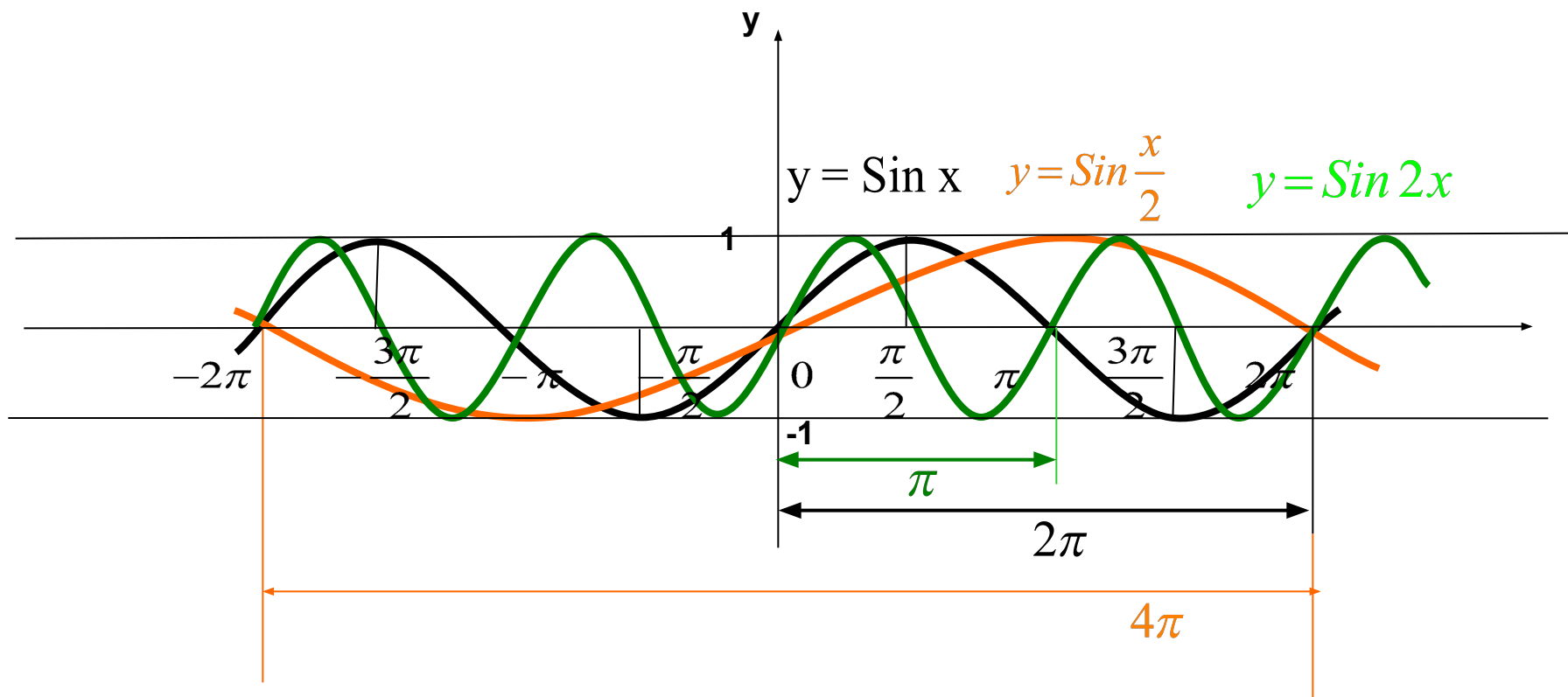
# Вывод



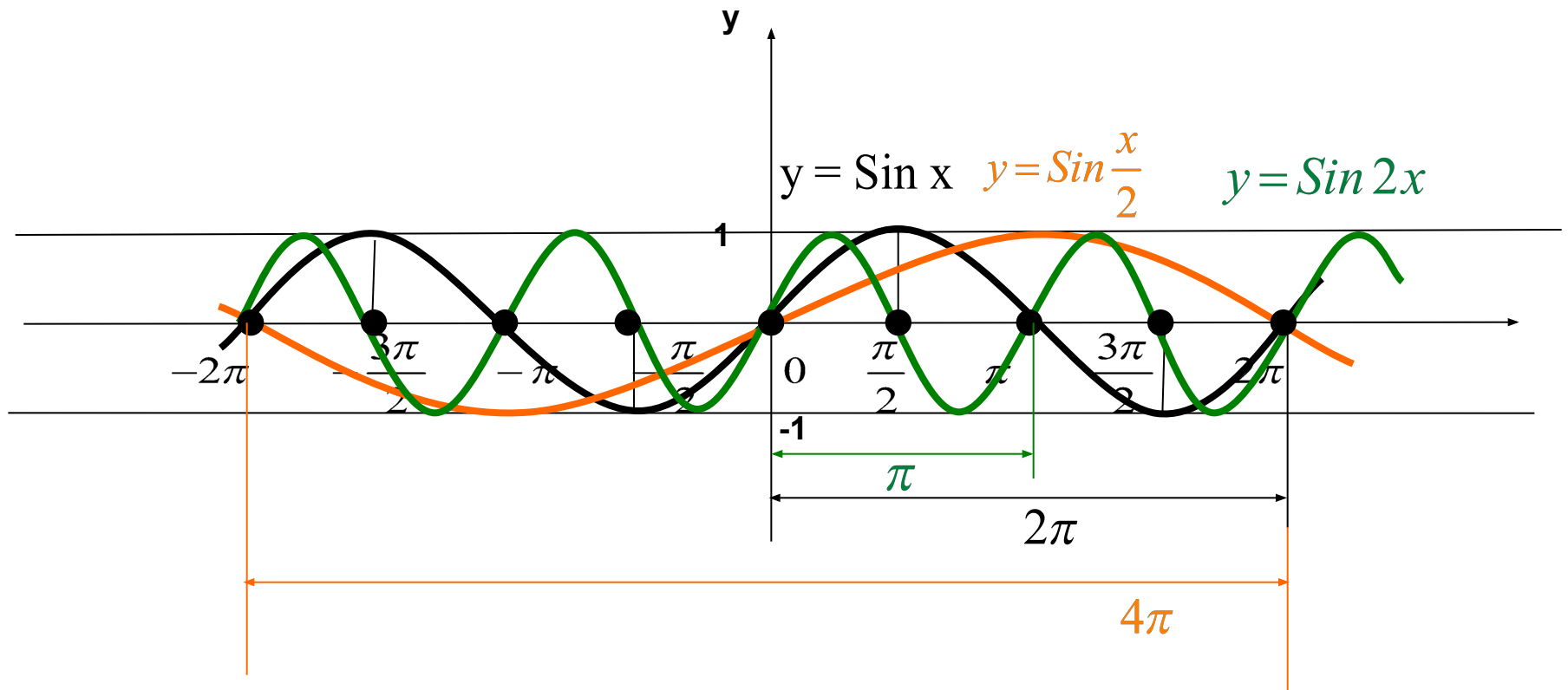
Чтобы построить график функции  $y = \sin(x + a)$ , надо ...



# Сжатие и растяжение вдоль оси $Ox$ .

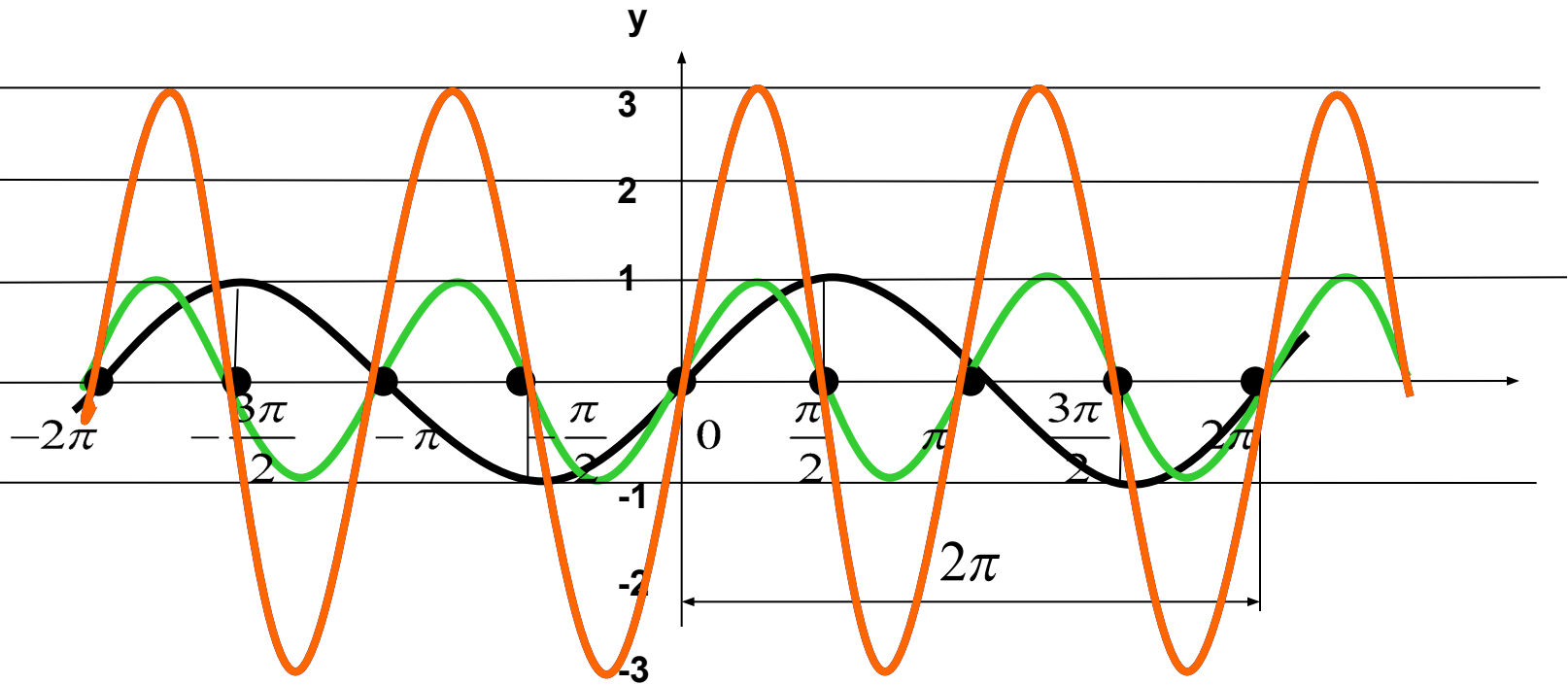


## Вывод:



Чтобы построить график функции  $y = \sin(\omega x)$ , надо ...

# Пример построения графика функции $y = 3\sin 2x + 1$



Построение:

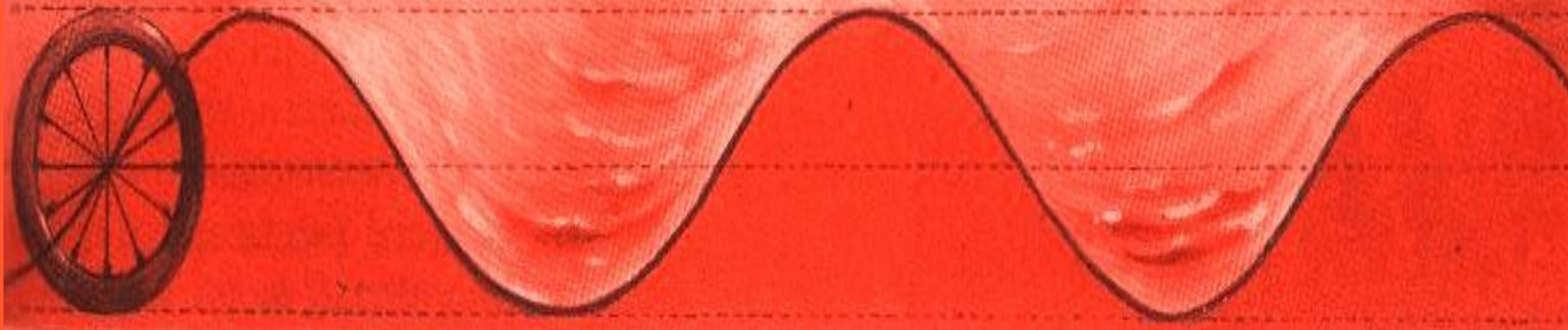
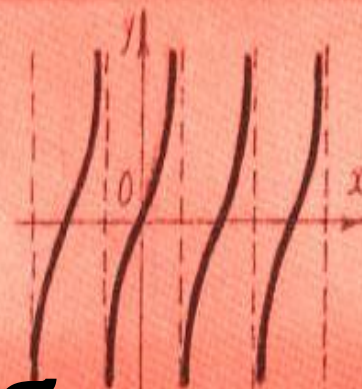
1)  $y = \sin x$

2)  $y = \sin 2x$

3)  $y = 3\sin 2x$

4)  $y = 3\sin 2x + 1$

# Гармонические колебания



Величины, изменяющиеся по закону

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

играют важную роль.

Эту формулу называют уравнением гармонического колебания.

$A$  – амплитуда колебания;

$\omega$  - угловая частота колебания;

$\varphi$  - начальная фаза колебания;

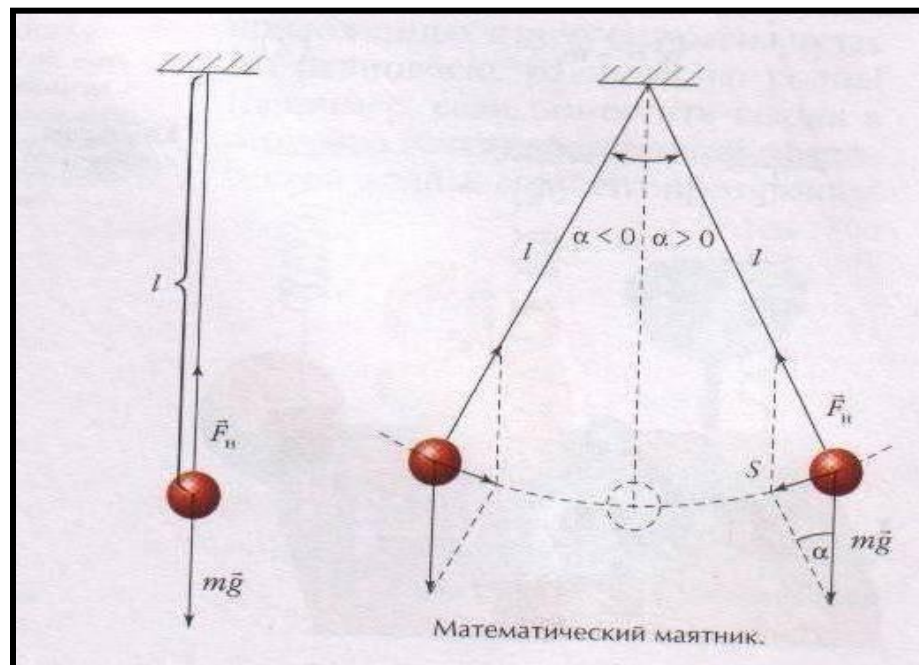
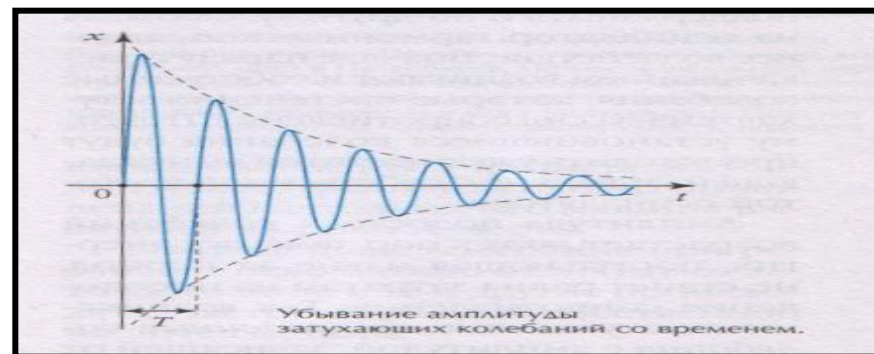
$t$  – время

# Механические колебания

Если отклонить и отпустить математический маятник, то в идеальных условиях он начнет совершать колебания, подчиняющиеся гармоническому закону.



Работа сил сопротивления приводит к затуханию свободных колебаний.



# Колебания переменного тока

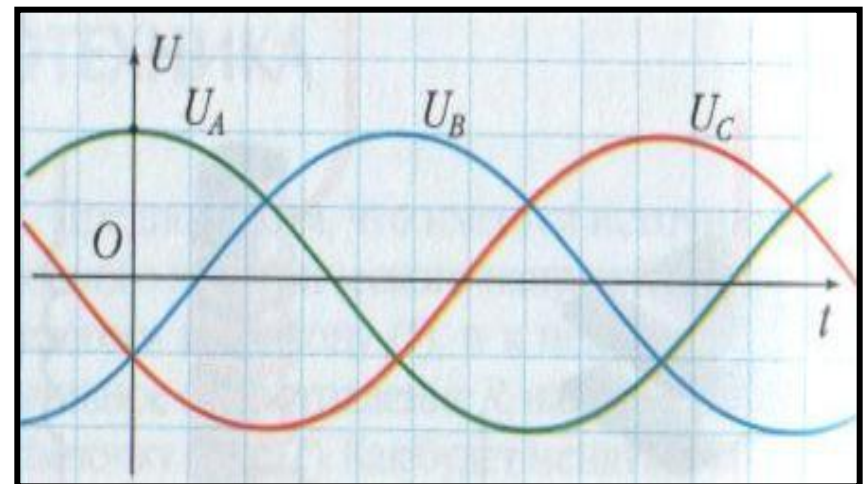
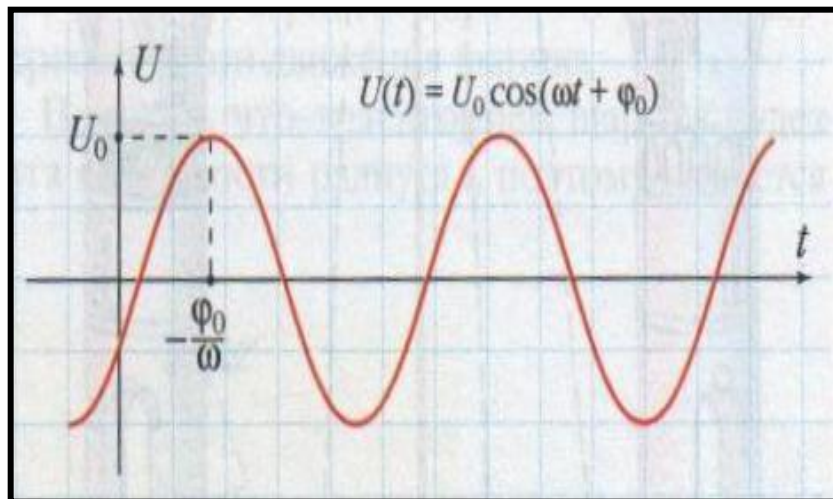
Гармонические колебания имеют огромное практическое значение. Переменный ток – один из видов таких колебаний. Переменное напряжение создается генератором переменного тока. Напряжение и ток в цепи изменяются по законам

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

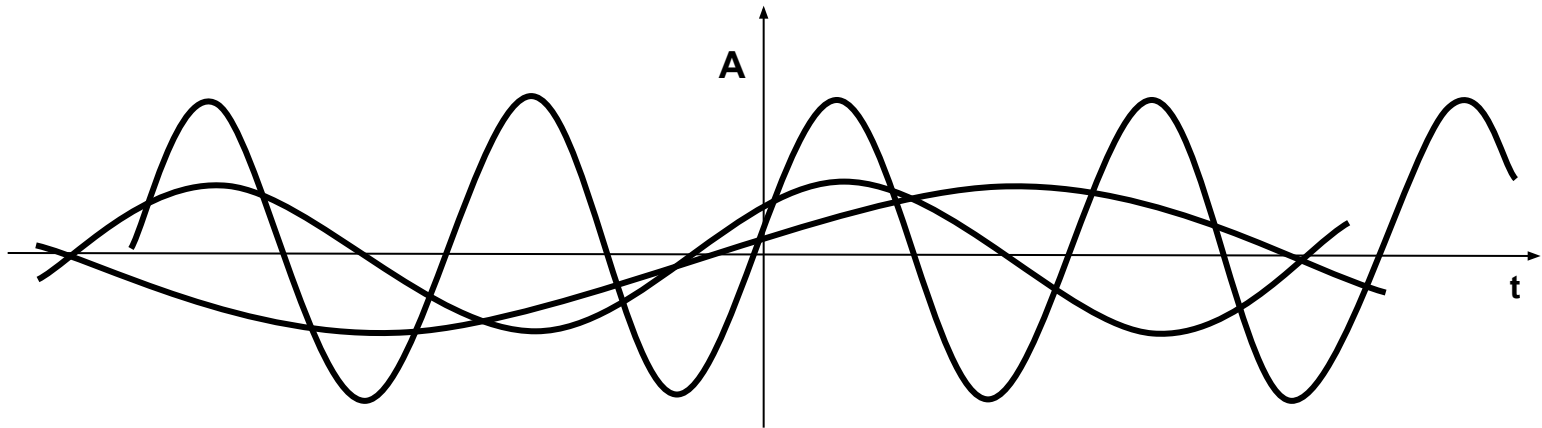
т.е. по законам гармонических колебаний.

На рисунках показаны графики напряжений однофазного и трехфазного токов.



# Музыкальные звуки

Звуки делятся на музыкальные и шумы. К первым относятся пение, звучание струны и т.д. Музыкальные звуки издают гармонически колеблющиеся тела (камертон, струна и др.).



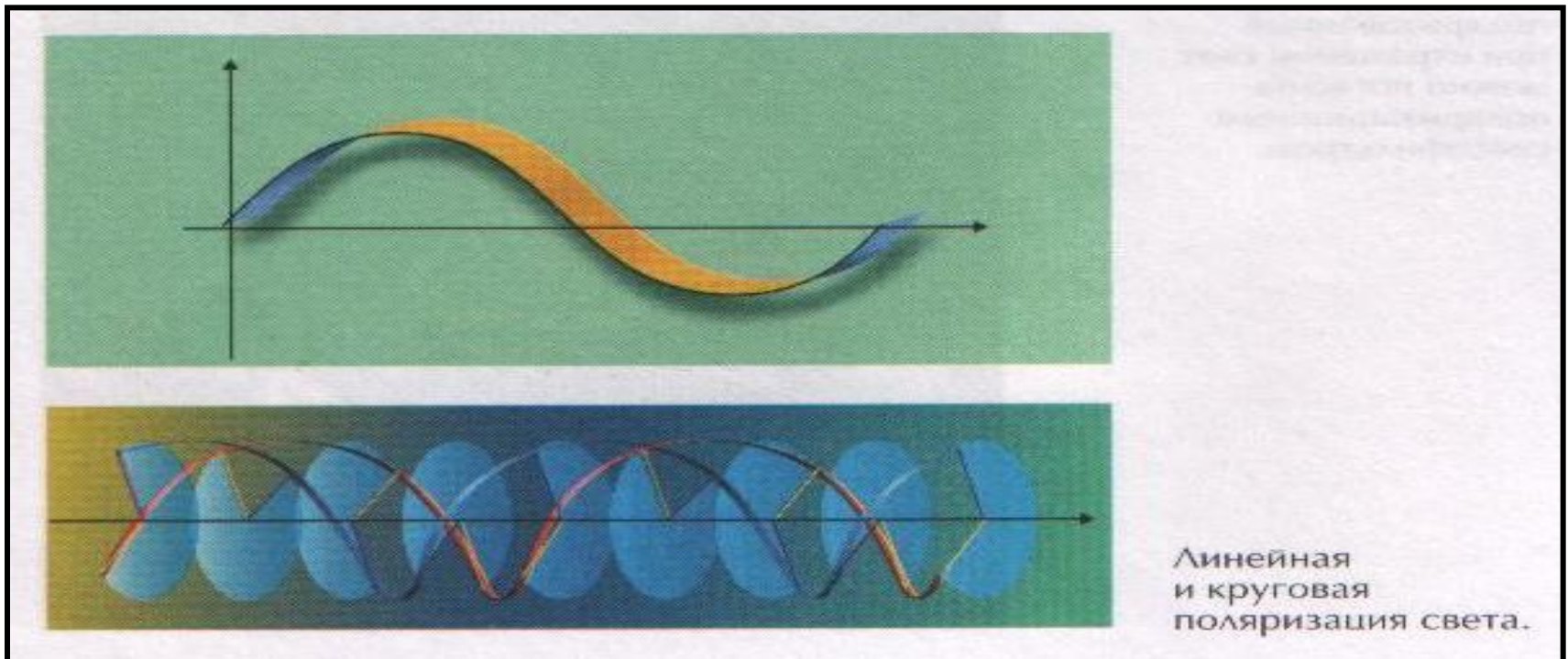
Шумы возникают при работе двигателей, скрипе, шипении змеи и т. п.

Амплитуда звукового колебания — это громкость звука, частота колебания — высота тона. Чем больше амплитуда, тем громче звук, чем больше частота, тем выше тон.

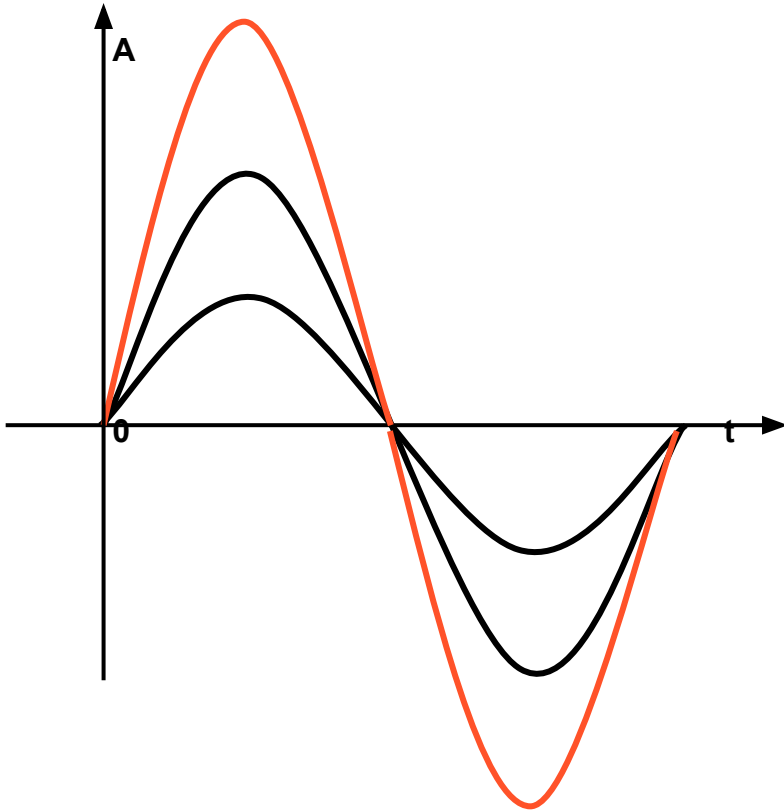


# СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ

В отличие от звуковых, световые волны поперечны. Колебания в них происходят по всем направлениям, перпендикулярным направлению распространения волны. На рисунке показан график поляризованного света, который получают при пропускании света через кристалл турмалина, способного пропускать световые волны с колебаниями в одной плоскости.



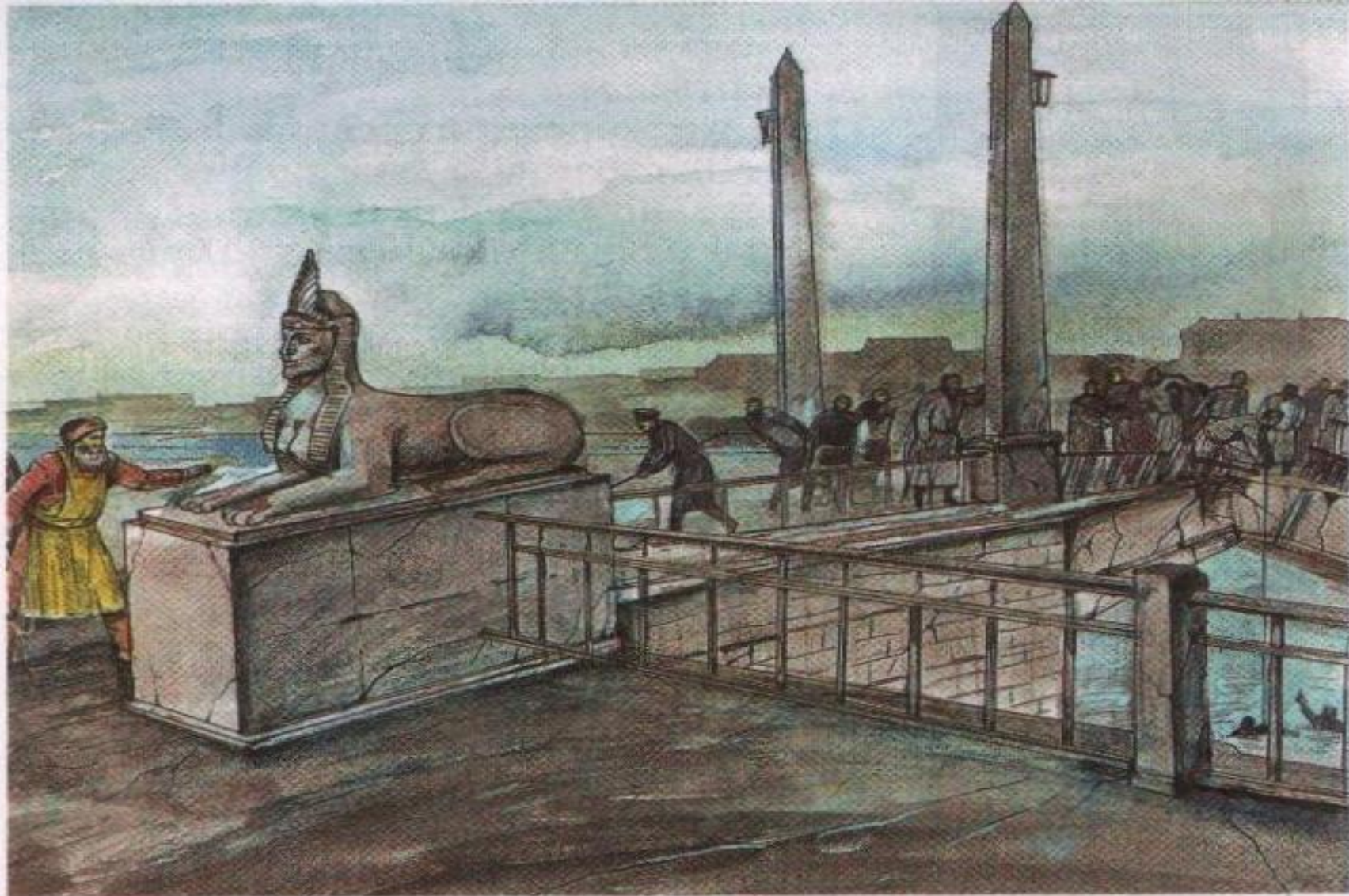
# Сложение колебаний, резонанс



Резонанс наблюдается в том случае, когда собственная частота системы совпадает с изменением внешней силы. Амплитуда колебания при этом резко увеличивается.

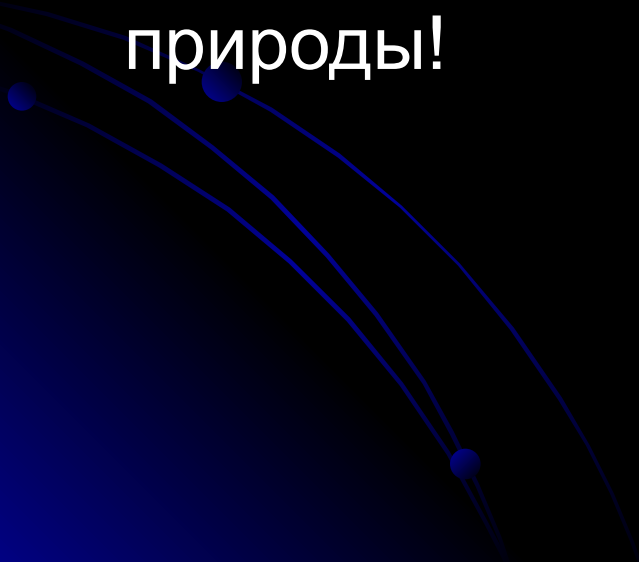
Резонанс может возникнуть и в электрической цепи, когда активное сопротивление мало.

Это может привести к перегреву провода или пробоем изоляции.



Иногда рост амплитуды ведёт к разрушению системы, и резонанс представляет большую опасность. Известен исторический пример, когда в XIX в. обрушился Египетский мост в Петербурге. По мосту шёл в ногу отряд кавалергардов. Ритм их строевого шага случайно совпал с собственной частотой сооружения, амплитуда вынужденных колебаний стала резко возрастать, смещения превысили расчётную критическую величину — и мост не выдержал. Поэтому теперь, когда солдатская колонна проходит по «сомнительному» мосту, подаётся команда идти не в ногу.

Колебания окружают нас со всех сторон, от них не спрятаться и не убежать. Дрожат стены зданий, колеблется воздух, полный звуков, волнуются моря и озера. Колебания – это универсальные процессы природы!



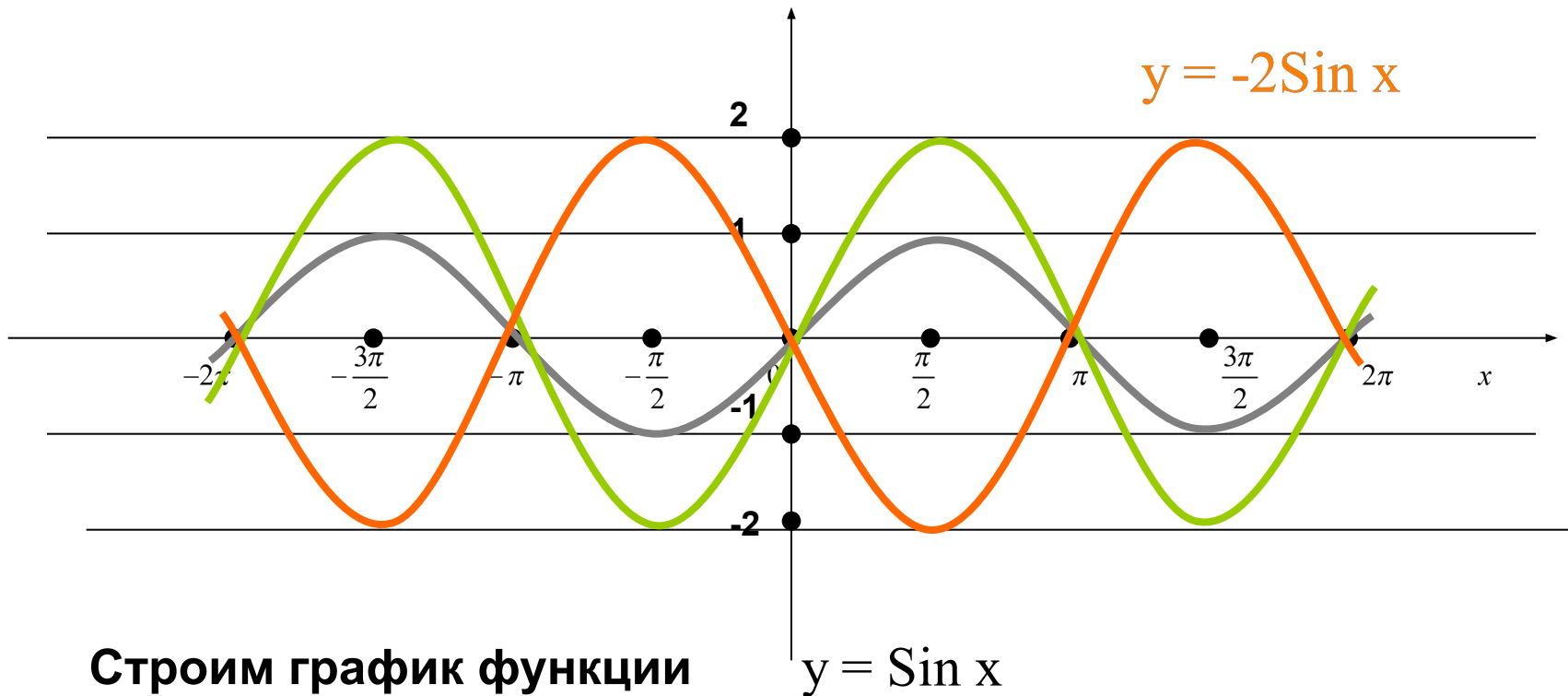
# Задание на дом

- 1) Яковлев Г.Н. «Алгебра и начала анализа» §26
- 2) Постройте график функции  $y = 2\cos\frac{x}{2} - 1$
- 3) Сформулируйте свойства этой функции

# Пробная работа

Постройте график функции  $y = -2\sin x$   
и сформулируйте ее свойства

# Проверка



1) Строим график функции

$$y = \text{Sin } x$$

2) Умножим все значения  $y$  на 2, получим график функции

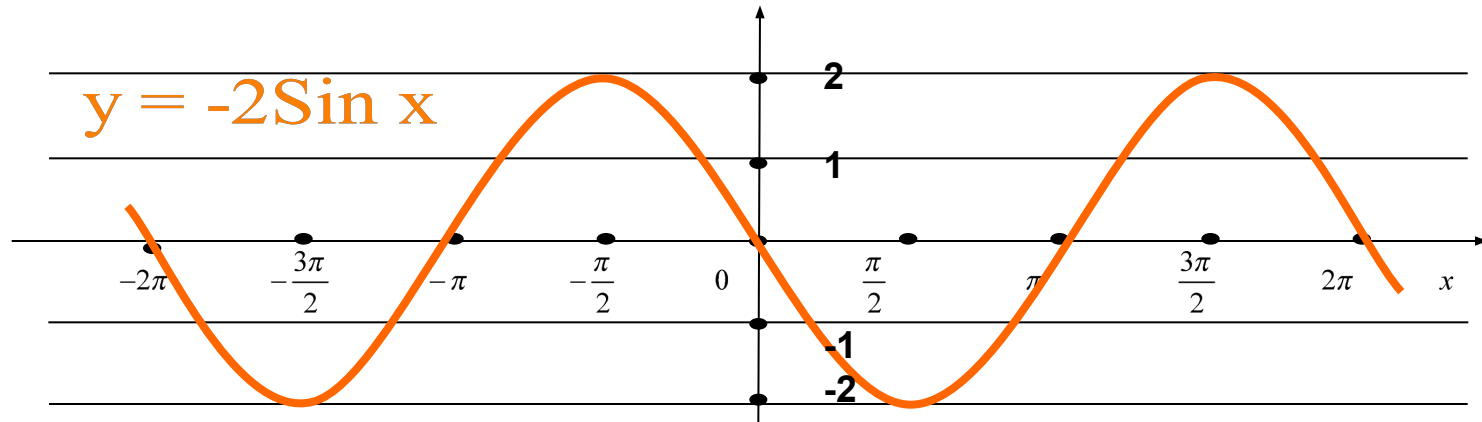
$$y = 2\text{Sin } x$$

3) Отообразим симметрично относительно оси  $Ox$ , получим график функции

$$y = -2\text{Sin } x$$

## Свойства функции

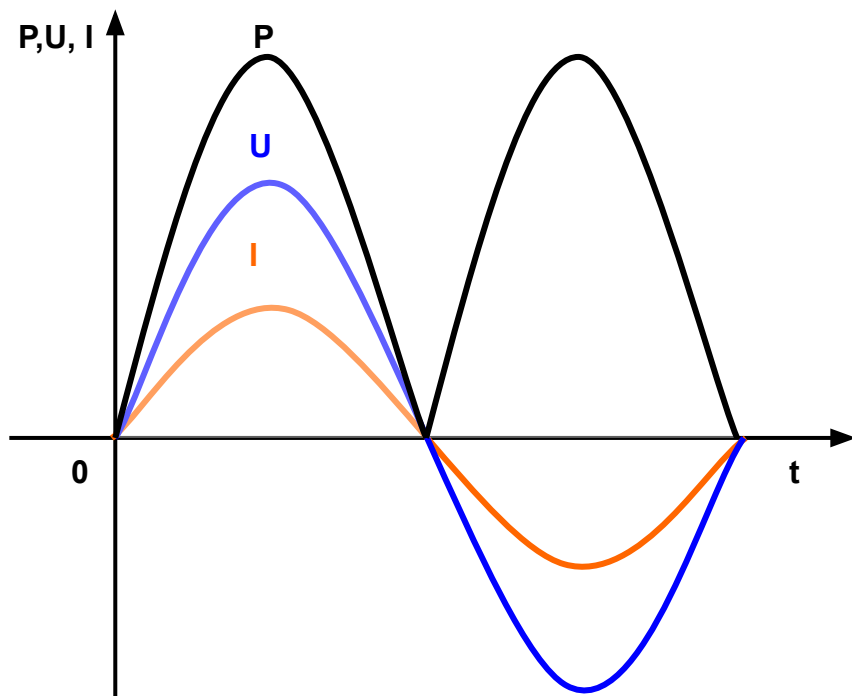
$$y = -2\sin x$$



- 1) Область определения:  $x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) Область значений:  $y \in [-2; 2]$
- 3) Нечетная, непрерывная, периодическая,  $T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 4) Нули в точках  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 5) Положительна при  $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$   
отрицательна при  $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
- 6) Возрастает при  $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$   
Убывает при  $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
- 7) Имеет максимумы, равные **2**, при  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$   
Имеет минимумы, равные **-2**, при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



# Графики напряжения и тока в цепи переменного тока



Конец урока