Тригонометрические функции

$y = \sin x$, $y = \cos x$,

$y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$,

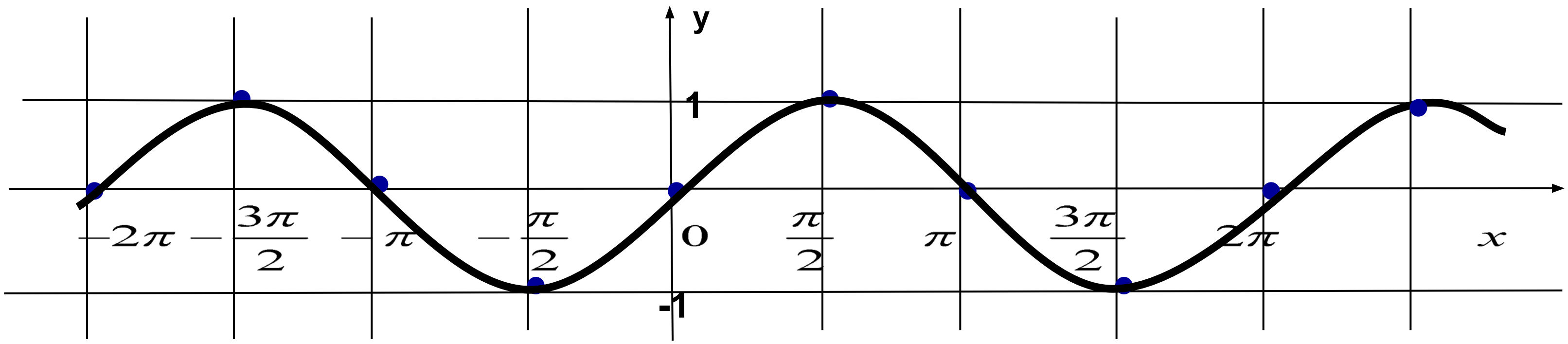
их свойства и графики

Повторение. Схема исследования функции

При исследовании функции находят:

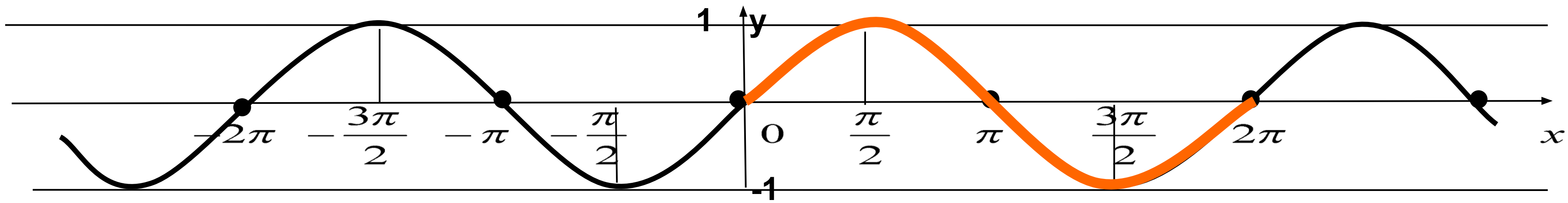
1) Область определения
 Область значений
2) Четность, периодичность, непрерывность
3) Нули функции
4) Промежутки знакопостоянства
5) Промежутки возрастания, убывания
6) Экстремумы

Функция y=Sinx, ее свойства и график



X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
y=Sinx	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0

Свойства синуса



1) Область определения .... $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Область значений .... $y \in [-1; 1]$

3) Функция нечетная, непрерывная, периодическая $(T = 2\pi n, n \in Z)$

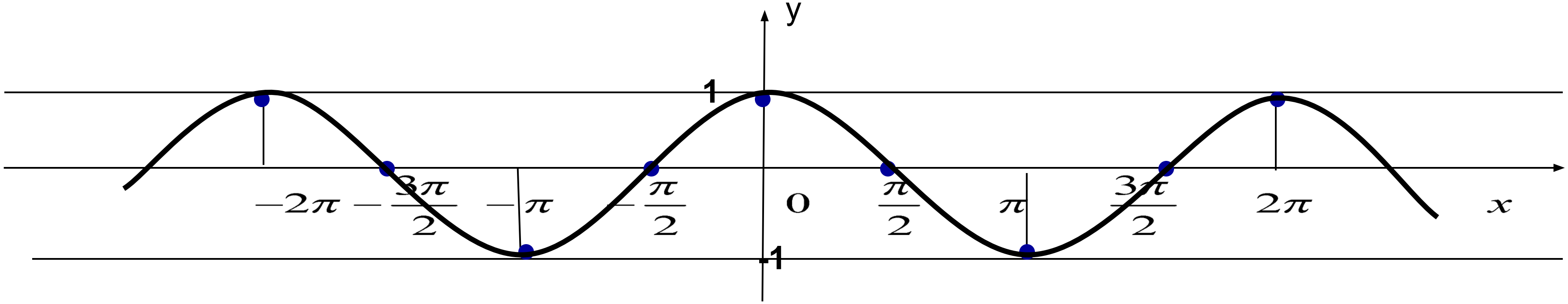
4) Нули функции в точках $x = \pi n,\ n \in Z$

5) $\begin{cases} а) \text{ Функция положительна при } x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\ n \in Z \\ б) \text{ Функция отрицательна при } x \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n),\ n \in Z \end{cases}$

6) $\begin{cases} а) \text{ Функция возрастает при } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z \\ б) \text{ Функция убывает при } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z \end{cases}$

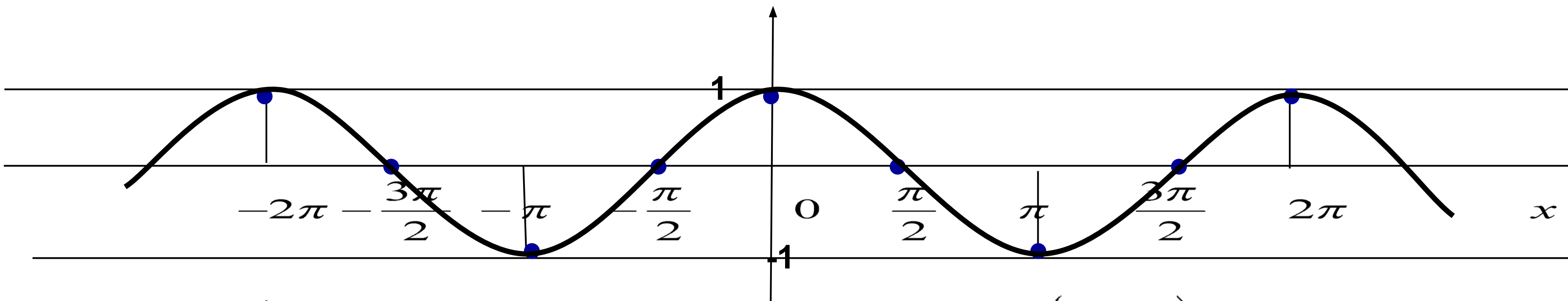
7) $\begin{cases} а) \text{ Функция имеет максимумы, равные 1, при x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \\ б) \text{ Функция имеет минимумы, равные } -1 \text{, при x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$

Функция y=Cos$x$, ее свойства и график



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
y	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

Свойства косинуса



1) Область определения .... $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Область значений .... $y \in [-1; 1]$

3) Функция четная, непрерывная, периодическая $(T = 2\pi n, n \in Z)$

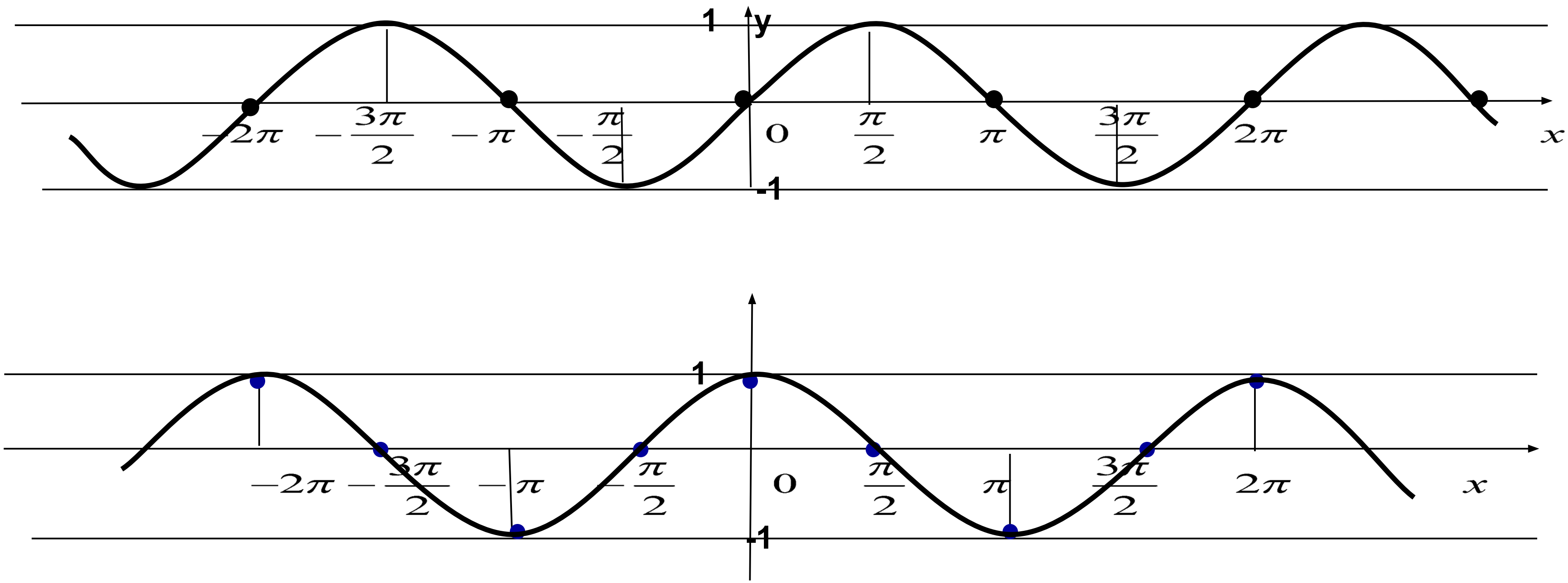
4) Нули функции в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

5) $\begin{cases} a) \text{ Функция положительна при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z \\ б) \text{ Функция отрицательна при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z \end{cases}$

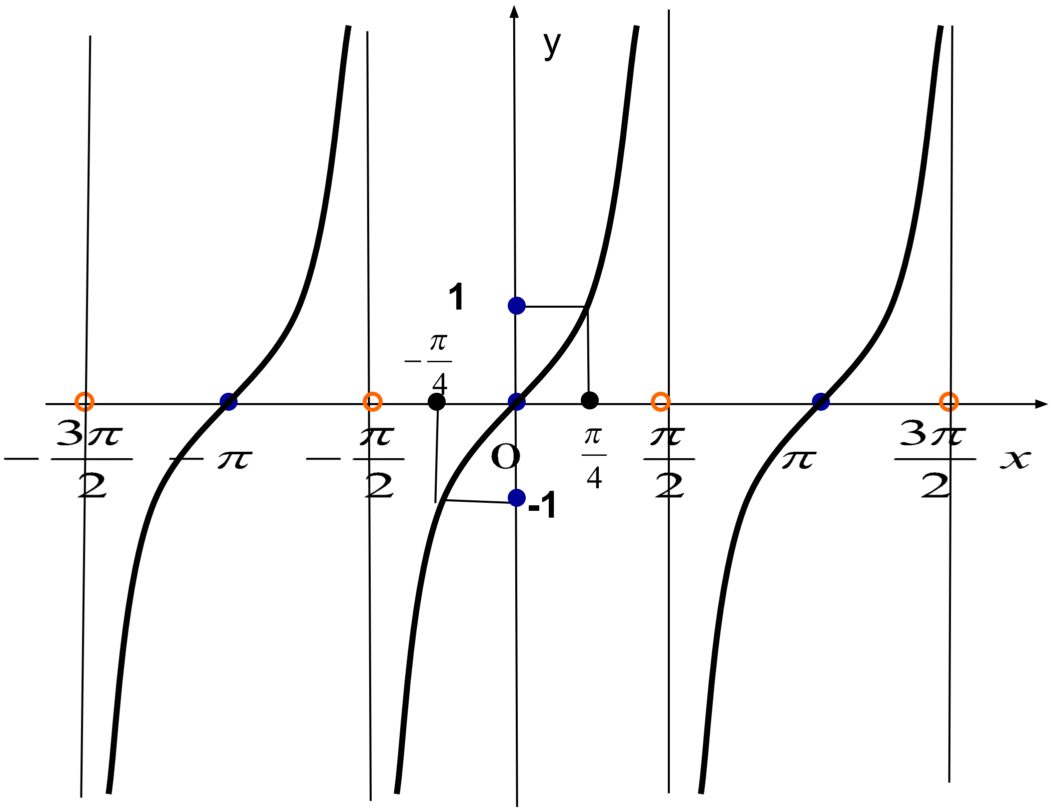
6) $\begin{cases} a) \text{ Функция возрастает при } x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n], n \in Z \\ б) \text{ Функция убывает при } x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z \end{cases}$

7) $\begin{cases} \text{а) Функция имеет максимумы, равные 1, при x} = 2\pi n, n \in Z; \\ \text{б) Функция имеет минимумы, равные } -1, \text{ при x} = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$

Сравните графики синуса и косинуса

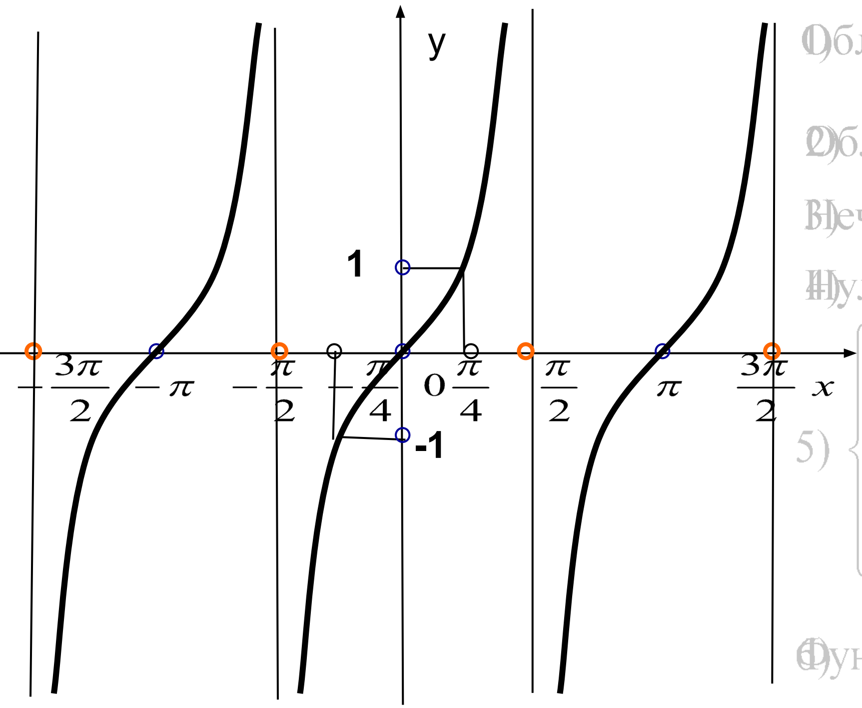


Функция $y = tg\, x$, ее свойства и график



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
y	0	1	$-$	0	-1	$-$	0

Свойства тангенса



1) Область определения $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$

2) Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$

3) Нечетная, периодическая $(T=\pi n), n \in Z$

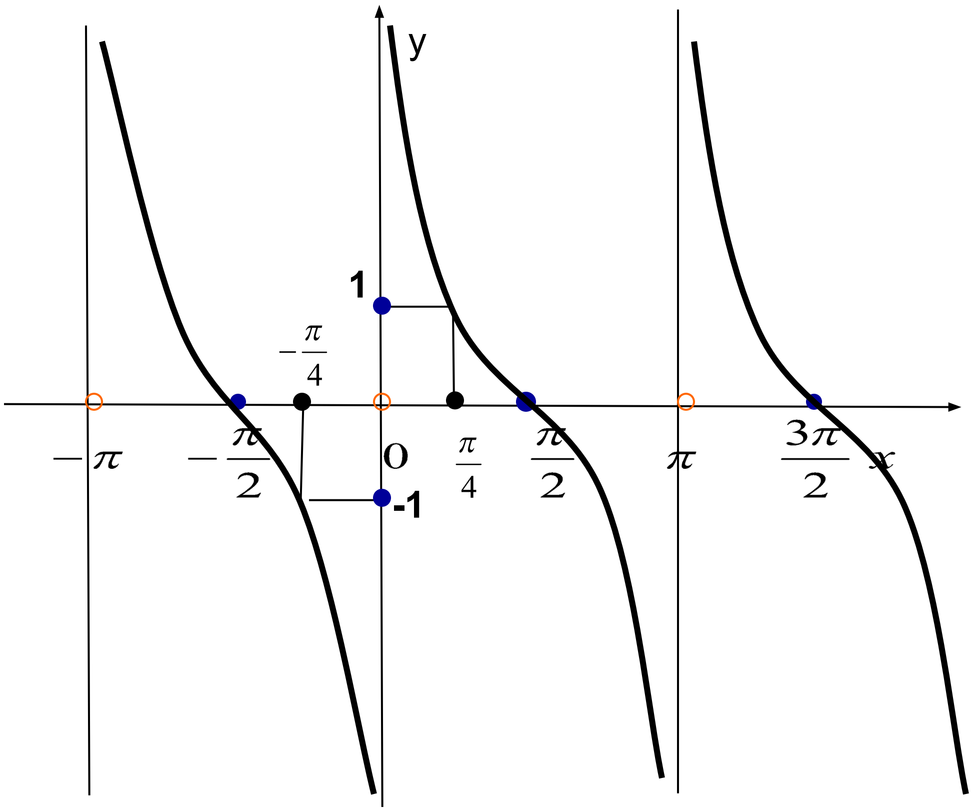
4) Нули функции в точках $x = \pi n, n \in Z$

5) $\begin{cases} \text{Функция положительна при } x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z \\ \text{Функция отрицательна при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right), n \in Z \end{cases}$

6) Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$

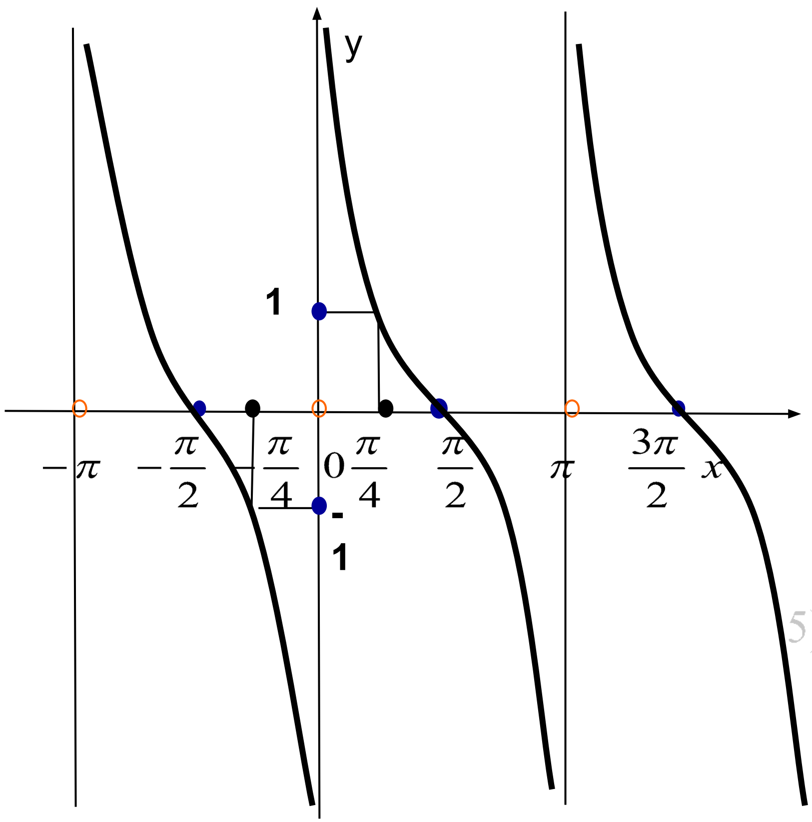
7) Экстремумов не имеет

Функция $y = Ctg\,x$, ее свойства и график



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
y	$-$	1	0	$-$	-1	0	$-$

Свойства котангенса



1) Область определения $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$

2) Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$

3) Нечетная, периодическая $(T = \pi n), n \in Z$

4) Нули функции в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

5) Функция положительна при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$

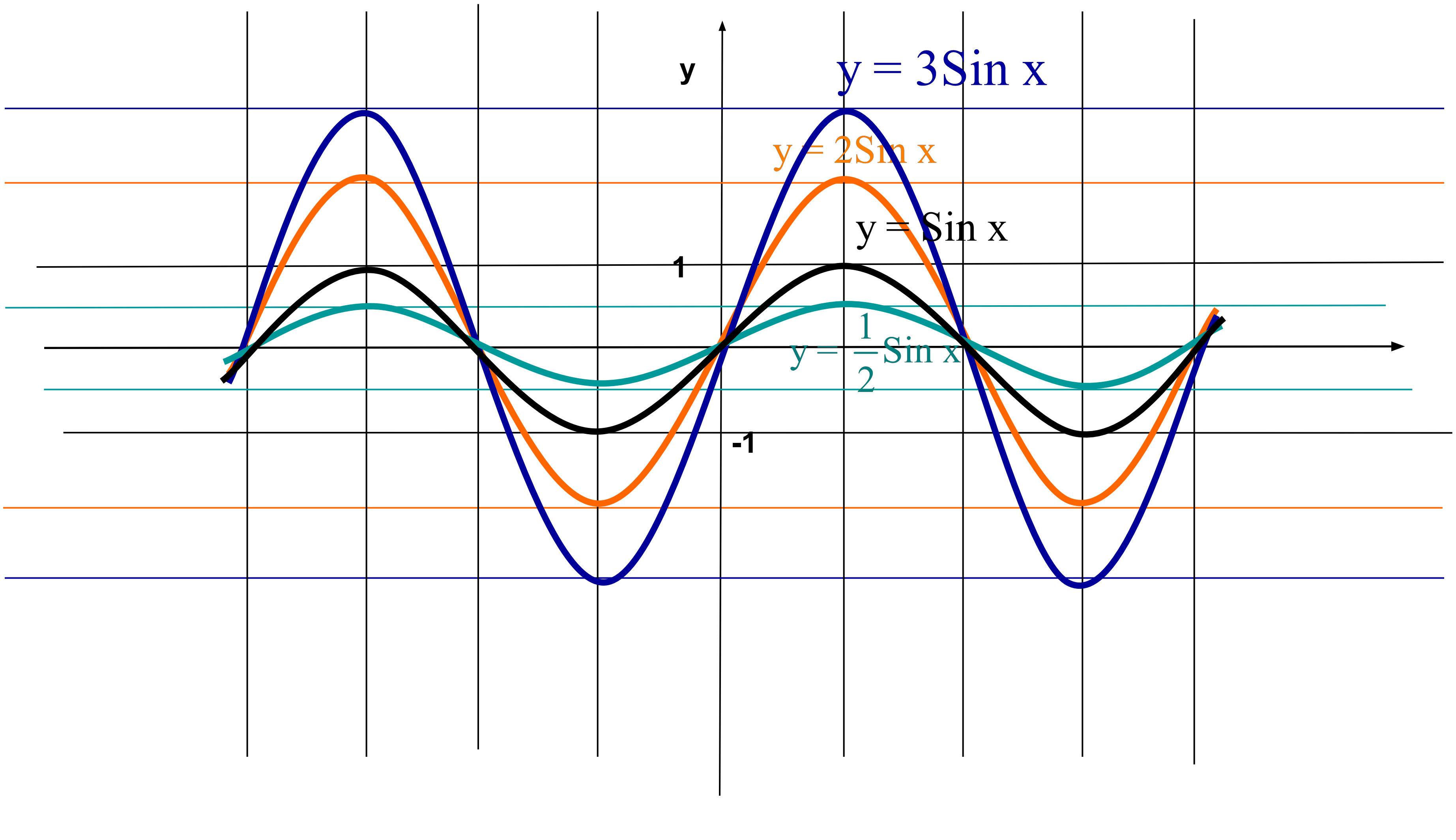
Функция отрицательна при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in Z$

6) Функция убывает при $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$

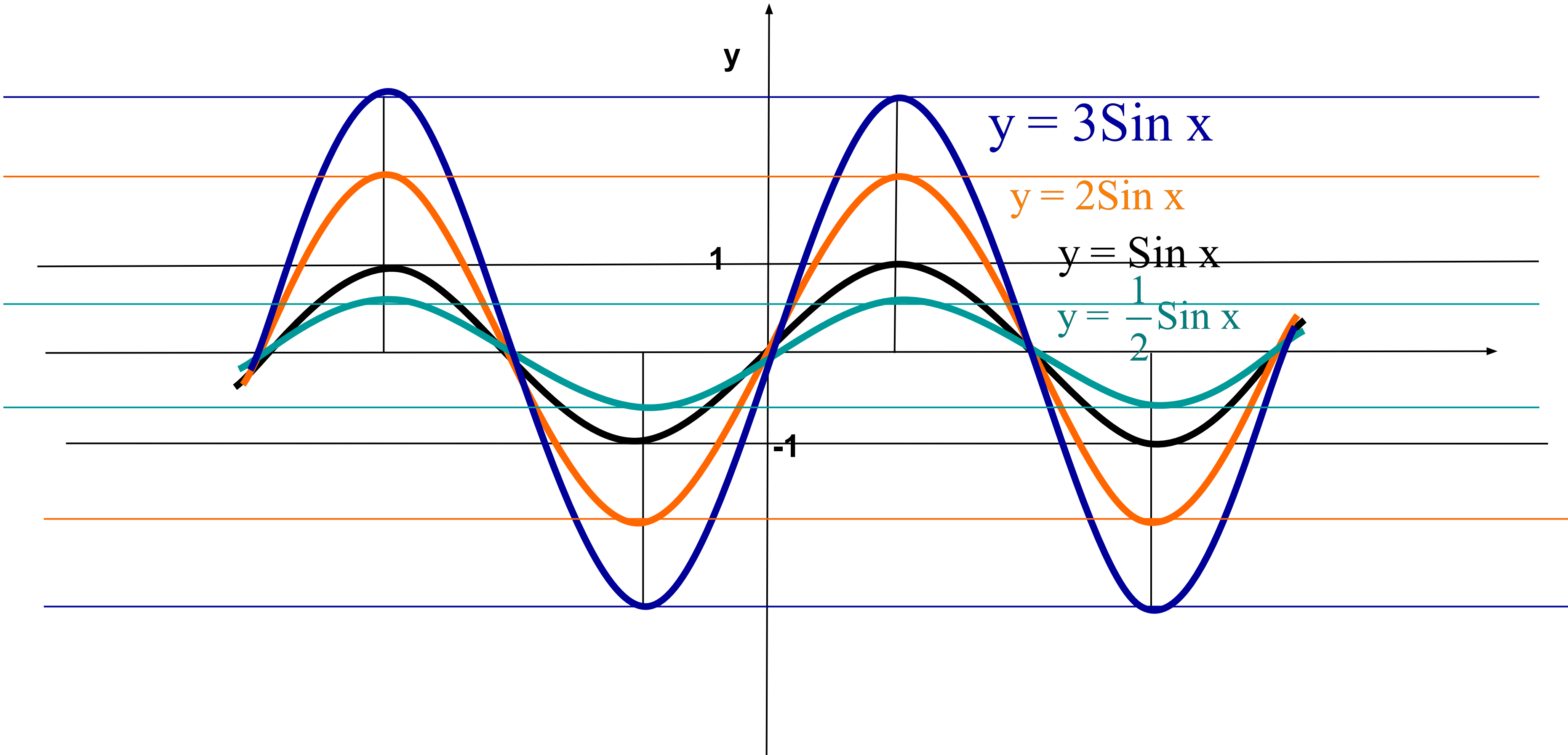
7) Экстремумов не имеет

Преобразования графиков тригонометрических функций

Сжатие и растяжение вдоль оси Оу.

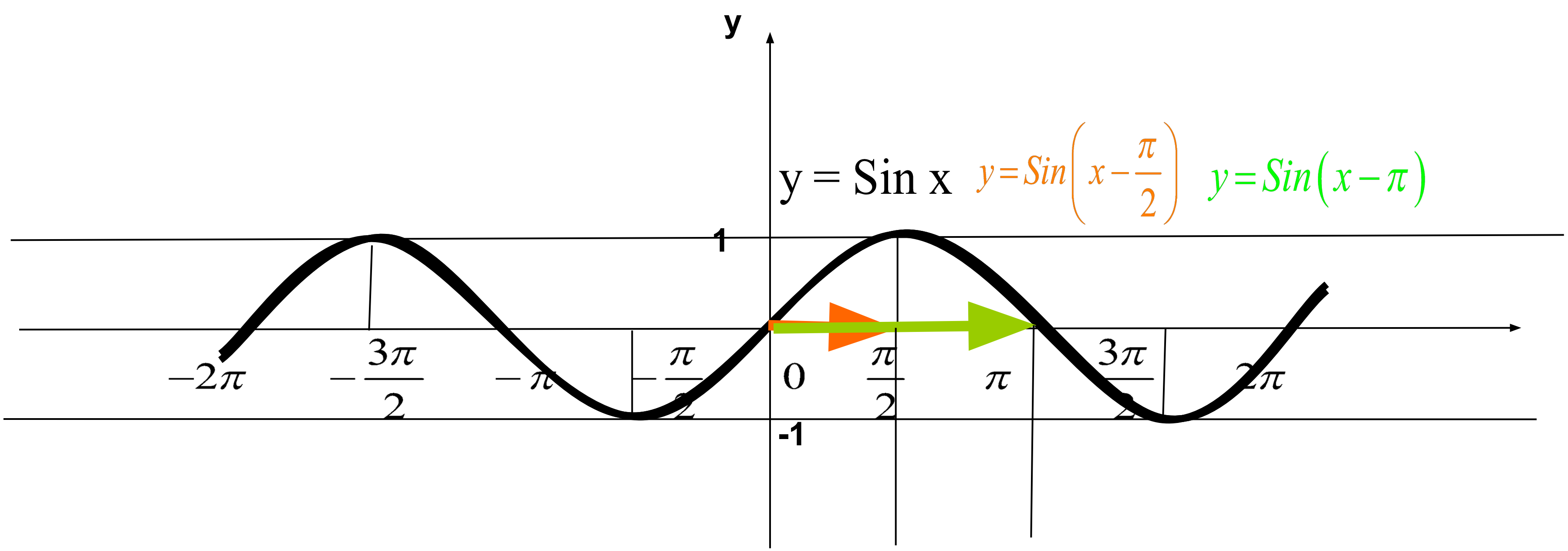


Вывод

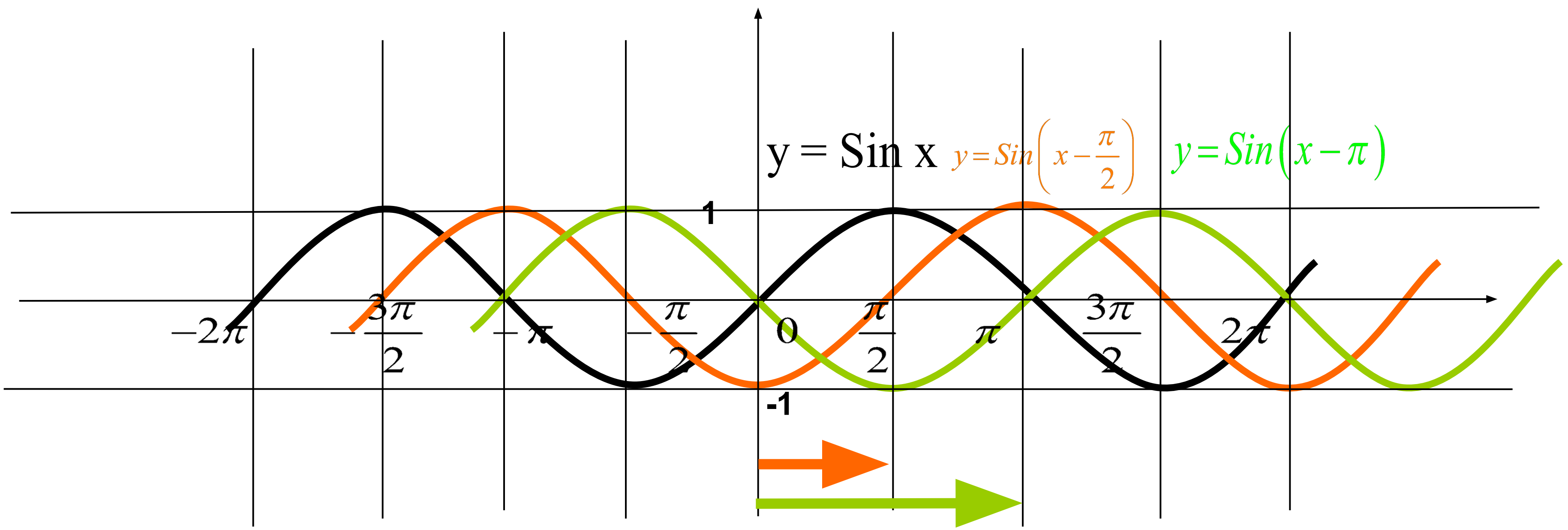


Чтобы построить график функции y = A Sinx, надо …

Сдвиг вдоль оси Ох.

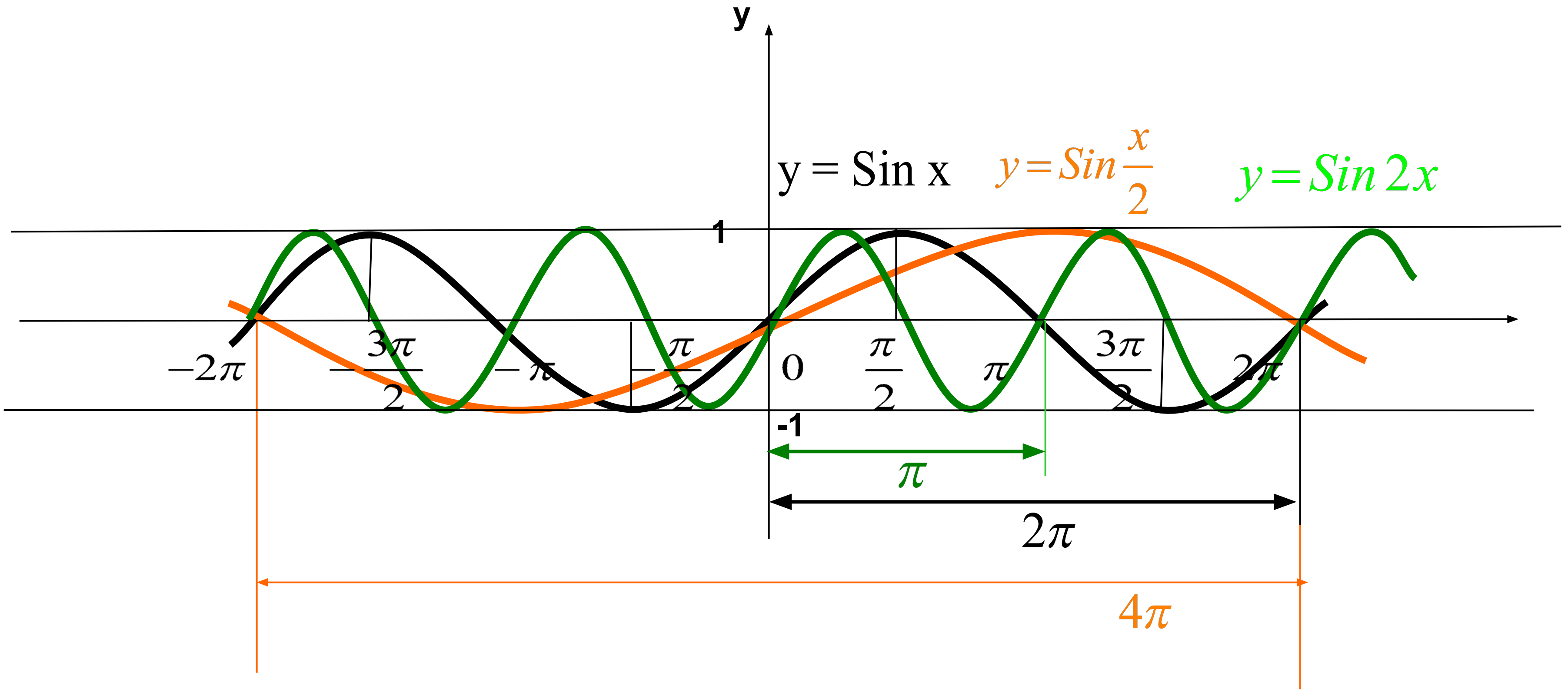


Вывод

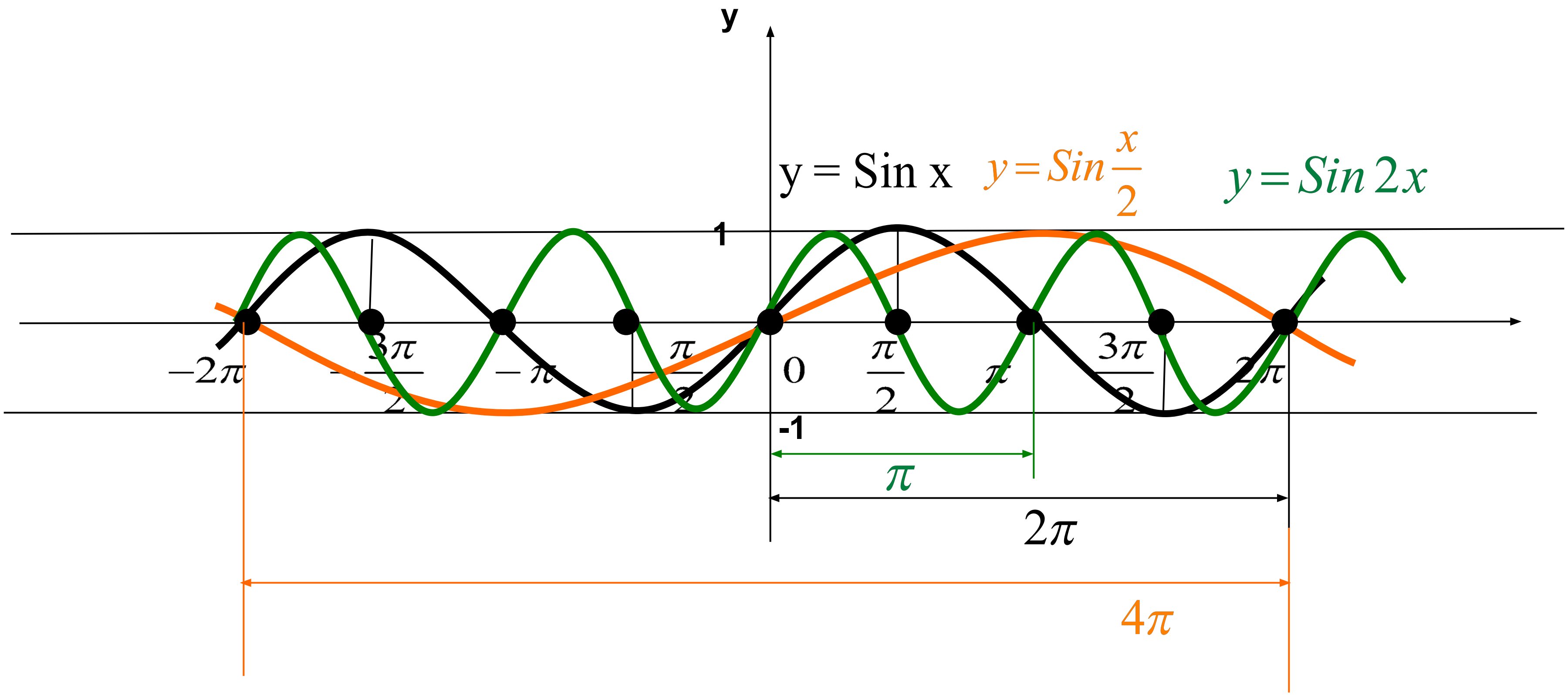


Чтобы построить график функции y = Sin(x + a), надо …

Сжатие и растяжение вдоль оси Ох.

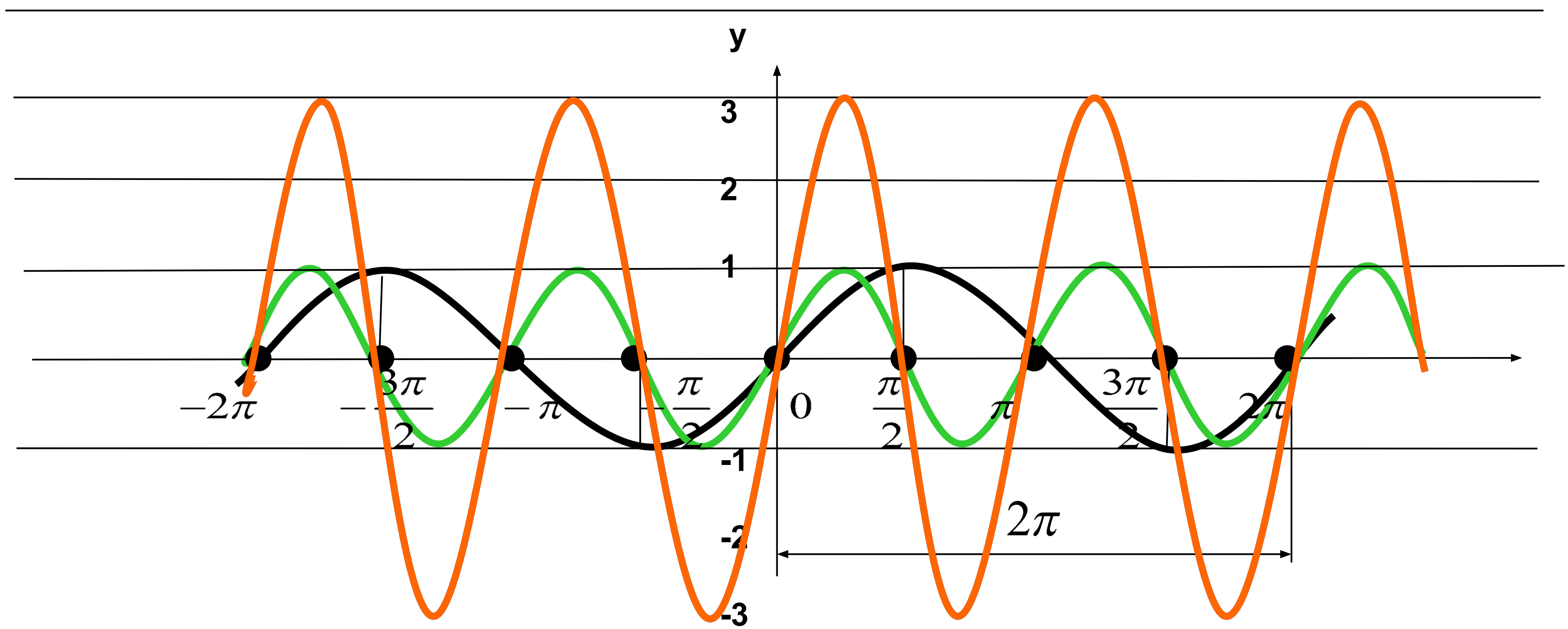


Вывод:



Чтобы построить график функции y = Sin(в x), надо …

Пример построения графика функции $y = 3Sin2x + 1$



Построение:

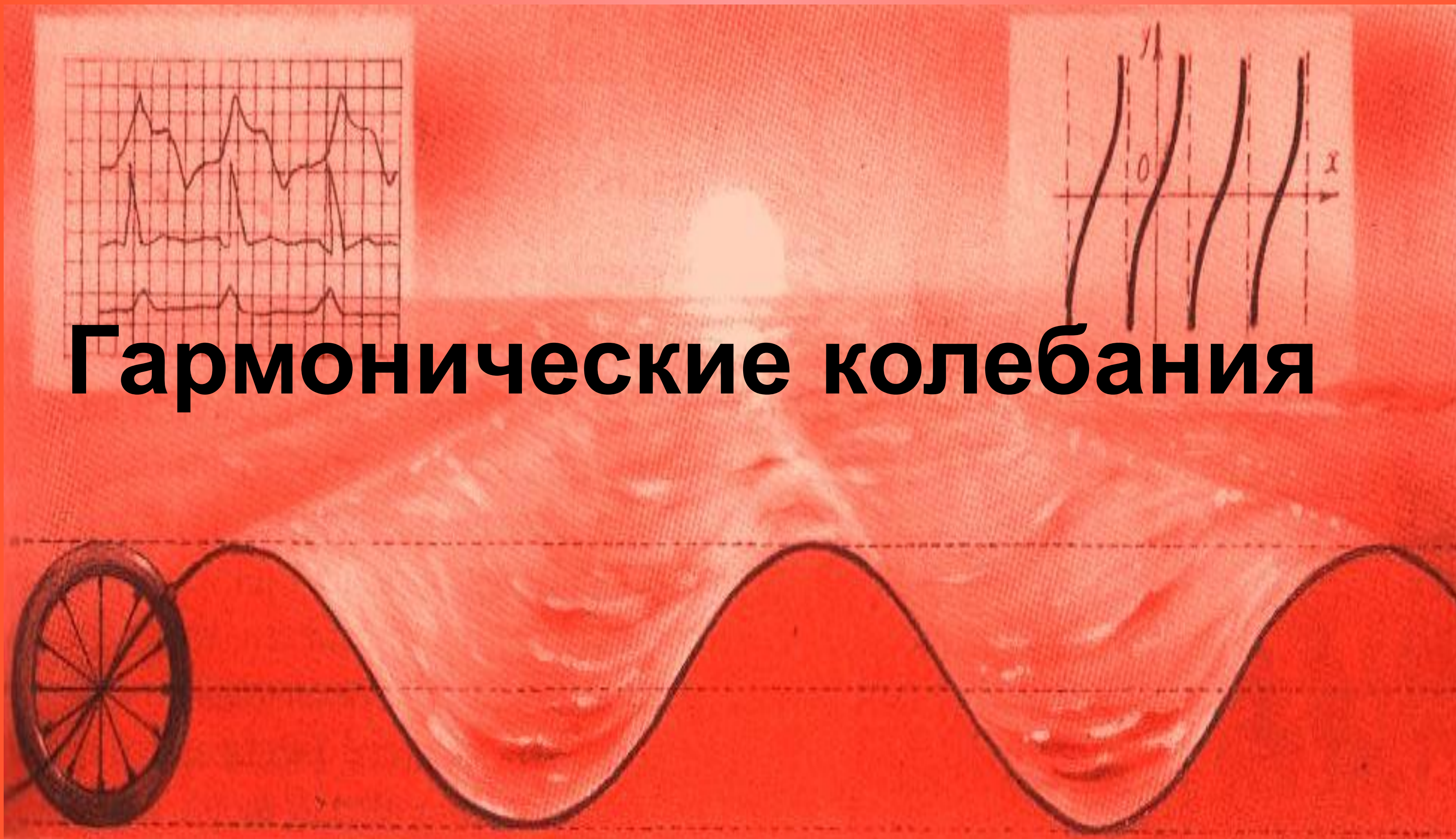
1) $y = \mathrm{Sin}\ x$

2) $y = Sin2x$

3) $y = 3Sin2x$

4) $y = 3Sin2x + 1$

Гармонические колебания



Величины, изменяющиеся по закону

$$\boxed{f(t) = ASin(\omega t + \varphi)}$$

играют важную роль.

Эту формулу называют уравнением гармонического колебания.

A – амплитуда колебания;

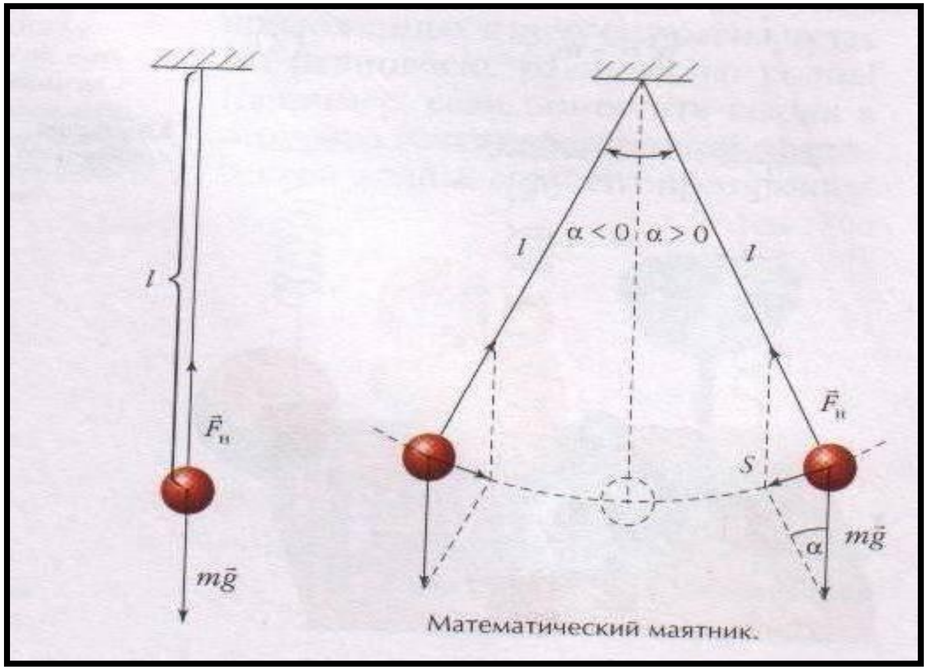
ω - угловая частота колебания;

φ - начальная фаза колебания;

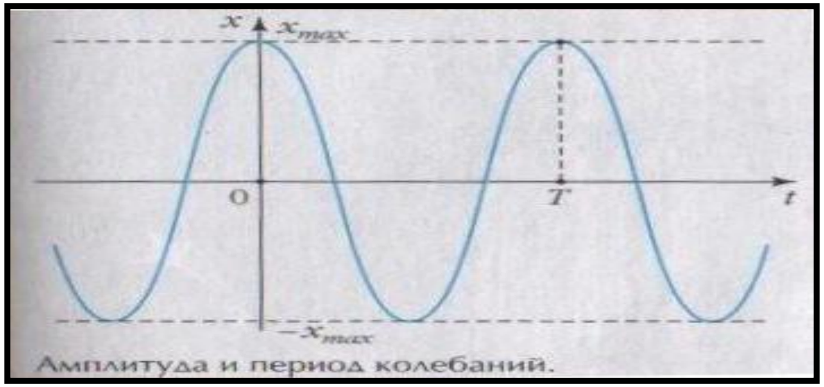
t – время

Механические колебания

Если отклонить и отпустить математический маятник, то в идеальных условиях он начнет совершать колебания, подчиняющиеся гармоническому закону.

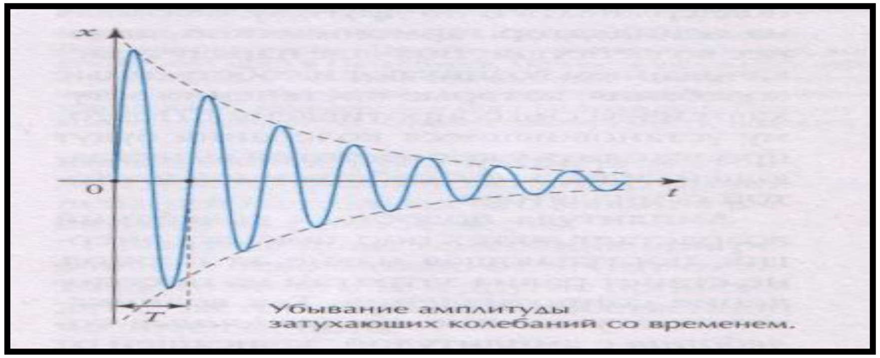


Математический маятник.



Амплитуда и период колебаний.

Работа сил сопротивления приводит к затуханию свободных колебаний.



Убывание амплитуды затухающих колебаний со временем.

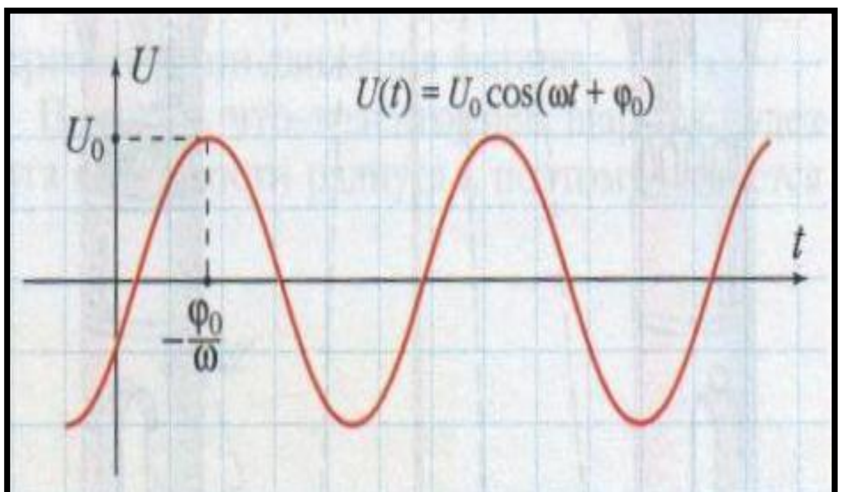
Колебания переменного тока

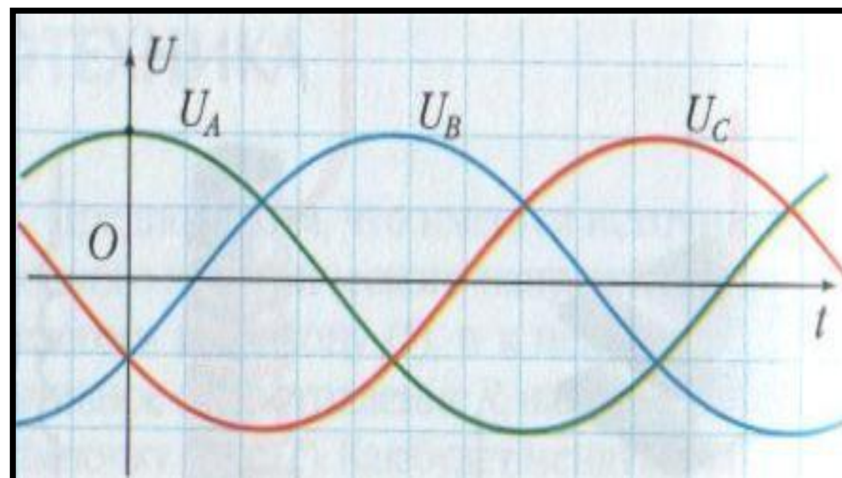
Гармонические колебания имеют огромное практическое значение. Переменный ток – один из видов таких колебаний. Переменное напряжение создается генератором переменного тока. Напряжение и ток в цепи изменяются по законам

$$\boxed{U(t) = U_0 Cos(\omega t + \varphi)} \qquad \boxed{I(t) = I_0 Cos(\omega t + \varphi)}$$

т.е. по законам гармонических колебаний.

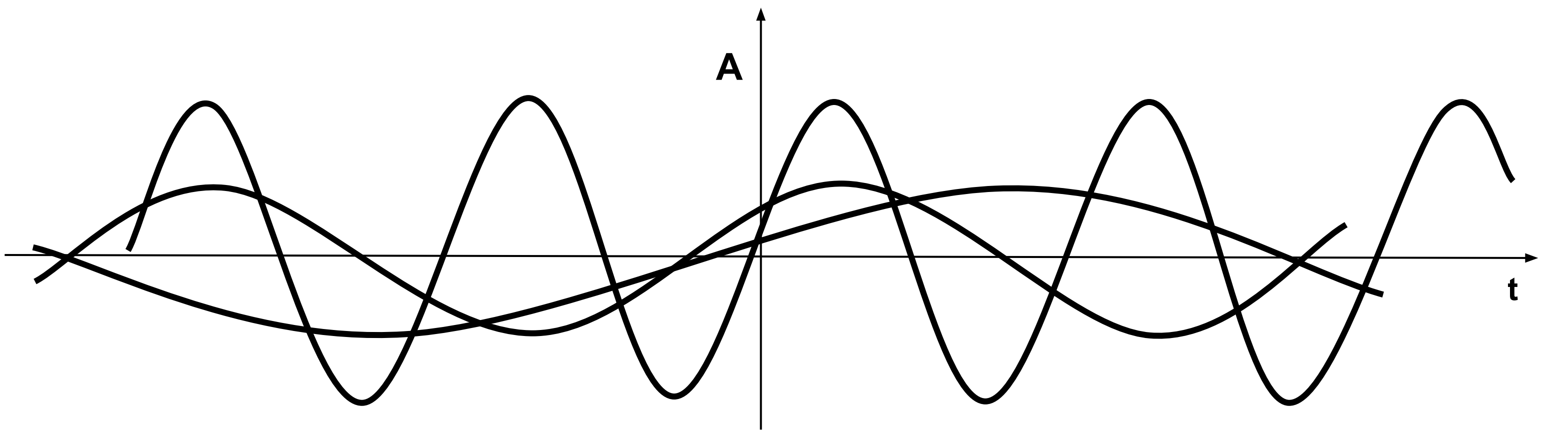
На рисунках показаны графики напряжений однофазного и трехфазного токов.





Музыкальные звуки

Звуки делятся на музыкальные и шумы. К первым относятся пение, звучание струны и т.д. Музыкальные звуки издают гармонически колеблющиеся тела (камертон, струна и др.).

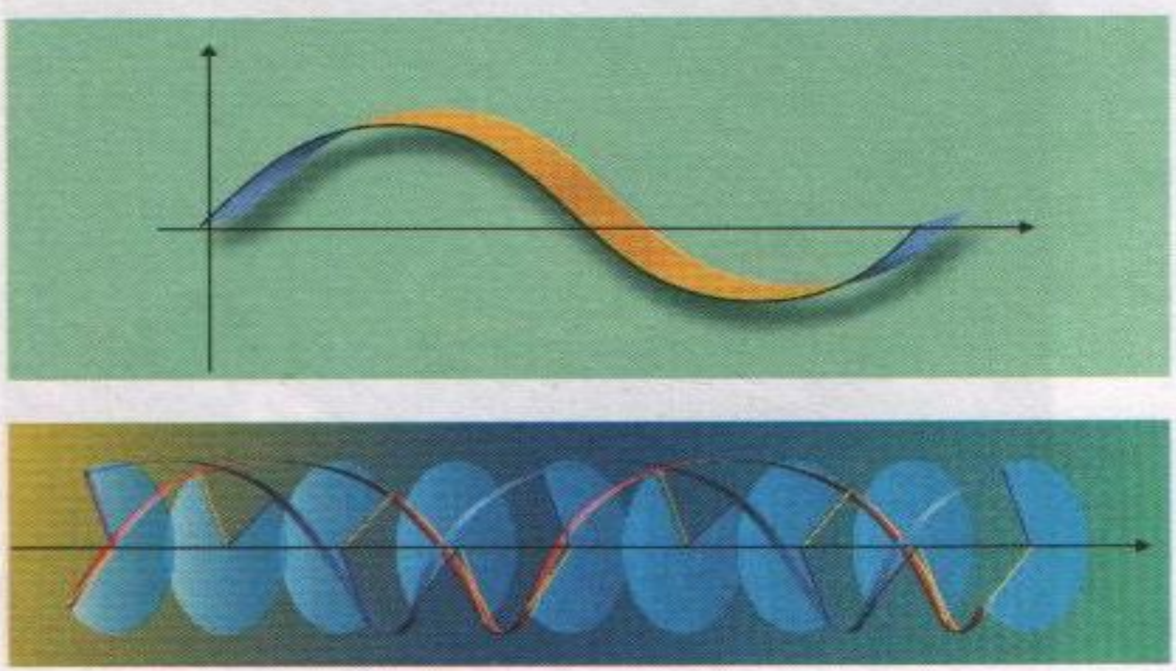


Шумы возникают при работе двигателей, скрипе, шипении змеи и т. п.

Амплитуда звукового колебания – это громкость звука, частота колебания – высота тона. Чем больше амплитуда, тем громче звук, чем больше частота, тем выше тон.

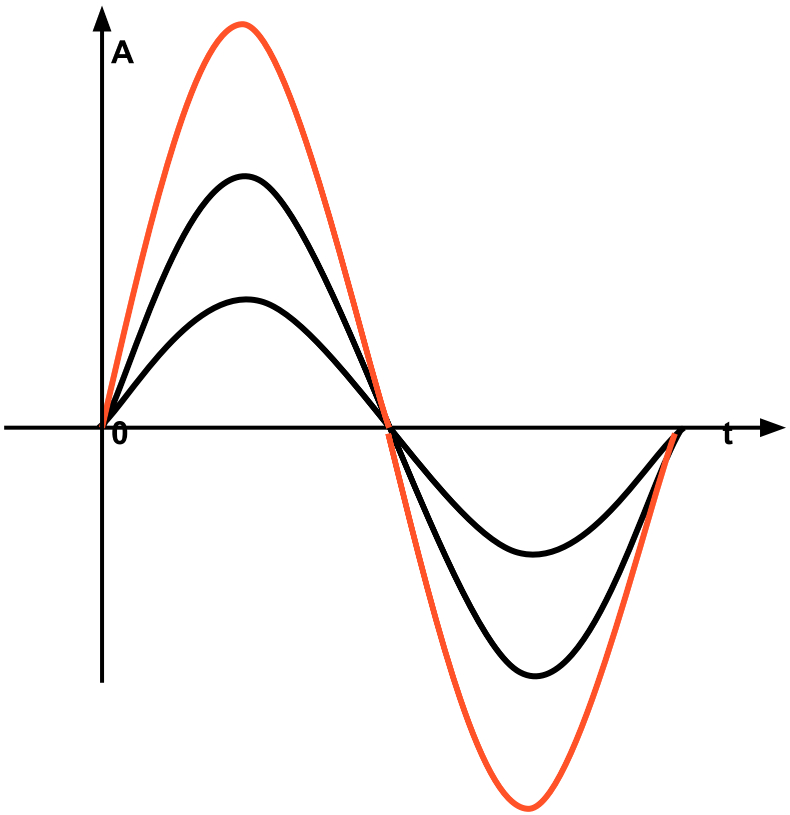
Световые волны

В отличие от звуковых, световые волны поперечны. Колебания в них происходят по всем направлениям, перпендикулярным направлению распространения волны. На рисунке показан график поляризованного света, который получают при пропускании света через кристалл турмалина, способного пропускать световые волны с колебаниями в одной плоскости.



Линейная
и круговая
поляризация света.

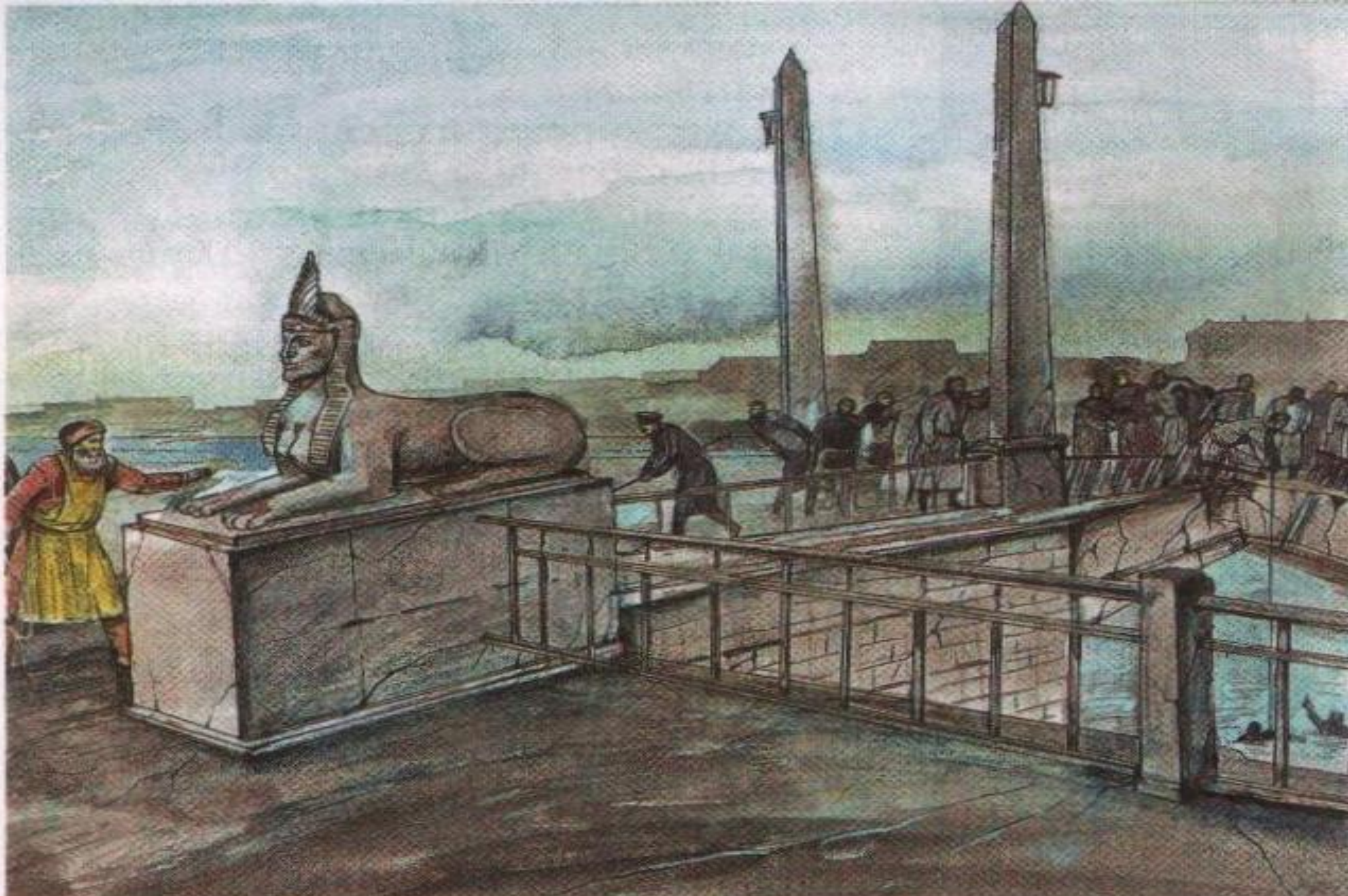
Сложение колебаний, резонанс



Резонанс наблюдается в том случае, когда собственная частота системы совпадает с изменением внешней силы. Амплитуда колебания при этом резко увеличивается.

Резонанс может возникнуть и в электрической цепи, когда активное сопротивление мало.

Это может привести к перегреву провода или пробою изоляции.



Иногда рост амплитуды ведёт к разрушению системы, и резонанс представляет большую опасность. Известен исторический пример, когда в XIX в. обрушился Египетский мост в Петербурге. По мосту шёл в ногу отряд кавалергардов. Ритм их строевого шага случайно совпал с собственной частотой сооружения, амплитуда вынужденных колебаний стала резко возрастать, смещения превысили расчётную критическую величину — и мост не выдержал. Поэтому теперь, когда солдатская колонна проходит по «сомнительному» мосту, подаётся команда идти не в ногу.

Колебания окружают нас со всех сторон, от них не спрятаться и не убежать. Дрожат стены зданий, колеблется воздух, полный звуков, волнуются моря и озера. Колебания – это универсальные процессы природы!

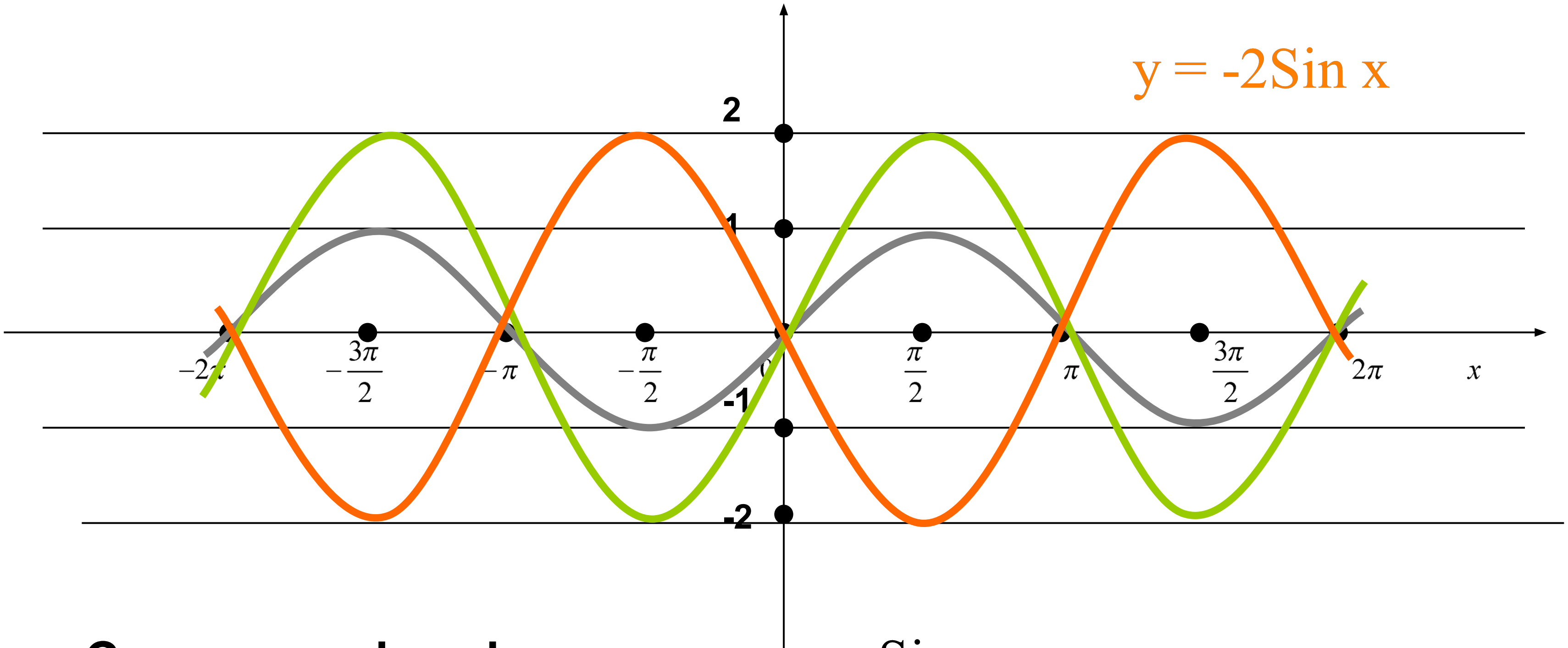
Задание на дом

1) Яковлев Г.Н. «Алгебра и начала анализа» §26
2) Постройте график функции $y = 2Cos\frac{x}{2} - 1$
3) Сформулируйте свойства этой функции

Пробная работа

Постройте график функции $y = -2\sin x$ и сформулируйте ее свойства

Проверка

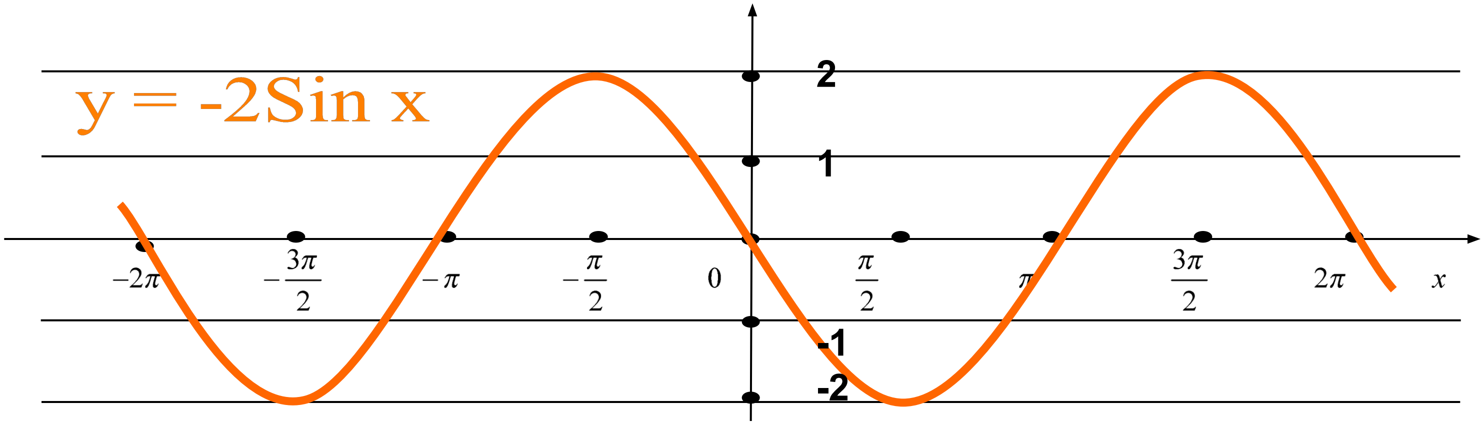


1) **Строим график функции** $y = \sin x$

2) **Умножим все значения у на 2, получим график функции** $y = 2\sin x$

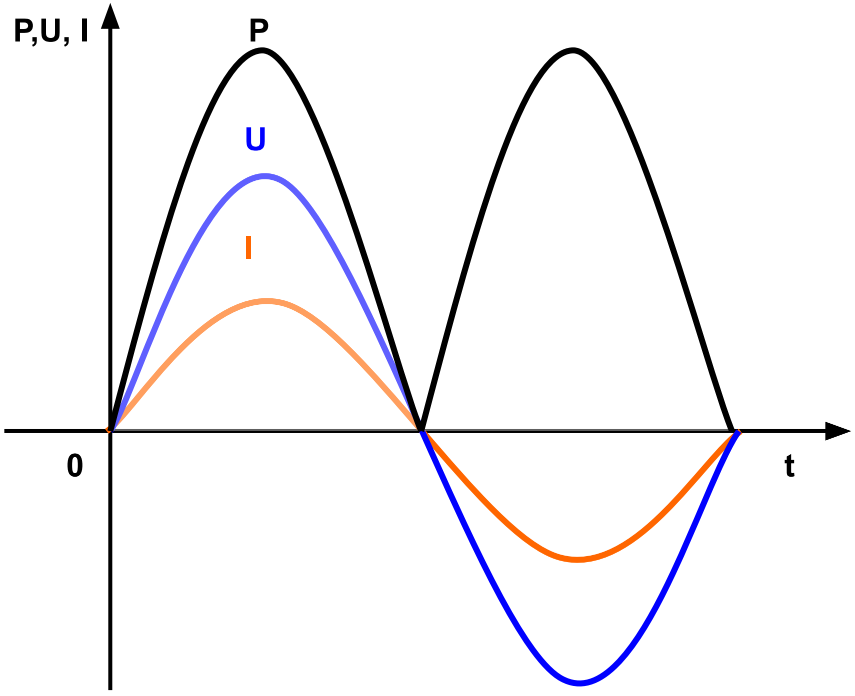
3) **Отобразим симметрично относительно оси Ох, получим график функции** $y = -2\sin x$

Свойства функции $y = -2\sin x$



1) **Область определения:** $x \in (-\infty; +\infty)$
2) **Область значений:** $y \in [-2; 2]$
3) **Нечетная, непрерывная, периодическая,** $T = 2\pi n,\ n \in Z$
4) **Нули в точках** $x = \pi n, n \in Z$
5) **Положительна при** $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in Z$
   отрицательна при $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n), n \in Z$
6) **Возрастает при** $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$
   Убывает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$
7) **Имеет максимумы, равные 2, при** $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
   Имеет минимумы, равные -2, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Графики напряжения и тока в цепи переменного тока



Конец урока