

Тригонометрические Функции

$$y = \sin x, y = \cos x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x,$$

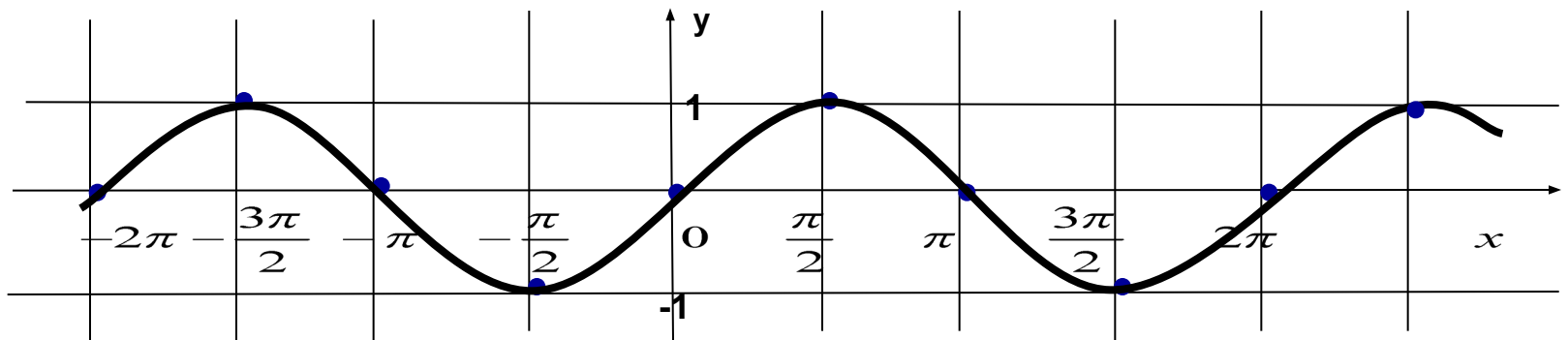
их свойства и графики

Повторение. Схема исследования функции

При исследовании функции находят:

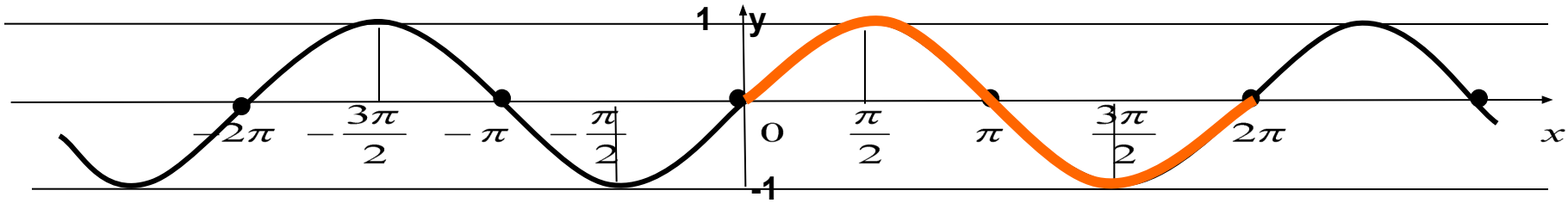
- 1) Область определения
Область значений
- 2) Четность, периодичность,
непрерывность
- 3) Нули функции
- 4) Промежутки знакопостоянства
- 5) Промежутки возрастания, убывания
- 6) Экстремумы

Функция $y = \sin x$, ее свойства и график



| | | | | | | | | | |
|--------------|-----|-----------------|-------|------------------|--------|------------------|--------|-------------------|---------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\pi$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | -2π |
| $y = \sin x$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |

Свойства синуса



Область определения..... $x \in (-\infty; +\infty)$

Область значений..... $y \in [-1; 1]$

Функция нечетная, непрерывная, периодическая ($T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$)

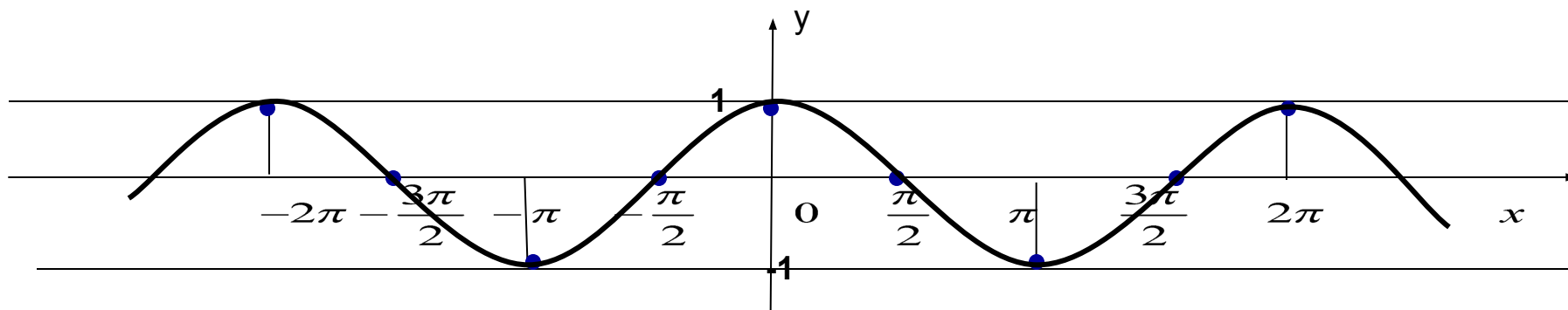
Нули функции в точках $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция положительна при } x \in (\pi n, \pi n + \pi), n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция отрицательна при } x \in (-\pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция возрастает при } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция убывает при } x \in \left[\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3\pi}{2} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

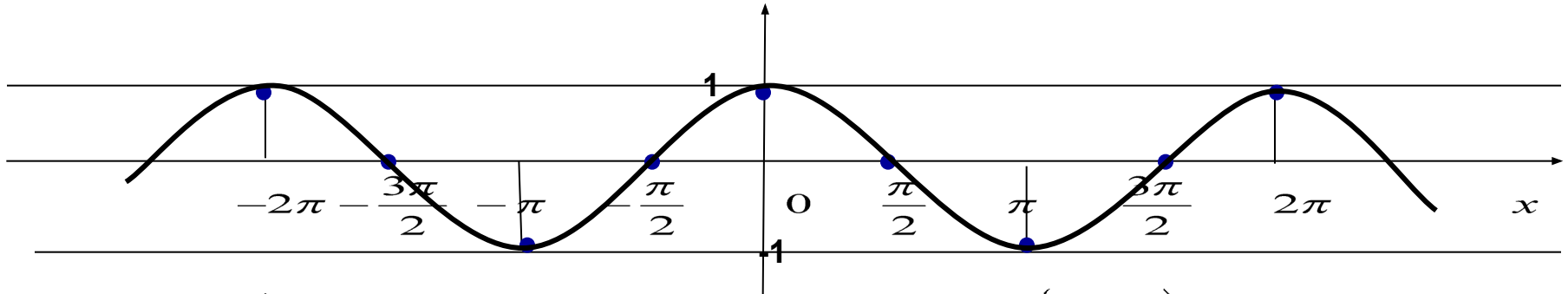
7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция имеет максимумы, равные 1, при } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \text{б) Функция имеет минимумы, равные -1, при } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Функция $y = \cos x$, ее свойства и график



| | | | | | | | | | |
|-----|---|-----------------|-------|------------------|--------|------------------|--------|-------------------|---------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\pi$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | -2π |
| y | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

Свойства косинуса



Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

Область значений $y \in [-1; 1]$

Функция четная, непрерывная, периодическая ($T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$)

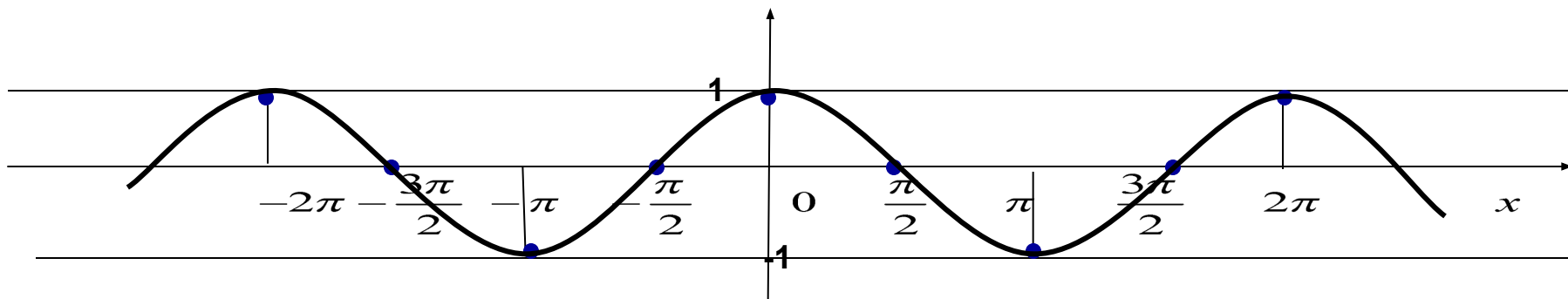
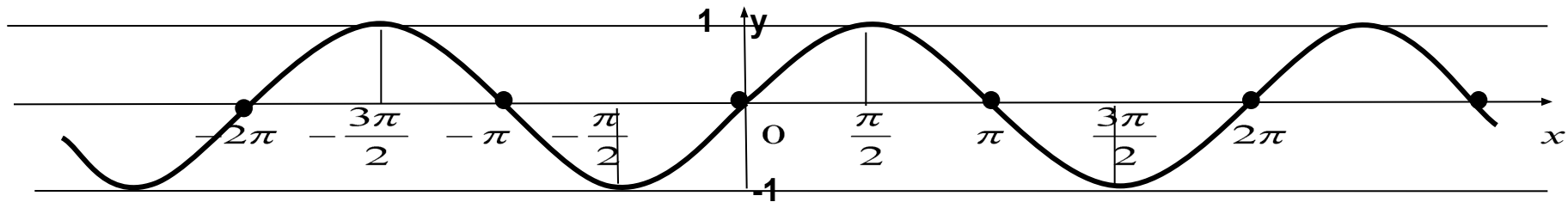
Нули функции в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция положительна при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция отрицательна при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

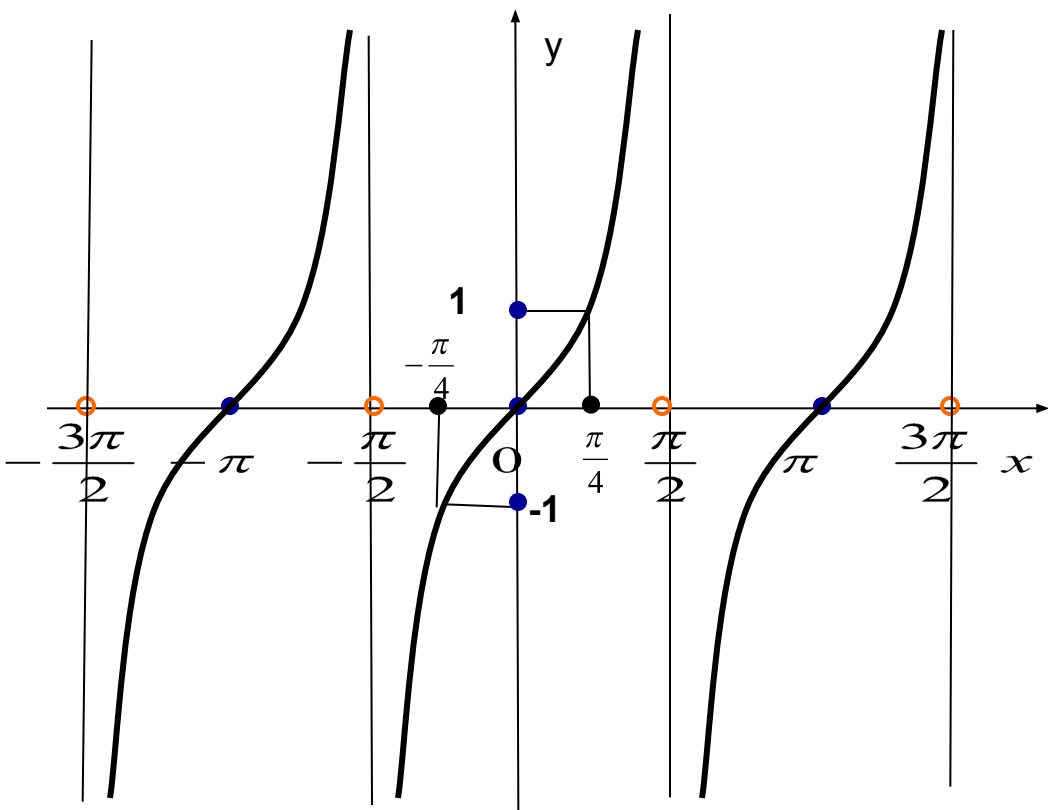
6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция возрастает при } x \in [-\pi + 2\pi n, \pi n], n \in \mathbb{Z} \\ \text{б) Функция убывает при } x \in [\pi n, \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{а) Функция имеет максимумы, равные 1, при } x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \text{б) Функция имеет минимумы, равные -1, при } x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Сравните графики синуса и косинуса

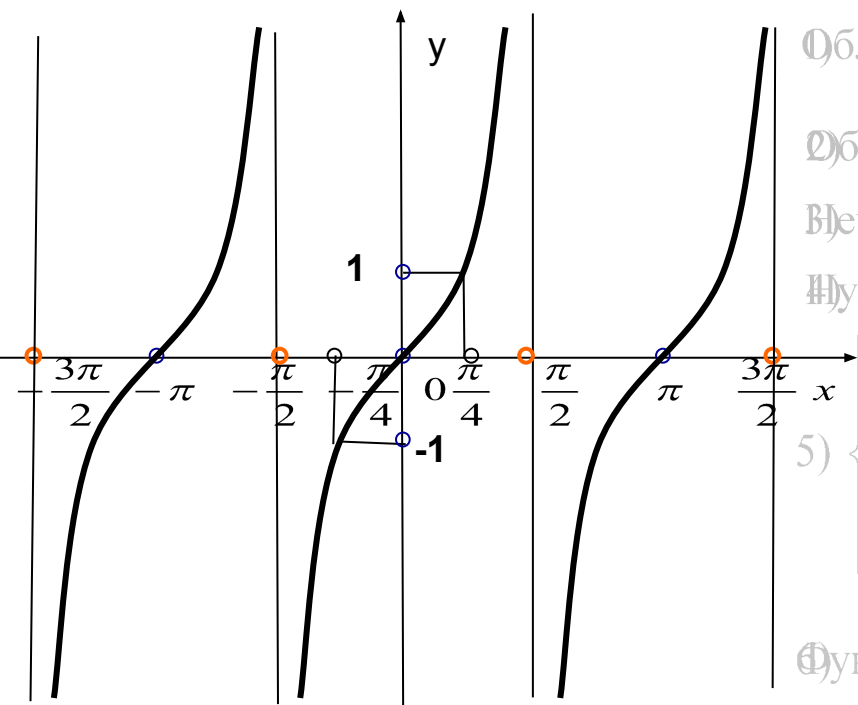


Функция $y = \operatorname{tg} x$, ее свойства и график



| | | | | | | | |
|-----|---|-----------------|-----------------|-------|------------------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\pi$ |
| y | 0 | 1 | - | 0 | -1 | - | 0 |

Свойства тангенса



Область определения $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z$

Область значений $y \in (-\infty, +\infty)$

Вчетная, периодическая $(T = \pi n), n \in Z$

Нули функции в точках $x = \pi n, n \in Z$

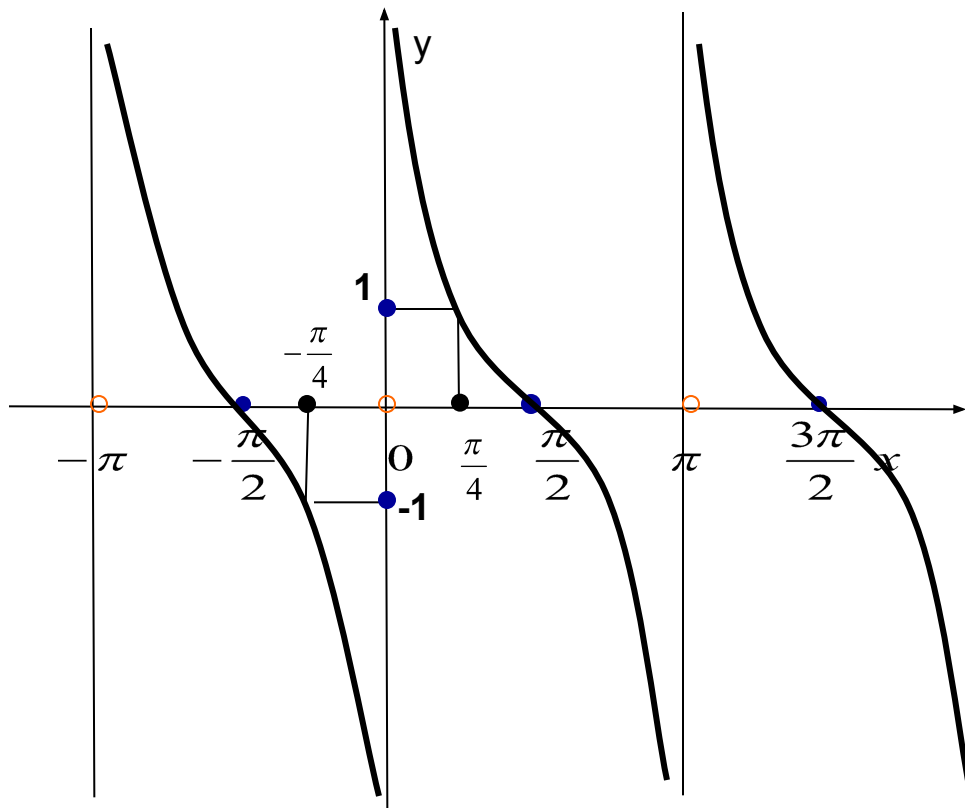
5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Функция положительна при } x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z \\ \text{Функция отрицательна при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n \right), n \in Z \end{array} \right.$

Функция отрицательна при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n \right), n \in Z$

Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z$

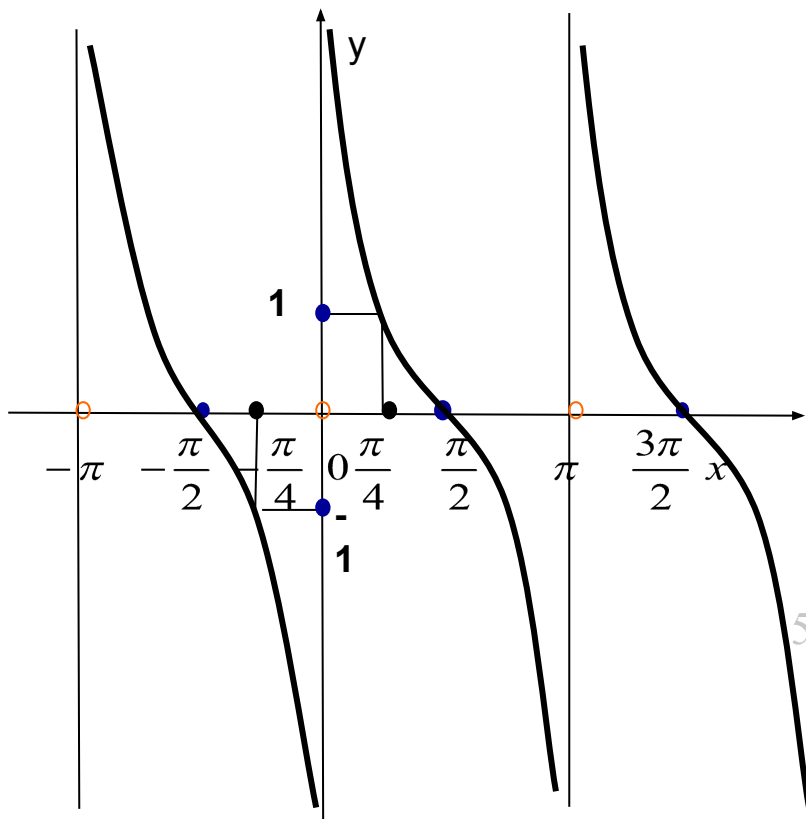
Экстремумов не имеет

Функция $y = \text{Ctg } x$, ее свойства и график



| | | | | | | | |
|-----|-----|-----------------|-----------------|-------|------------------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\pi$ |
| y | $-$ | 1 | 0 | $-$ | -1 | 0 | $-$ |

Свойства котангенса



Область определения $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$

Вчетная, периодическая $(T = \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Нули функции в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

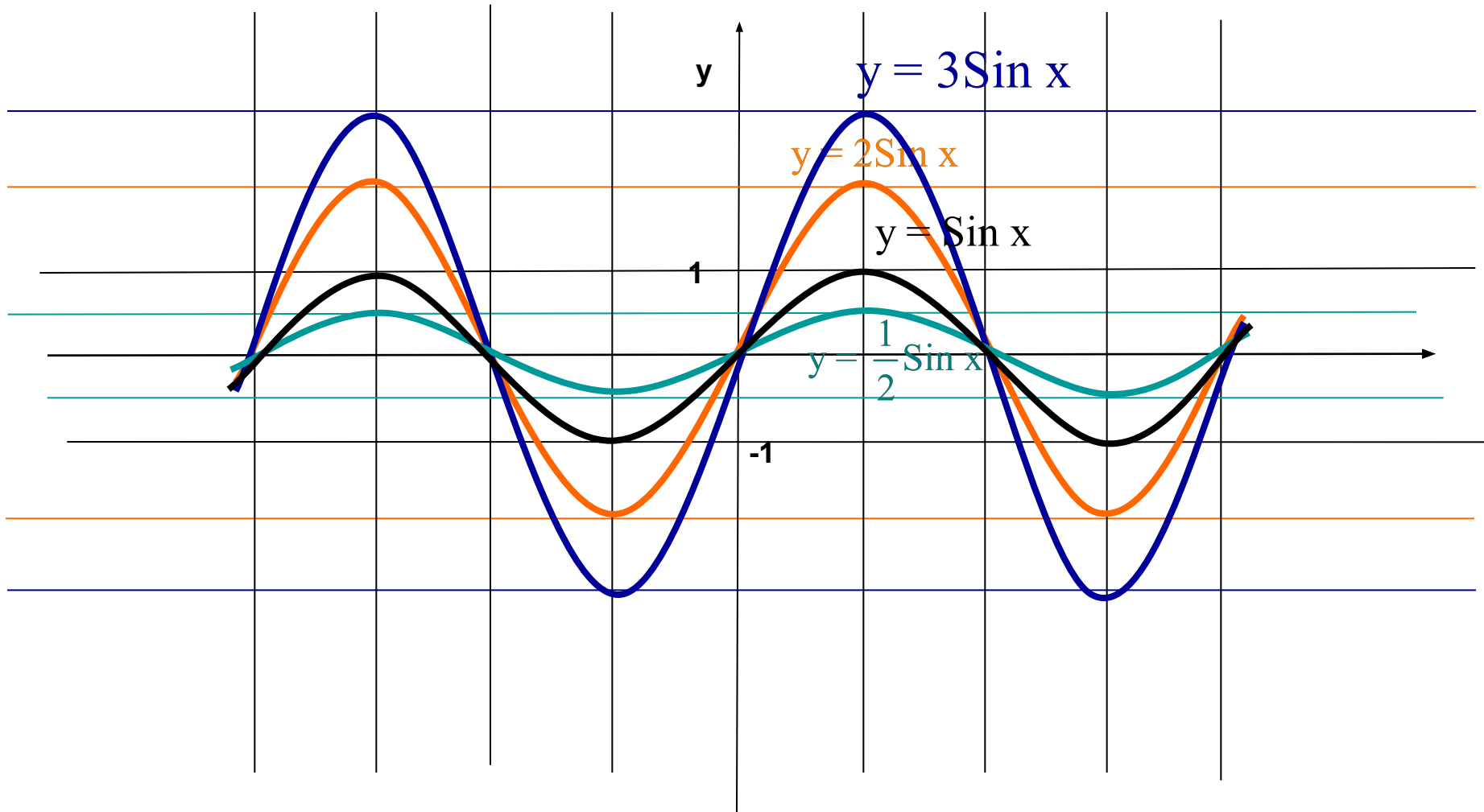
5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Функция положительна при } x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \\ \text{Функция отрицательна при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right), n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

Функция убывает при $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

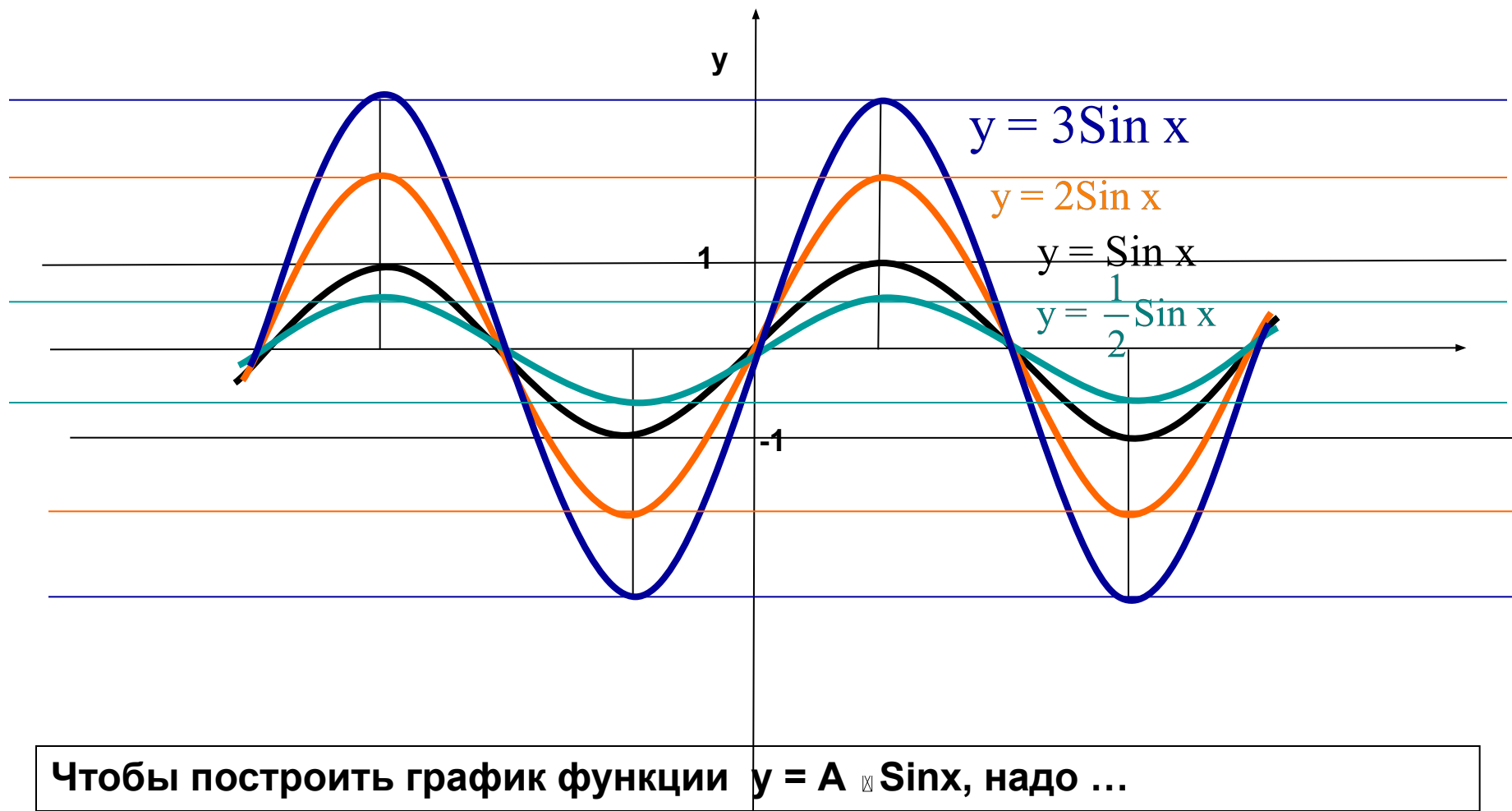
Экстремумов не имеет

Преобразования графиков тригонометрических функций

Сжатие и растяжение вдоль оси Oy.

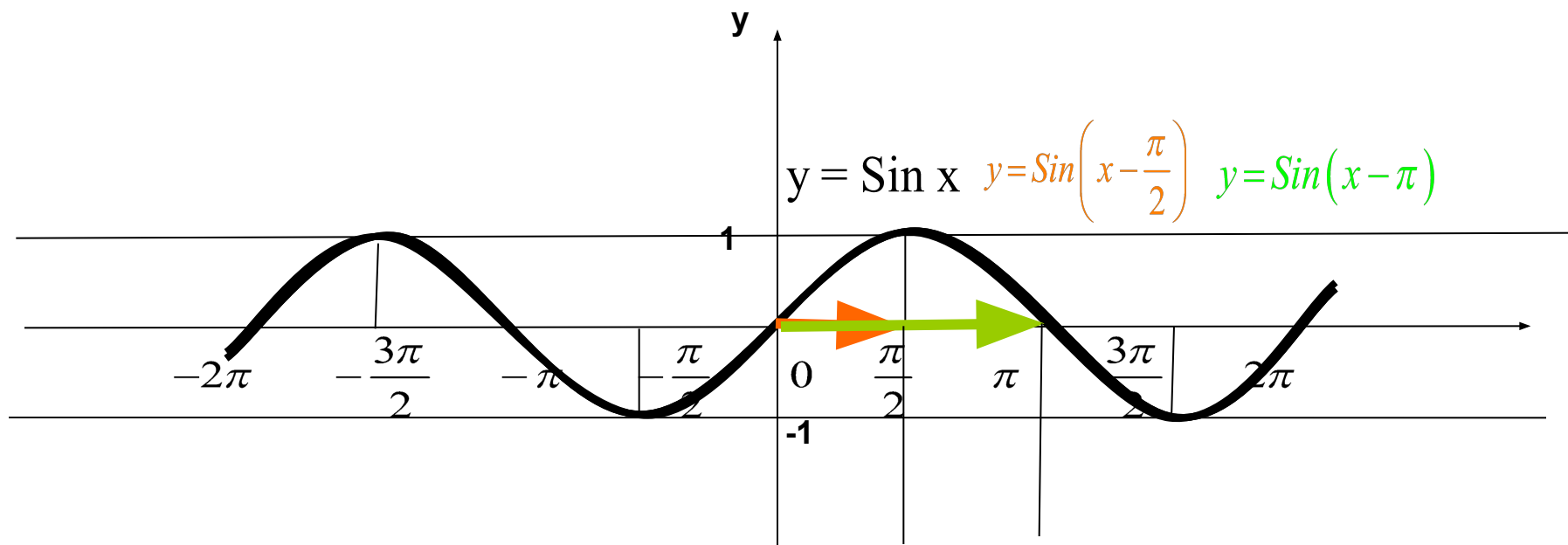


Вывод

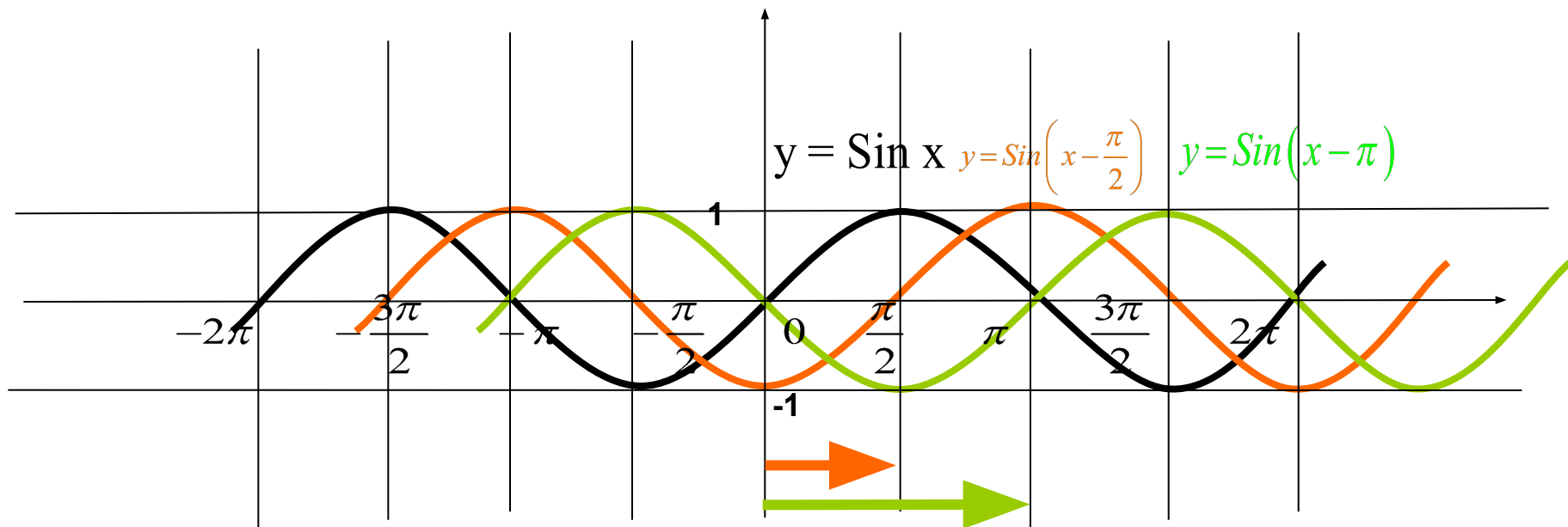


Чтобы построить график функции $y = A \cdot \text{Sin } x$, надо ...

Сдвиг вдоль оси Ох.

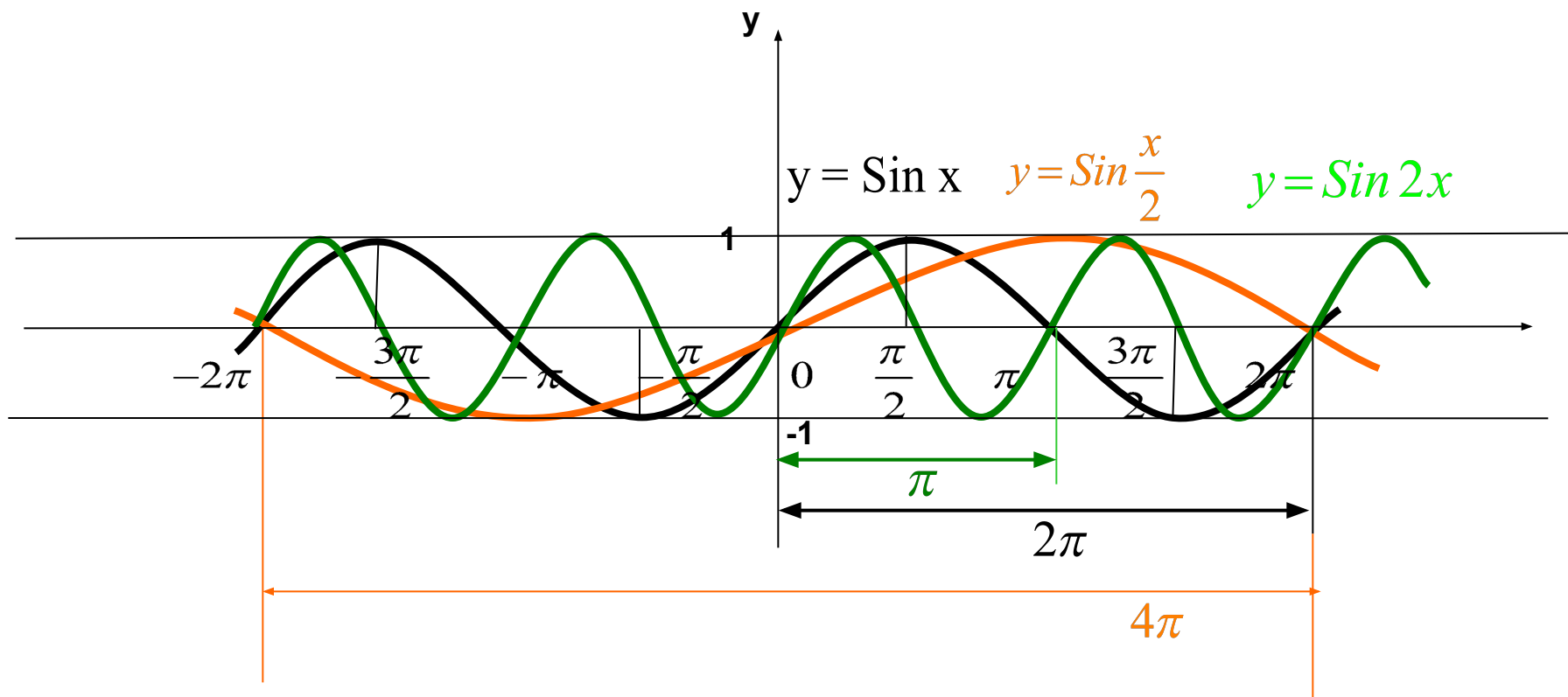


Вывод

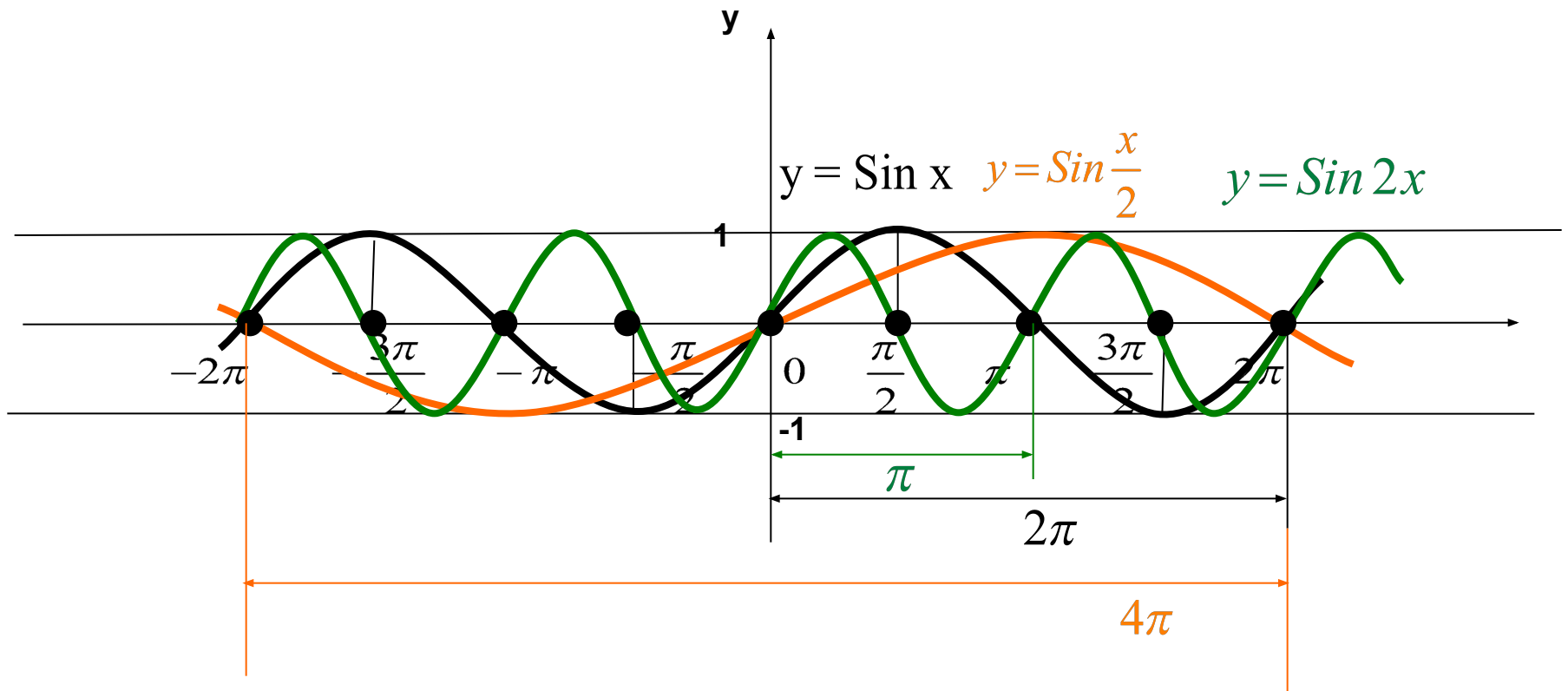


Чтобы построить график функции $y = \sin(x + a)$, надо ...

Сжатие и растяжение вдоль оси Ox .

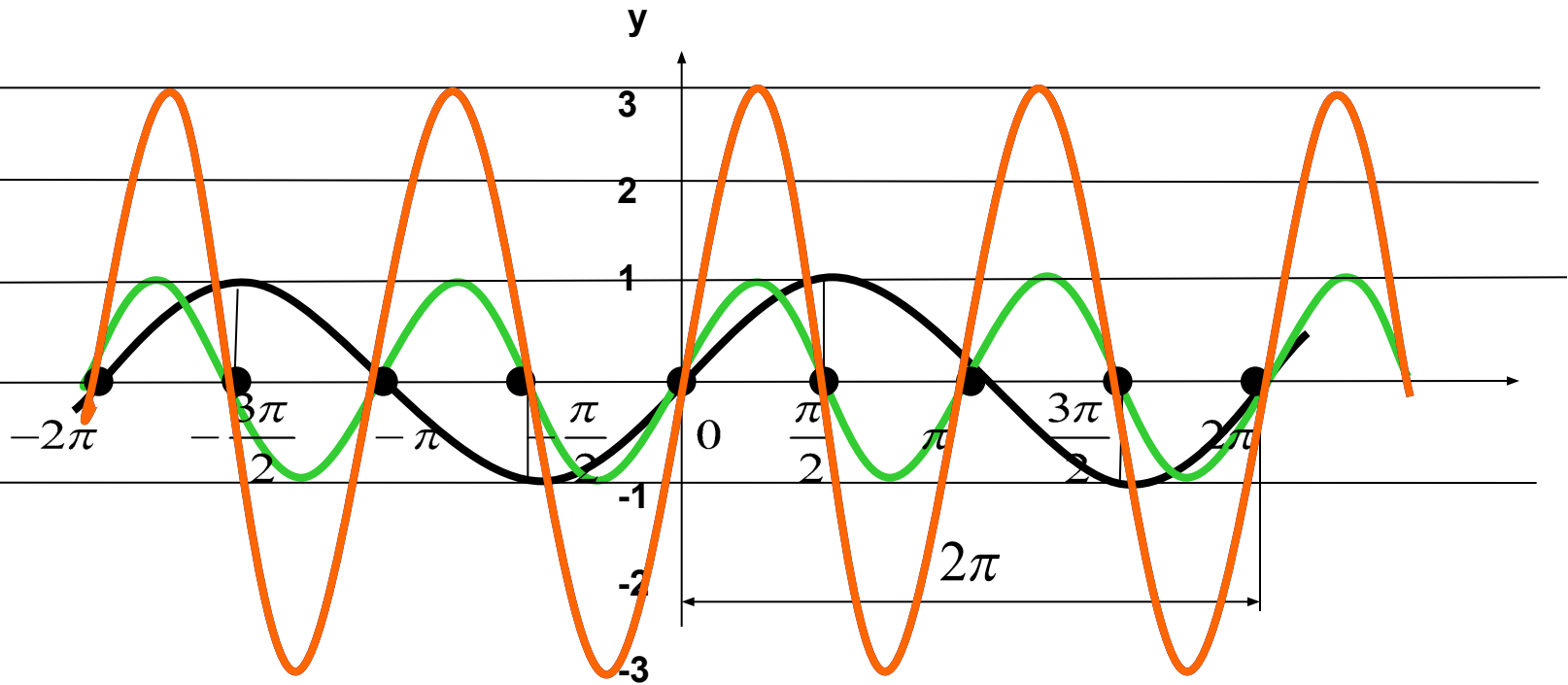


Вывод:



Чтобы построить график функции $y = \sin(\omega x)$, надо ...

Пример построения графика функции $y = 3\sin 2x + 1$



Построение:

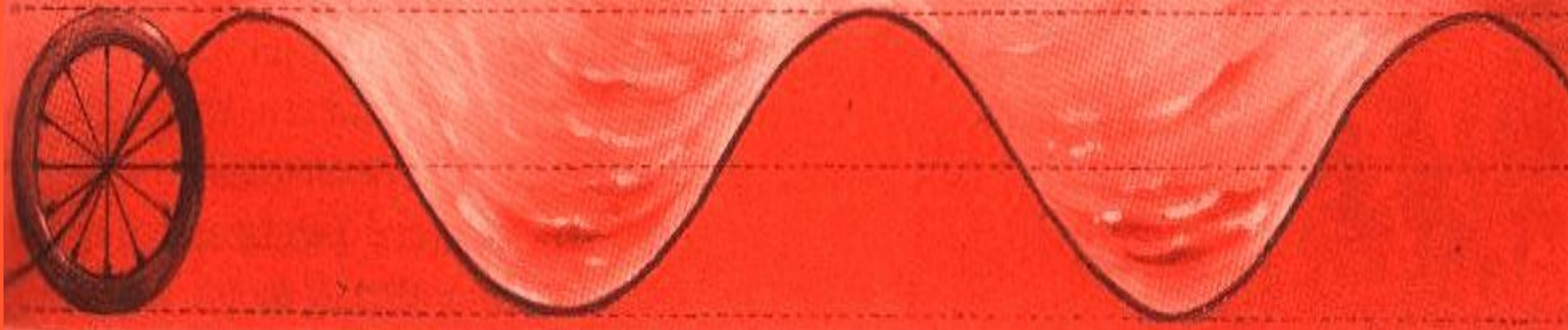
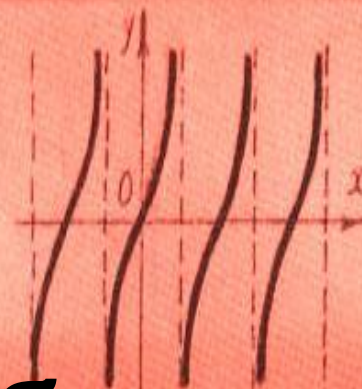
1) $y = \sin x$

2) $y = \sin 2x$

3) $y = 3\sin 2x$

4) $y = 3\sin 2x + 1$

Гармонические колебания



Величины, изменяющиеся по закону

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

играют важную роль.

Эту формулу называют уравнением гармонического колебания.

A – амплитуда колебания;

ω - угловая частота колебания;

φ - начальная фаза колебания;

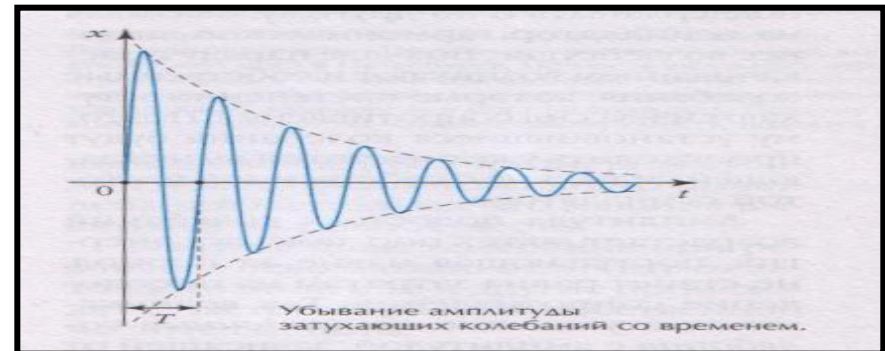
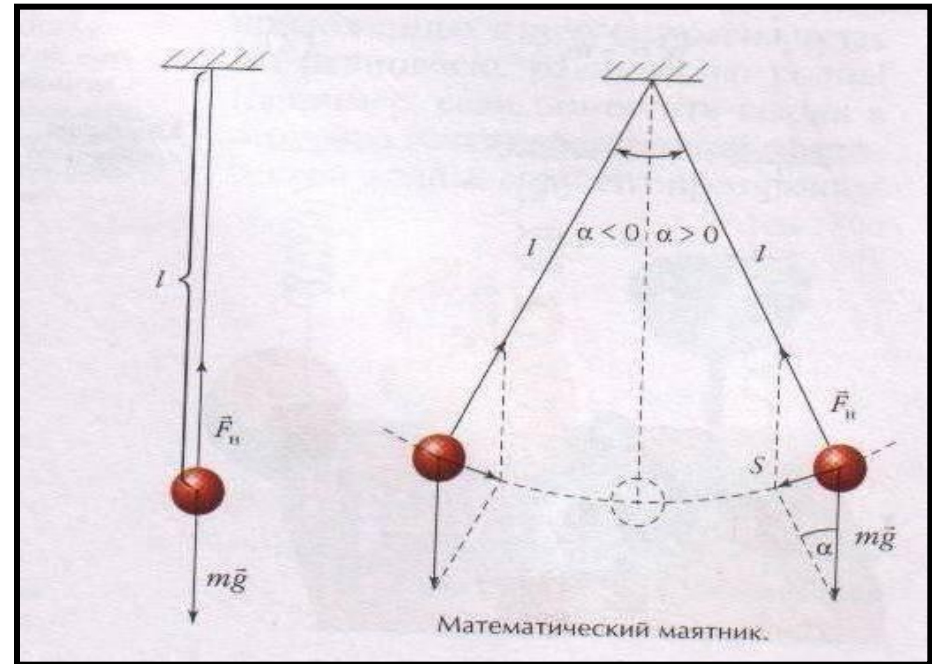
t – время

Механические колебания

Если отклонить и отпустить математический маятник, то в идеальных условиях он начнет совершать колебания, подчиняющиеся гармоническому закону.



Работа сил сопротивления приводит к затуханию свободных колебаний.



Колебания переменного тока

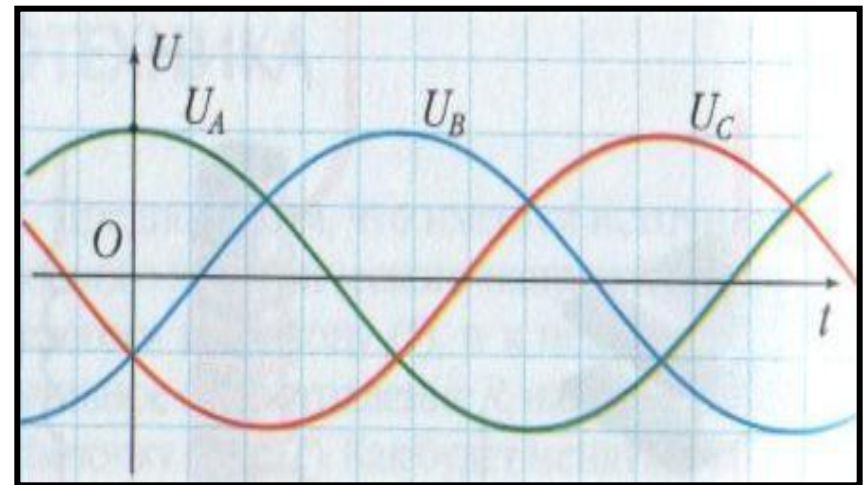
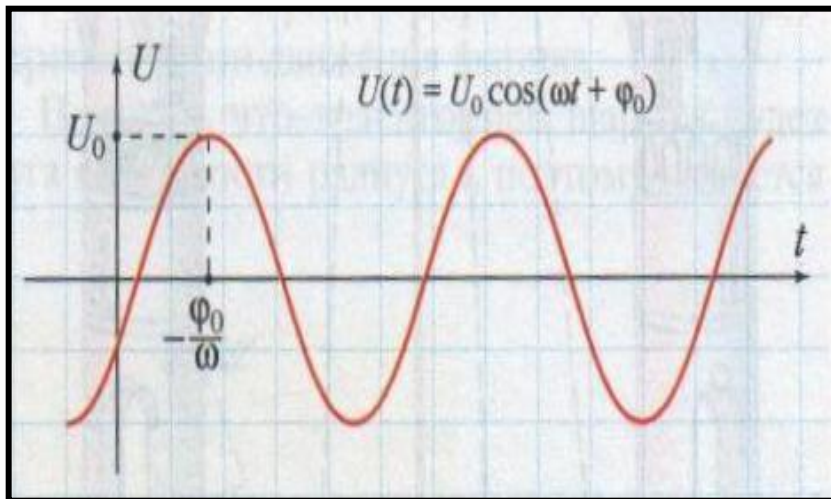
Гармонические колебания имеют огромное практическое значение. Переменный ток – один из видов таких колебаний. Переменное напряжение создается генератором переменного тока. Напряжение и ток в цепи изменяются по законам

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

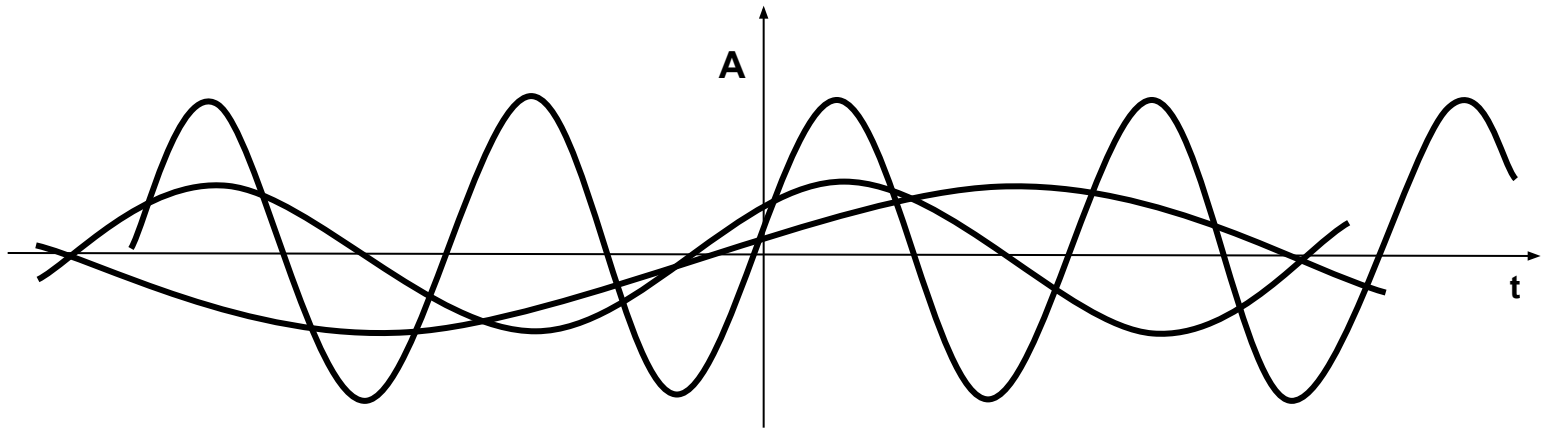
т.е. по законам гармонических колебаний.

На рисунках показаны графики напряжений однофазного и трехфазного токов.



Музыкальные звуки

Звуки делятся на музыкальные и шумы. К первым относятся пение, звучание струны и т.д. Музыкальные звуки издают гармонически колеблющиеся тела (камертон, струна и др.).

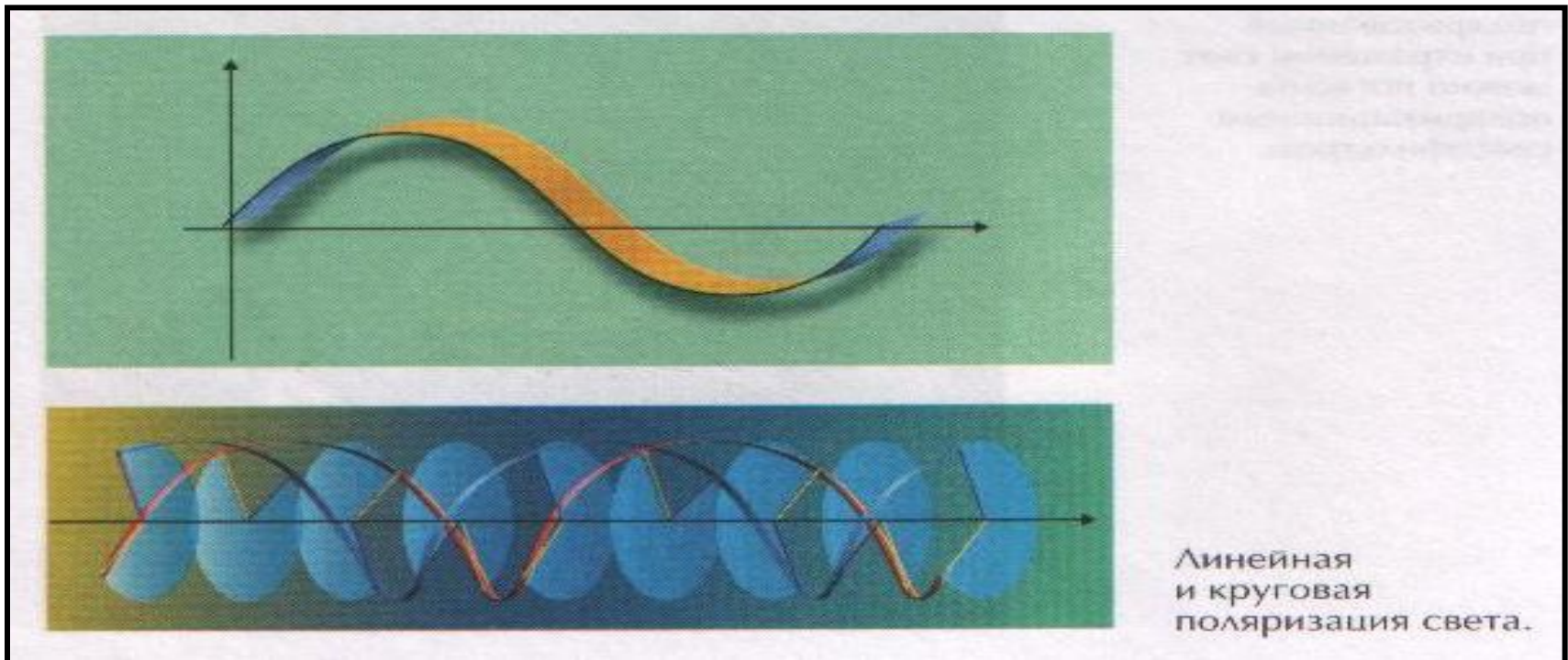


Шумы возникают при работе двигателей, скрипе, шипении змеи и т. п.

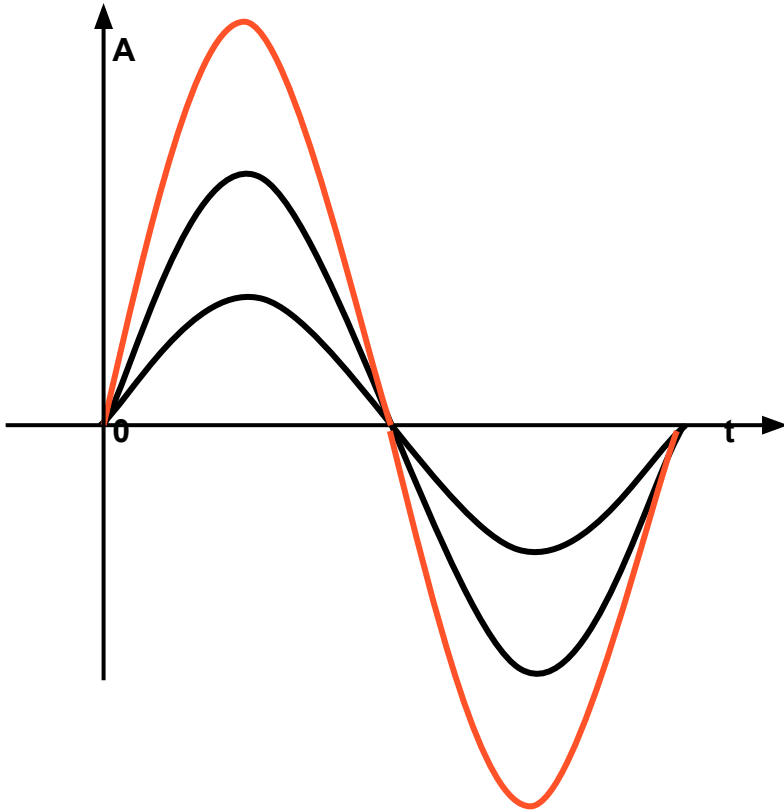
Амплитуда звукового колебания — это громкость звука, частота колебания — высота тона. Чем больше амплитуда, тем громче звук, чем больше частота, тем выше тон.

СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ

В отличие от звуковых, световые волны поперечны. Колебания в них происходят по всем направлениям, перпендикулярным направлению распространения волны. На рисунке показан график поляризованного света, который получают при пропускании света через кристалл турмалина, способного пропускать световые волны с колебаниями в одной плоскости.



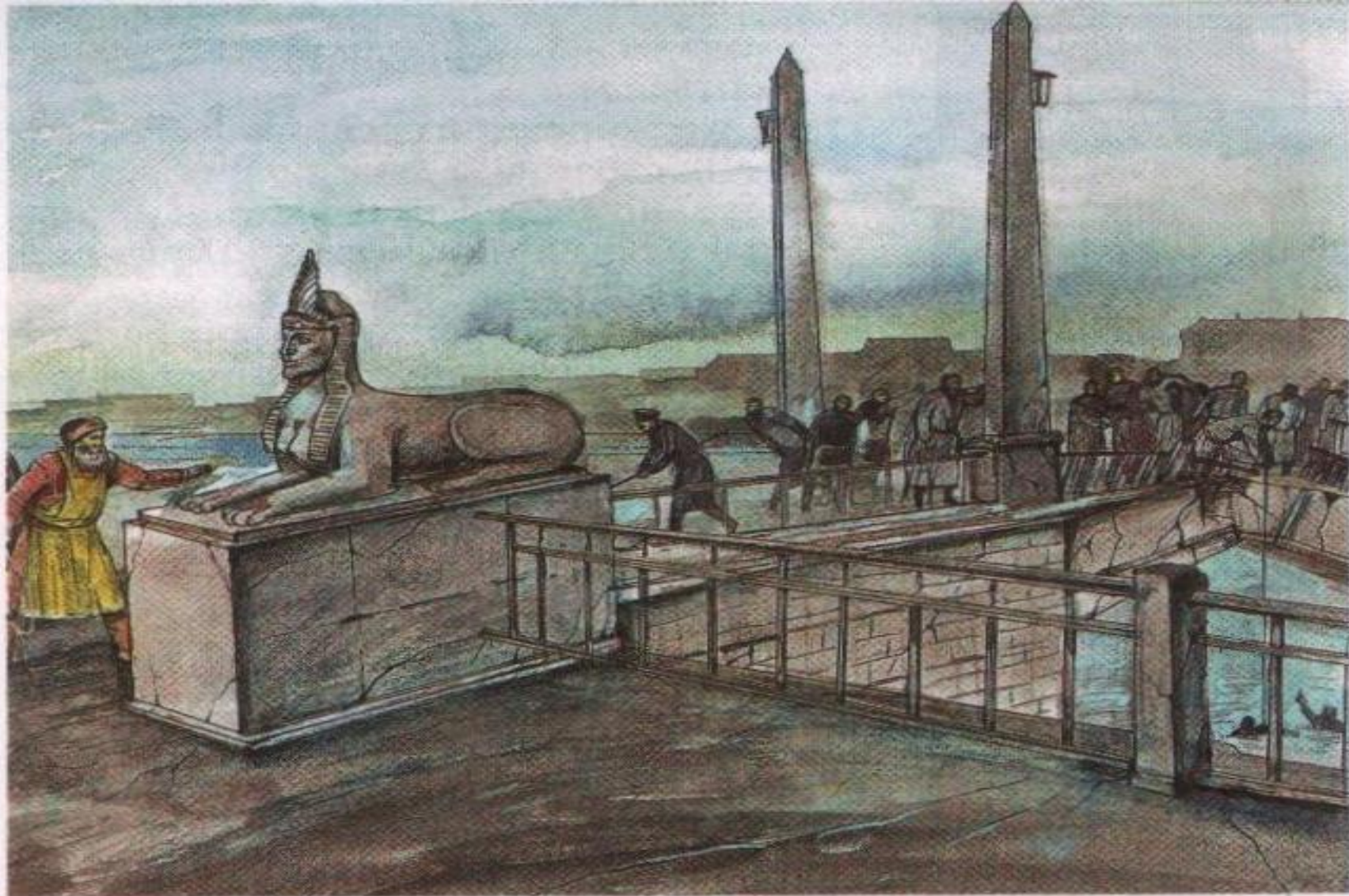
Сложение колебаний, резонанс



Резонанс наблюдается в том случае, когда собственная частота системы совпадает с изменением внешней силы. Амплитуда колебания при этом резко увеличивается.

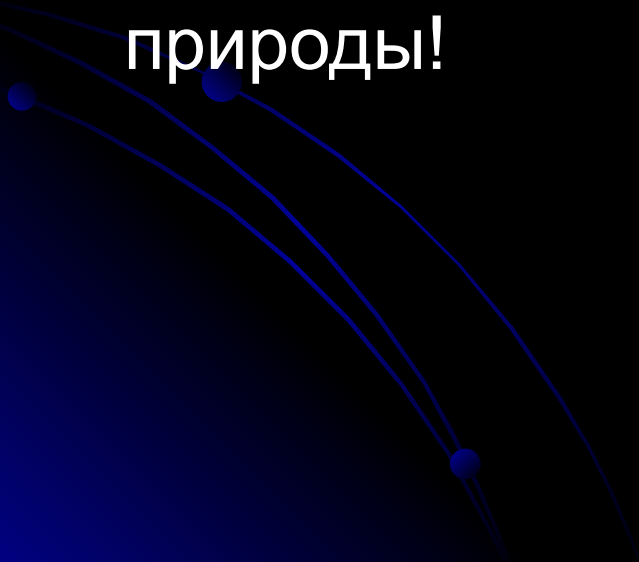
Резонанс может возникнуть и в электрической цепи, когда активное сопротивление мало.

Это может привести к перегреву провода или пробоем изоляции.



Иногда рост амплитуды ведёт к разрушению системы, и резонанс представляет большую опасность. Известен исторический пример, когда в XIX в. обрушился Египетский мост в Петербурге. По мосту шёл в ногу отряд кавалергардов. Ритм их строевого шага случайно совпал с собственной частотой сооружения, амплитуда вынужденных колебаний стала резко возрастать, смещения превысили расчётную критическую величину — и мост не выдержал. Поэтому теперь, когда солдатская колонна проходит по «сомнительному» мосту, подаётся команда идти не в ногу.

Колебания окружают нас со всех сторон, от них не спрятаться и не убежать. Дрожат стены зданий, колеблется воздух, полный звуков, волнуются моря и озера. Колебания – это универсальные процессы природы!



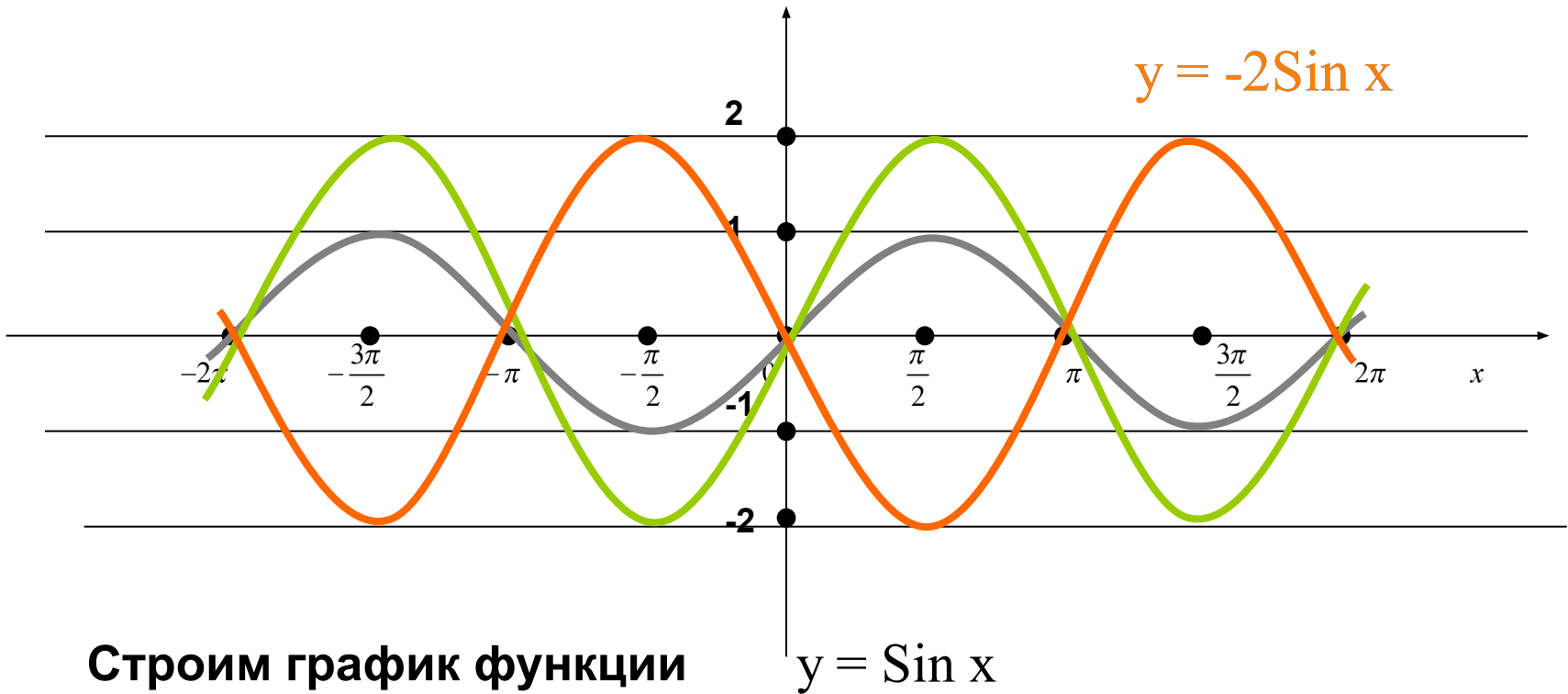
Задание на дом

- 1) Яковлев Г.Н. «Алгебра и начала анализа» §26
- 2) Постройте график функции $y = 2\cos\frac{x}{2} - 1$
- 3) Сформулируйте свойства этой функции

Пробная работа

Постройте график функции $y = -2\sin x$
и сформулируйте ее свойства

Проверка



1) Строим график функции

$$y = \sin x$$

2) Умножим все значения y на 2, получим график функции

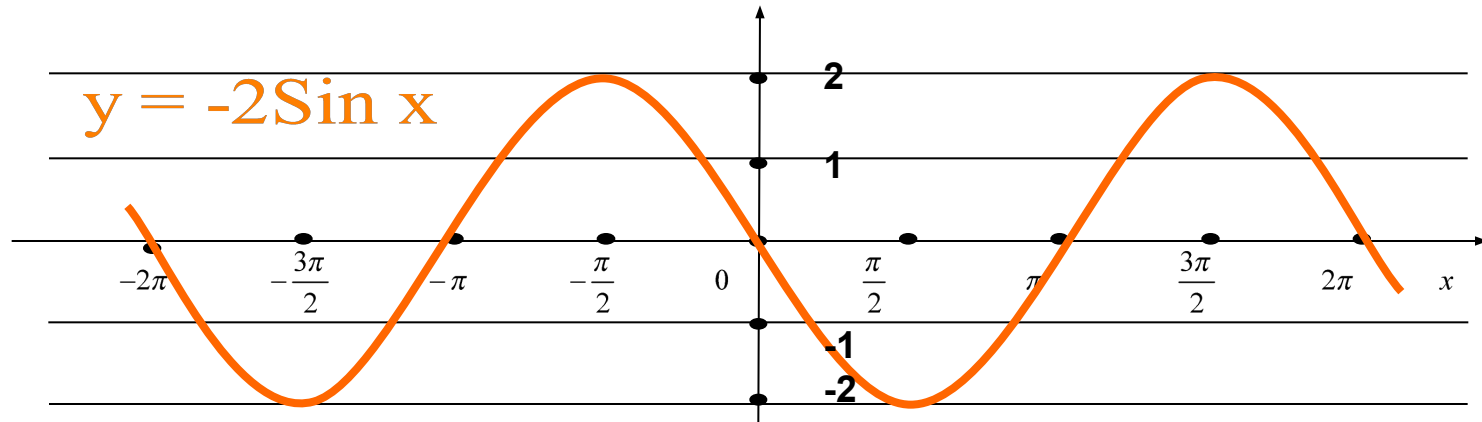
$$y = 2\sin x$$

3) Отообразим симметрично относительно оси Ox , получим график функции

$$y = -2\sin x$$

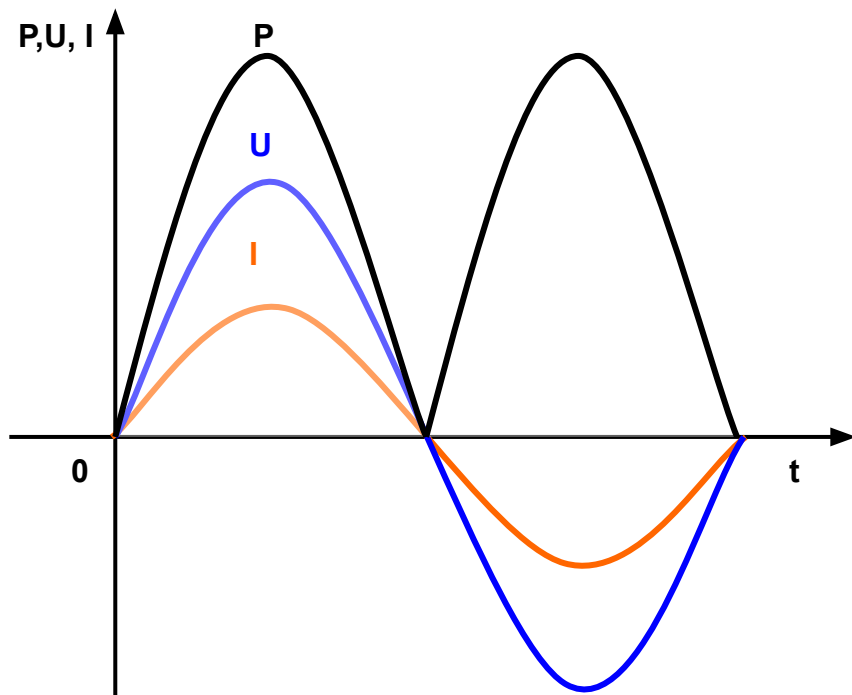
Свойства функции

$$y = -2\sin x$$



- 1) Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) Область значений: $y \in [-2; 2]$
- 3) Нечетная, непрерывная, периодическая, $T = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 4) Нули в точках $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- 5) Положительна при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
отрицательна при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
- 6) Возрастает при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
Убывает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
- 7) Имеет максимумы, равные **2**, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Имеет минимумы, равные **-2**, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Графики напряжения и тока в цепи переменного тока



Конец урока