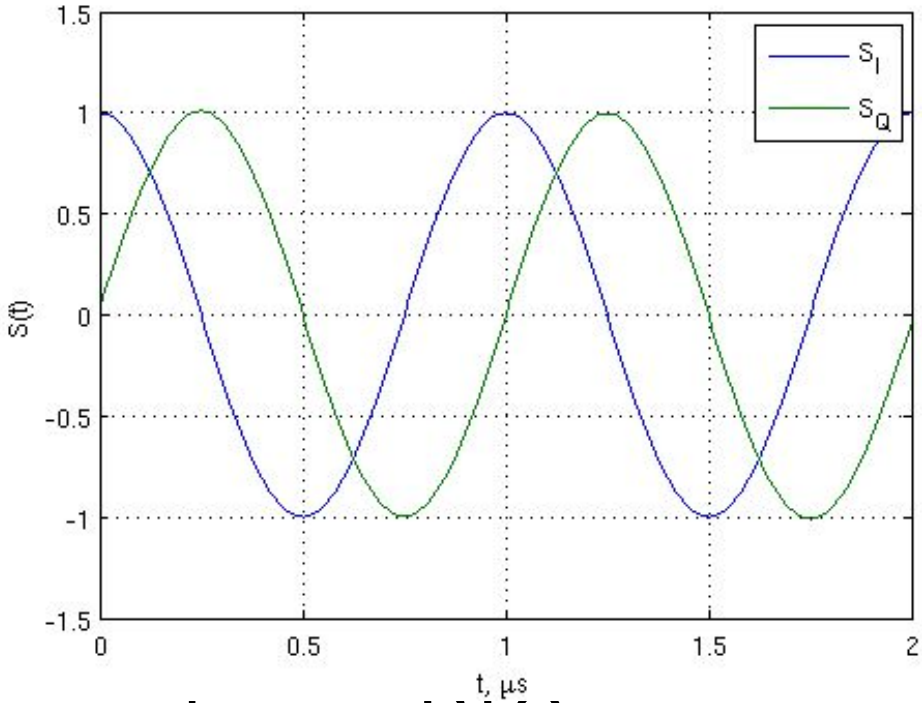
Кафедра Радиотехнических систем (РТС)

Математическое моделирование РТУ и С

Лекция 12. Метод комплексных амплитуд при моделировании радиос



Преподаватель:
к.т.н. старший преподаватель кафедры РТС
Захарова Елена Владимировна

Литература

Борисов Ю.П., Цветнов В.В. Математическое моделирование радиотехнических систем и устройств. - М.: Радио и связь, 1985. 176 с.

Глава 5. Метод комплексной огибающей

Амплитуда и фаза

Что есть амплитуда и фаза сигнала?

Со школьной скамьи эти понятия неразрывно связаны с гармоническим колебанием:

$$y(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

A – **амплитуда**

φ – **начальная фаза**

$\omega_0 t + \varphi$ – **полная фаза**

$$N = 2\left[T_н / T - 1\right]$$

Эти понятия мы распространили на описание сигналов:

$$y(t) = Ah(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)$$

A – **«амплитуда»**

$h(t)$ – **«амплитудный множитель», «огибающая»**

$\varphi(t)$ – **«фаза»**

$\omega_0 t + \varphi(t)$ – **полная фаза**

Преобразование Гильберта

А как быть с произвольным вещественным сигналом $S_I(t)$ **?**

Ему можно сопоставить комплексный аналитический сигнал

$$S_a(t) = S_I(t) + jS_Q(t)$$

с помощью преобразования Гильберта:

$$S_Q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_I(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

Преобразование Гильберта – ответ на вопрос:

$$S_Q(t) - ? \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} S_I(t) S_Q(t) dt = 0,$$

тогда ИХ фильтра, формирующего ортогональный сигнал

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$ **– ядро преобразования Гильберта**

Преобразование Гильберта

Найдем АЧХ / ФЧХ этого фильтра:

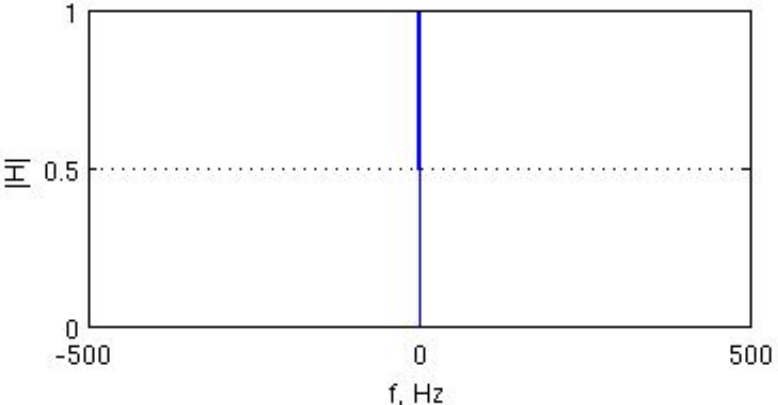
$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi t}\exp(-j\omega t)\,dt=$$

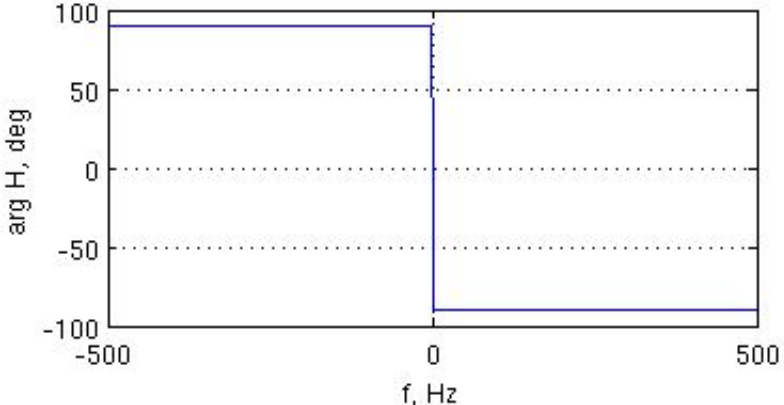
$$=\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega t)}{t}dt}_{0}-j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)}{t}dt=-j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)}{t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)}{t}dt=\pi\,sign(\omega)\rightarrow H(\omega)=-j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)}{t}dt=-j\cdot sign(\omega)=\ldots$$

$$\ldots=\begin{Bmatrix}-j\,при & \omega>0\\ 0\ \ при & \omega=0\\ j\,при & \omega<0\end{Bmatrix}$$

Частотная характеристика чисто мнимая





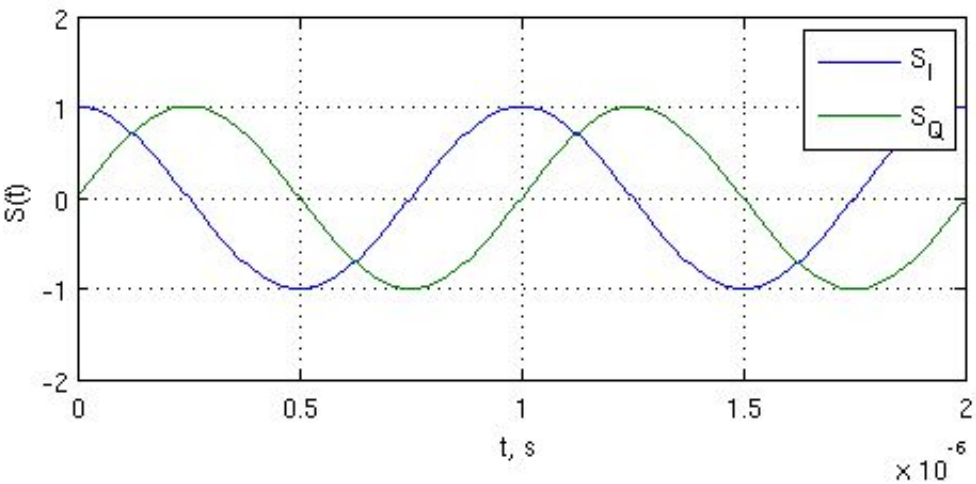
Преобразование Гильберта

$$S_Q(\omega) = H(\omega) S_I(\omega)$$

– **поворачивает фазу на 90 градусов**
– **устраняет постоянную составляющу**

```
Td = 1 / 100e6;
t = 0:Td:200*Td;
SI = cos(2*pi * 1e6 * t);
Sa = hilbert(SI);

figure(1);
plot(t, SI, t, imag(Sa))
xlabel('t, s'); ylabel('S(t)');
legend('S_I', 'S_Q'); grid on
```

```
>> imag(3 + 10*i)
ans =
    10
```



hilbert

Discrete-time analytic signal using Hilbert transform

Syntax

```
x = hilbert(xr)
x = hilbert(xr,n)
```

Description

`x = hilbert(xr)` returns a complex helical sequence, sometimes called the *analytic signal*, from a real data sequence. The analytic signal `x = xr + i*xi` has a real part, `xr`, which is the original data, and an imaginary part, `xi`, which contains the Hilbert transform. The imaginary part is a version of the original real sequence with a 90° phase shift. Sines are therefore transformed to cosines and vice versa. The Hilbert transformed series has the same amplitude and frequency content as the original real data and includes phase information that depends on the phase of the original data.

If `xr` is a matrix, `x = hilbert(xr)` operates columnwise on the matrix, finding the Hilbert transform of each column.

`x = hilbert(xr,n)` uses an `n` point FFT to compute the Hilbert transform. The input data `xr` is zero-padded or truncated to length `n`, as appropriate.

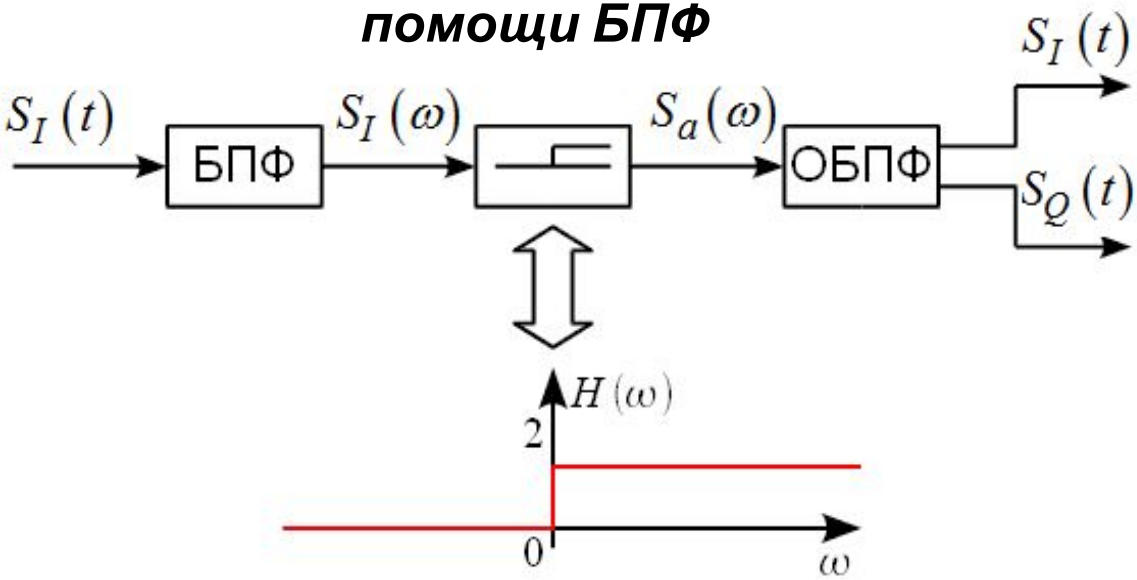
Аналитический сигнал (АС)

Какой спектр у аналитического сигнала?

$$S_a(t) = S_I(t) + jS_Q(t)$$

$$S_a(\omega) = S_I(\omega) + jH(\omega)S_I(\omega) = S_I(\omega)\left(1 + \operatorname{sign}(\omega)\right) = \begin{cases} 2S_I(\omega) & \omega > 0 \\ S_I(0) & \omega = 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

Расчет аналитического сигнала в цифровом виде при помощи БПФ



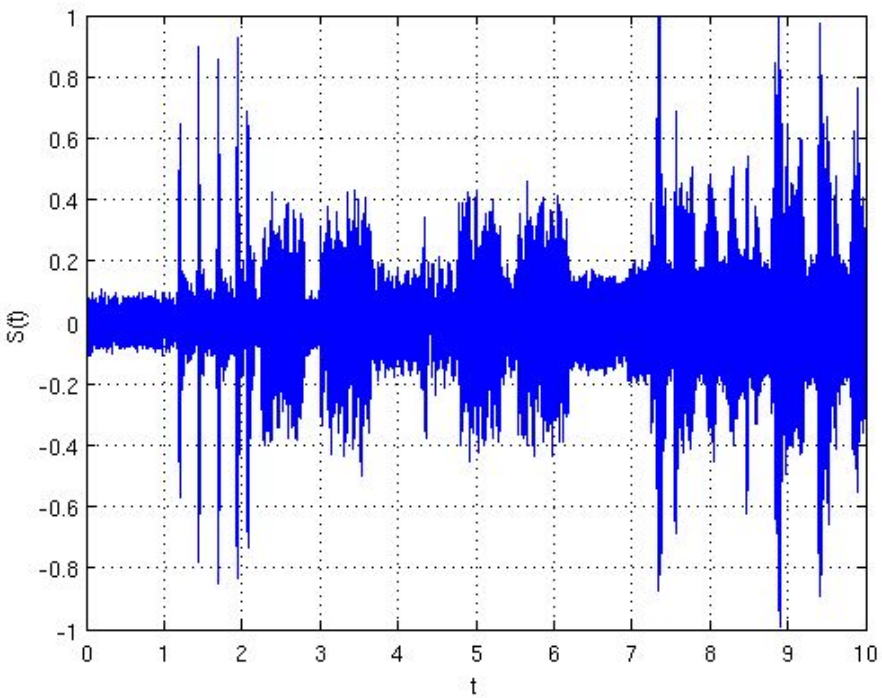
Аналитический сигнал (АС)

Какой спектр у аналитического сигнала?

$$S_a(t) = S_I(t) + jS_Q(t)$$

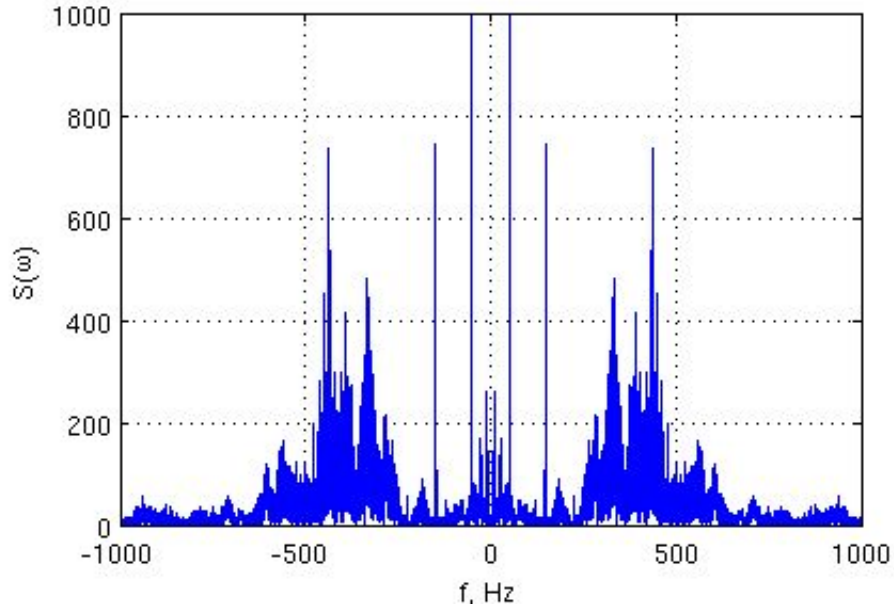
$$S_a(\omega) = S_I(\omega) + jH(\omega)S_I(\omega) = S_I(\omega)\left(1 + \operatorname{sign}(\omega)\right) = \begin{cases} 2S_I(\omega) & \omega > 0 \\ S_I(0) & \omega = 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

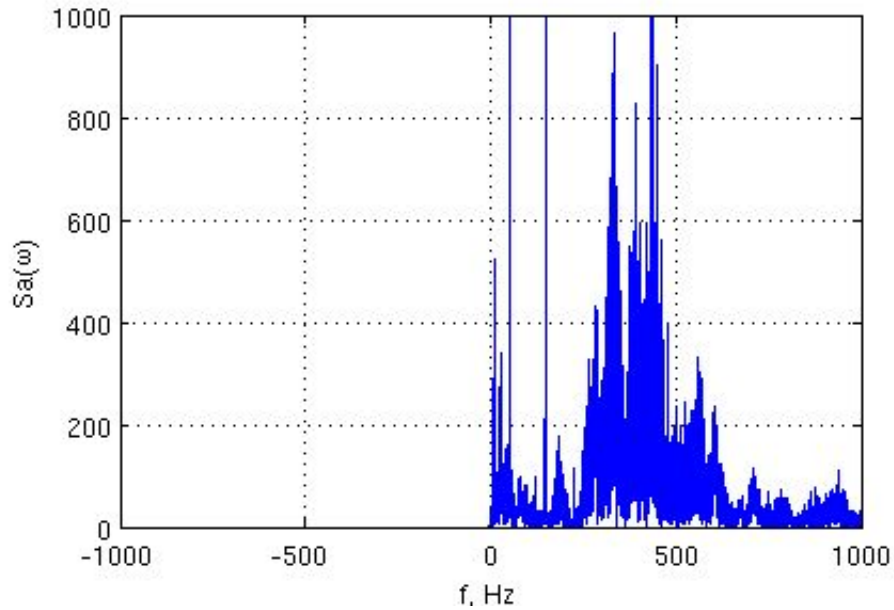
```
clear all; close all; clc;

recObj = audiorecorder;
disp('Start speaking.')
recordblocking(recObj, 10);
disp('End of Recording.');
S = getaudiodata(recObj);

save('S.mat', 'S');

>>recObj =

  Properties:
        SampleRate: 8000
     BitsPerSample: 8
   NumberOfChannels: 1
```



Спектр АС

```
clear all; close all; clc;

Fd = 8e3;
load S.mat;
t = (0:length(S)-1)*1/Fd;

figure(2);
f = (0:1/max(t):Fd) …
      - fix(length(S)/2) / max(t);
plot(f, abs(fftshift(fft(S))));
xlabel('f, Hz'); ylabel('S(\omega)');
xlim([-1000 1000]); ylim([0 1000]);
grid on

Sa = hilbert(S);
figure(3);
plot(f, abs(fftshift(fft(Sa))));
xlabel('f, Hz'); ylabel('Sa(\omega)');
xlim([-1000 1000]); ylim([0 1000]);
grid on
```

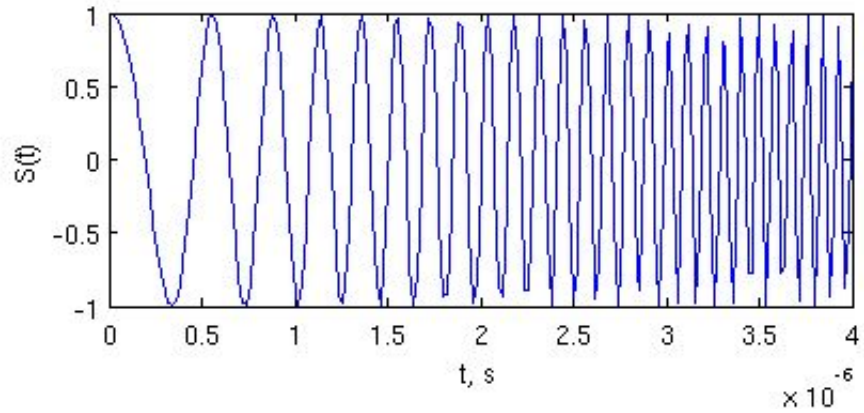


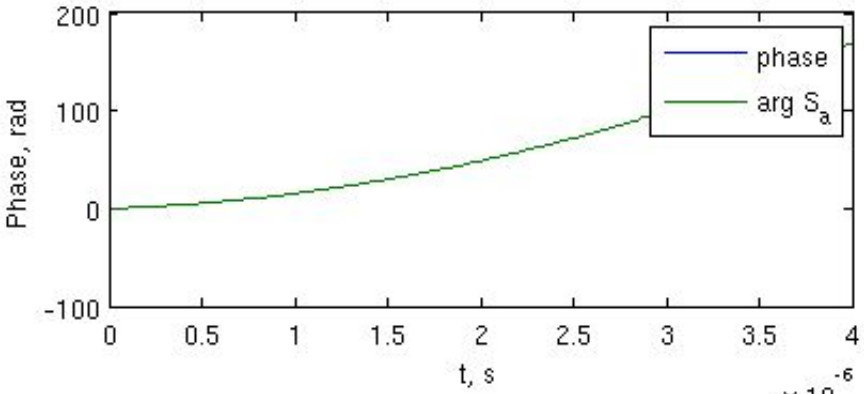


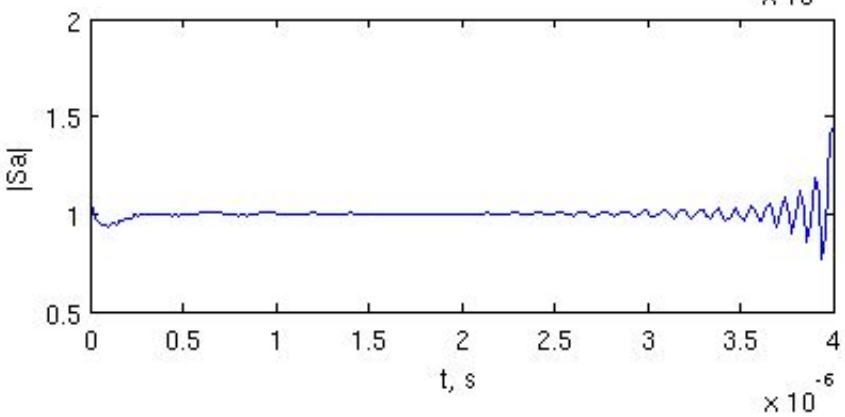
Спектр АС

У АС легко найти амплитуду и фазу:

```
clear all; clc; close all;

Td = 1/50e6;
t = 0:Td:200*Td;

phase = 2*pi*1e6*t + (3e6*t).^2;

S = cos(phase);
figure;
plot(t, S);
xlabel('t, s'); ylabel('S(t)');

Sa = hilbert(S);
figure;
plot(t, unwrap(angle(Sa)), t, phase)
xlabel('t, s'); ylabel('Phase, rad');
legend('phase', 'arg S_a');

figure;
plot(t, abs(Sa))
xlabel('t, s'); ylabel('|Sa|');
```





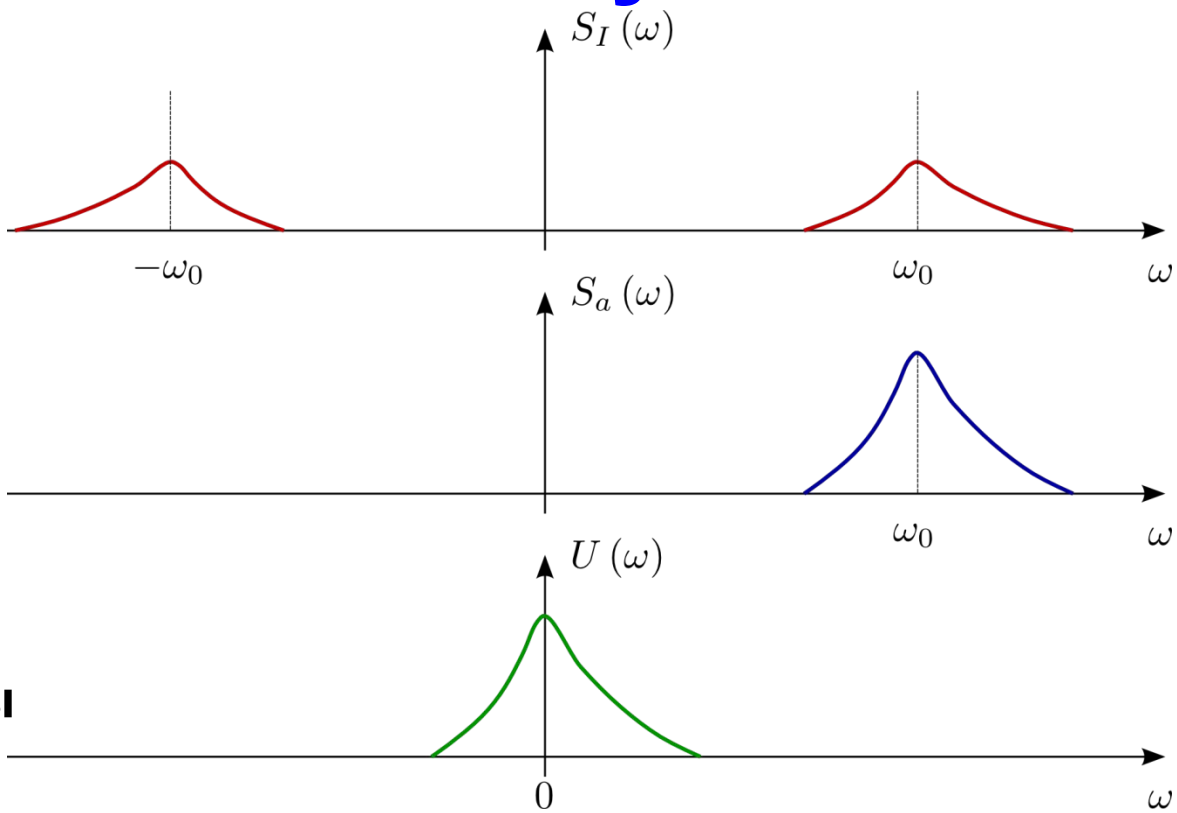


Избавление от несущей

Аналитический сигнал представим в виде

$$S_a(t) = U(t)e^{j\omega_0 t},$$

$$U(t) = S_a(t) \Big/ e^{j\omega_0 t}$$



Для дискретного представления комплексной амплитуды радиосигнала $U(t)$ **может использоваться низкая частота дискретизации**

При этом мы легко можем восстановить отчеты исходного сигнала, зная время и несущую частоту, относительно которой записана КА:

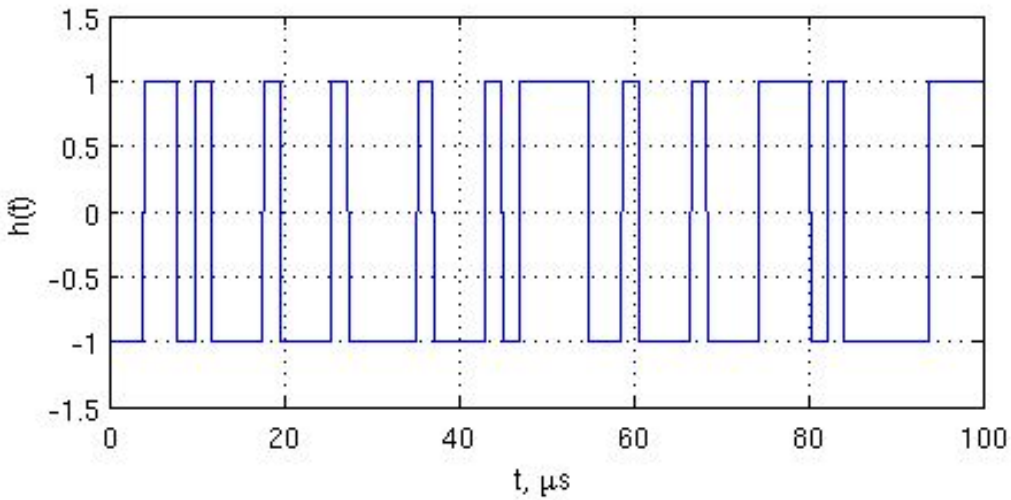
$$S(t) = \mathrm{Re}\left[U(t)e^{j\omega_0 t}\right]$$

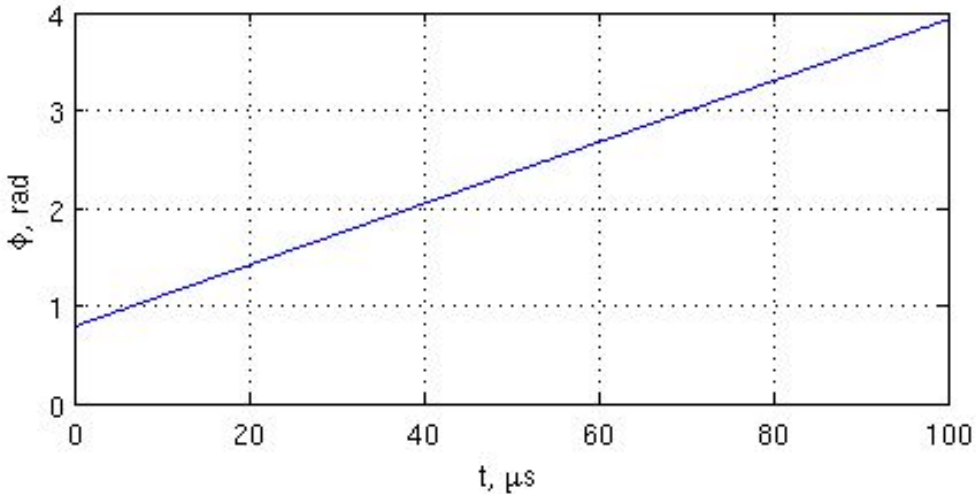
Для радиосигнала преобразование Гильберта тривиально – учитывать только «правый горб»

Избавление от несущей

$$u(t) = Ah(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)$$

```
clear all; clc; close all;

Fd = 44.2e6/4; Td = 1/Fd;
tmax = 0.001; t = 0:Td:tmax;

N_PRN = 511; T_PRN = 0.001;
PRN = sign(randn(1, N_PRN));
ind_h = fix(mod(t/T_PRN, 1) ...
*N_PRN) + 1;
h = PRN(ind_h);

A = 2; f0 = 3e6;
phi = pi/4 + 2*pi*5e3*t;

u = A * h .* cos(2*pi*f0*t + phi);

figure;
subplot(2,1,1); plot(t*1e6, h);
xlabel('t, \mus'); ylabel('h(t)');
grid on;
xlim([0 100]); ylim([-1.5 1.5]);
subplot(2,1,2); plot(t*1e6, phi);
xlabel('t, \mus'); ylabel('\phi, rad')
xlim([0 100]); grid on;
```





Избавление от несущей

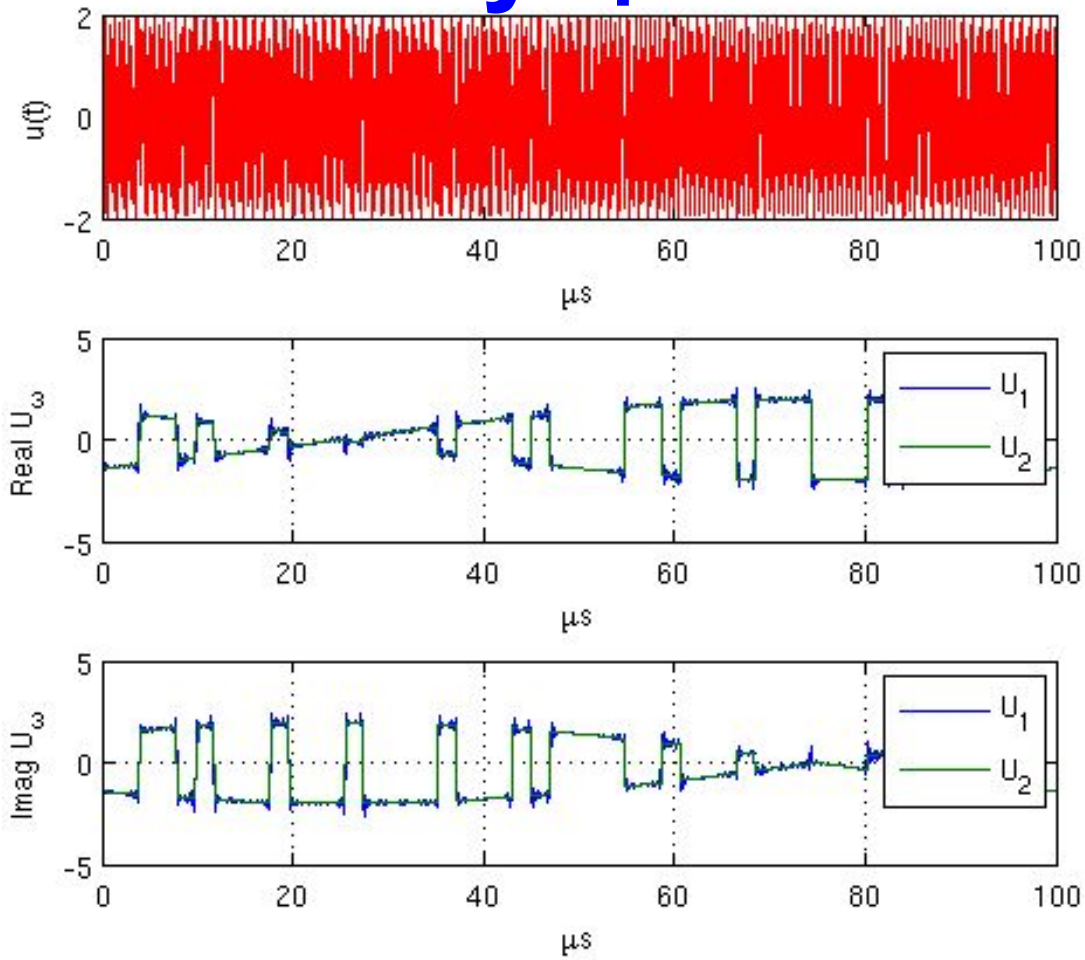
$$u(t) = Ah(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)$$

$\Downarrow$ **если узкополосный**

$$u_a(t) = Ah(t)\exp\left(j\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right]\right)$$

$\Downarrow$

$$U = Ah(t)\exp\left(j\varphi(t)\right)$$

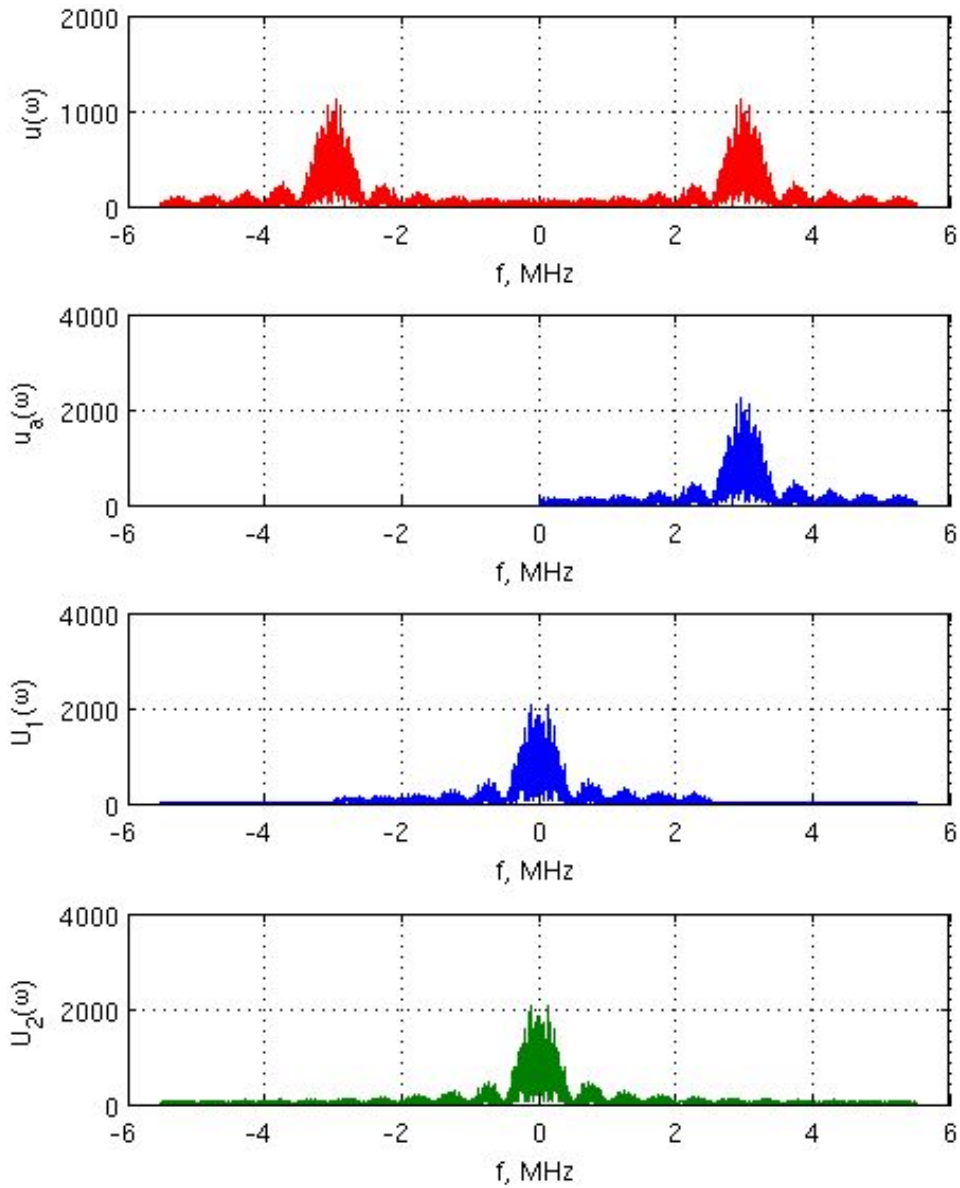



```
...
ua = hilbert(u);
U1 = ua .* exp(-1i*2*pi*f0*t);
U2 = A * h .* exp(1i*phi);

figure;
subplot(3,1,1); plot(t*1e6, u, 'r');
xlim([0 100]); ylabel('u(t)'); xlabel('\mus');
subplot(3,1,2); plot(t*1e6, [real(U1); real(U2)]); legend('U_1', 'U_2'); grid on;
xlim([0 100]); xlabel('\mus'); ylabel('Real U_\omega');
subplot(3,1,3); plot(t*1e6, [imag(U1); imag(U2)]); legend('U_1', 'U_2'); grid on;
xlim([0 100]);  xlabel('\mus'); ylabel('Imag U_\omega');
```

Избавление от несущей

Построим спектр:

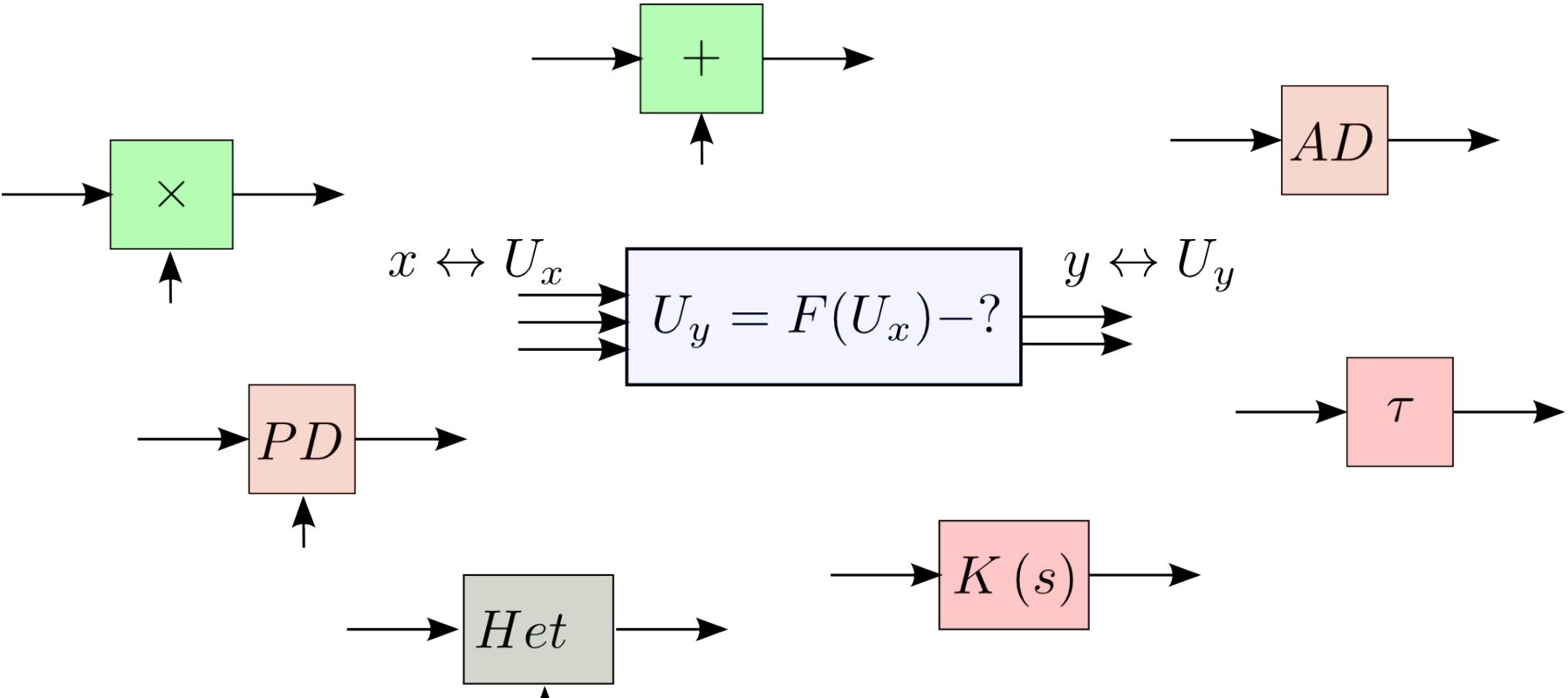
```
...
f = 0:(1/max(t)):(1/Td);
f = f -  fix(length(t)/2) / max(t);
figure;
subplot(4, 1, 1);
plot(f/1e6, fftshift(abs(fft(u))), 'r');
xlabel('f, MHz'); ylabel('u(\omega)');
grid on;
subplot(4, 1, 2);
plot(f/1e6, fftshift(abs(fft(ua))));
xlabel('f, MHz'); ylabel('u_a(\omega)');
grid on;
subplot(4, 1, 3);
plot(f/1e6, fftshift(abs(fft(U1))))
xlabel('f, MHz'); ylabel('U_1(\omega)');
grid on;
subplot(4, 1, 4);
plot(f/1e6, fftshift(abs(fft(U2))))
xlabel('f, MHz'); ylabel('U_2(\omega)');
grid on;
```



Базис ФЭ

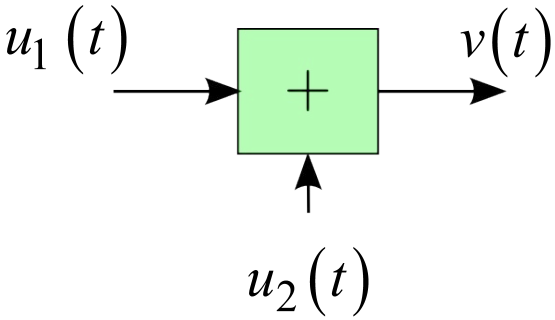
Метод комплексных амплитуд долгое время развивался на РТФе Евтяновым С.И., Борисовым Ю.П., Евсиковым Ю.А., Чипикиным В.М.

Одно из направлений – разработка «базиса функциональных элементов», т.е. математических моделей, связывающих КА на входе и выходе, для набора основных блоков РЭА: сумматор, перемножитель, линия задержки, амплитудный демодулятор (детектор), фазовый демодулятор (детектор), …. Стр.130 Борисов



Базис ФЭ

Сумматор

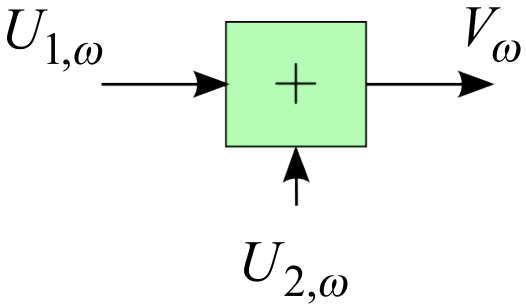


$$v(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$V_\omega = \frac{v_a(t)}{\exp(j\omega t)} = \frac{u_{a,1}(t) + u_{a,2}(t)}{\exp(j\omega t)} =$$

$$= \frac{u_{a,1}(t)}{\exp(j\omega t)} + \frac{u_{a,2}(t)}{\exp(j\omega t)} = U_{1,\omega} + U_{2,\omega}$$

$$V_\omega = U_{1,\omega} + U_{2,\omega}$$



Как быть, если комплексные амплитуды записаны относительно разных несущих?

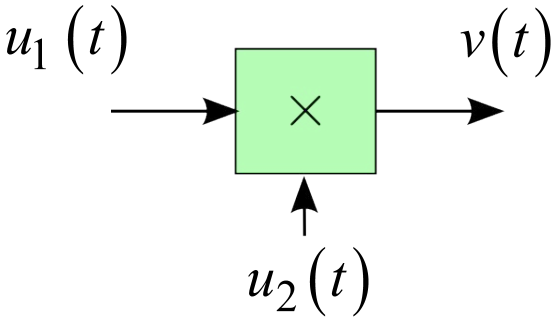
$$U_{\omega_1} \to U_{\omega_2}:$$

$$U_{\omega_1} = \frac{u_a(t)}{e^{j\omega_1 t}} = \frac{u_a(t)}{e^{j\omega_2 t} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}} = U_{\omega_2} e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t}$$

$$\Rightarrow U_{\omega_2} = U_{\omega_1} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}$$

Базис ФЭ

<u>Умножитель</u>



$$v(t) = u_1(t) \cdot u_2(t)$$

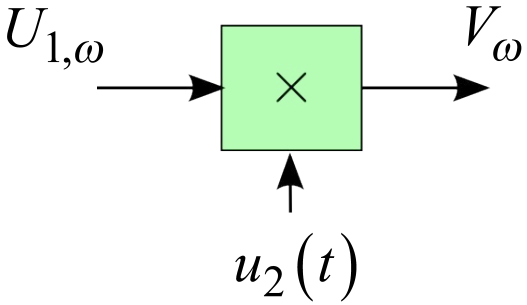
Если $u_2(t)$ медленно меняется

$$V_\omega = \frac{v_a(t)}{\exp(j\omega t)} = \frac{v(t) + j \cdot Hi\{v(t)\}}{\exp(j\omega t)} =$$

$$= \frac{u_1(t) \cdot u_2(t) + j \cdot Hi\{u_1(t) \cdot u_2(t)\}}{\exp(j\omega t)} \approx$$

$$\approx \frac{u_{a,1}(t) u_2(t)}{\exp(j\omega t)} = U_{1,\omega} \cdot u_2(t)$$

$$V_\omega = U_{1,\omega} \cdot u_2(t)$$

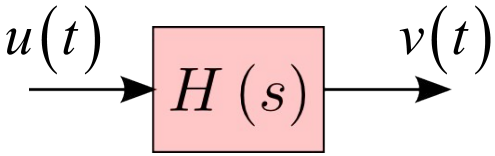


Иначе всё усложняется

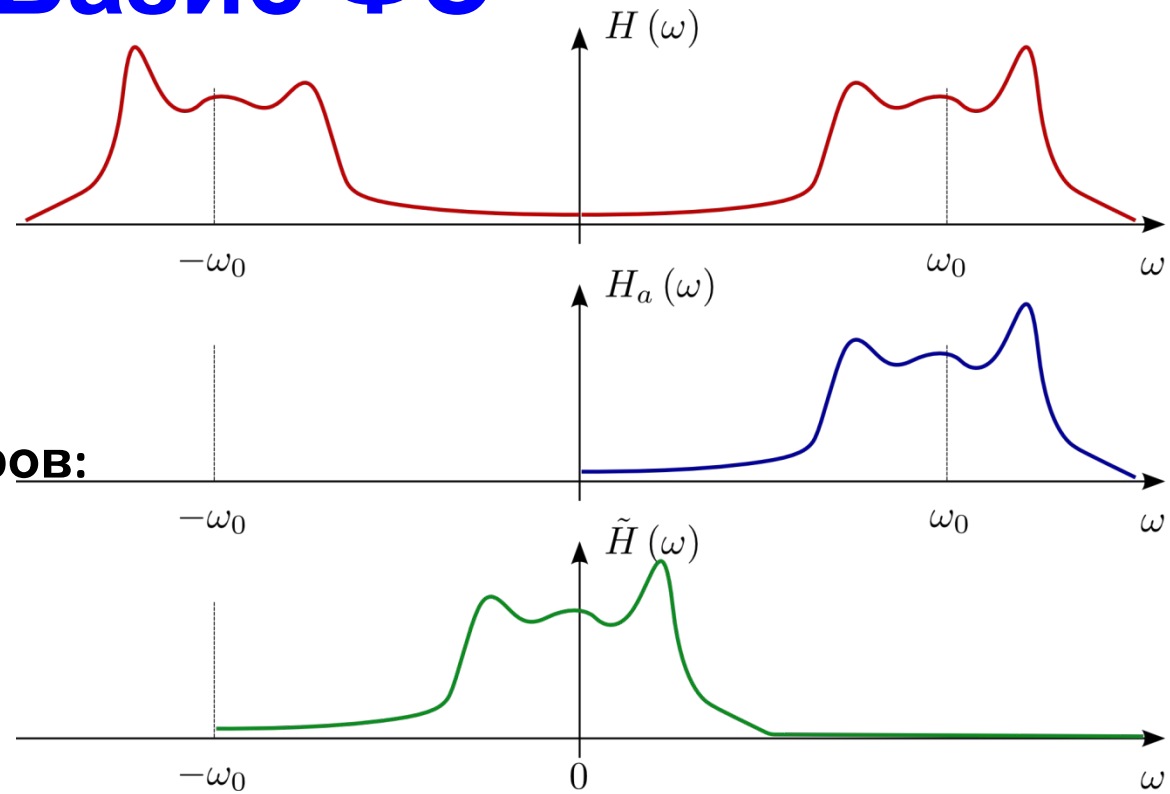
$$V_\omega = \frac{\mathrm{Re}U_1 e^{j\omega t} \cdot \mathrm{Re}U_2 e^{j\omega t} + j \cdot Hi\left\{\mathrm{Re}U_1 e^{j\omega t}\, \mathrm{Re}U_2 e^{j\omega t}\right\}}{\exp(j\omega t)}$$

Базис ФЭ

Узкополосный фильтр



$$v(t) = H(s)u(t)$$



Для узкополосных фильтров:

$$h(t) = h_0(t)\cos(\omega t + g(t))$$

$$\Downarrow$$

$$H(t) = h_0(t)\exp(jg(t))$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)U(t-\tau)d\tau$$

$$\tilde{H}(j\omega) = \begin{cases} H(j\omega + j\omega_0) & , \omega \geq \omega_0 \\ 0 & , \omega < \omega_0 \end{cases}$$

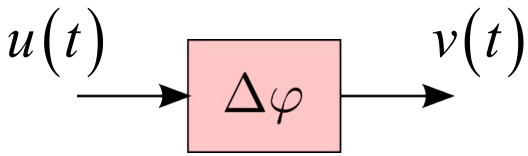
Для узкополосных фильтров:

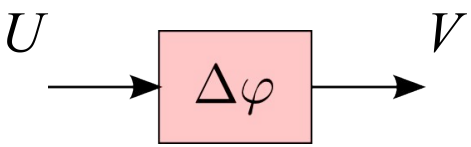
$$\tilde{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$\tilde{H}(s) = \tilde{H}(j\omega)\Big|_{j\omega \to s} \Rightarrow V = \tilde{H}(s)U$$

Базис ФЭ

Фазовращатель



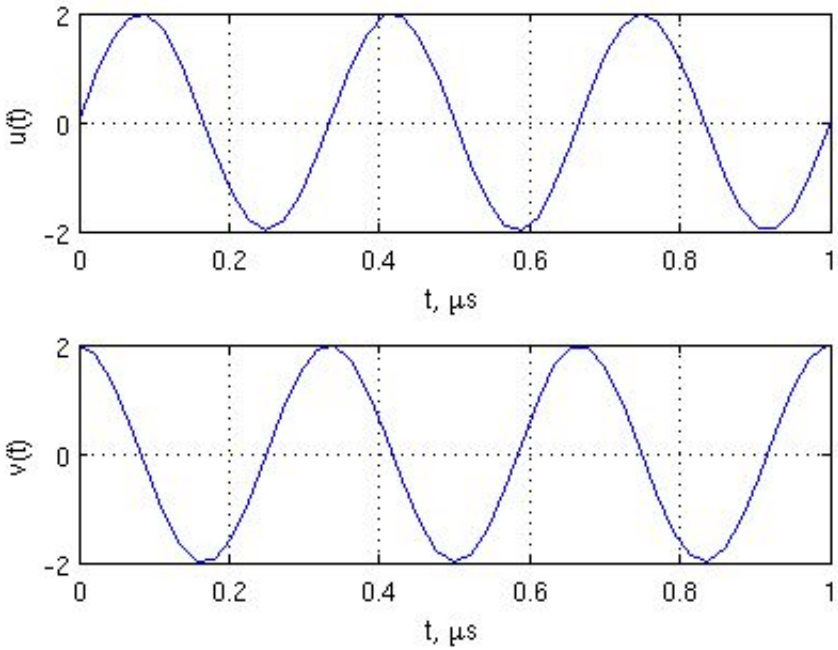


$$u(t) = Ah(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$$

$$v(t) = Ah(t)\cos(\omega t + \varphi(t) + \Delta\varphi)$$

$$V = U \cdot e^{j\Delta\varphi}$$

```
A = 2; f0 = 3e6; phi = -pi/2;
u = A * h .* cos(2*pi*f0*t + phi);
ua = hilbert(u);
U1 = ua .* exp(-1i*2*pi*f0*t);
U2 = A * h .* exp(1i*phi);

dPhi = pi/2;
V = U2 * exp(1i*dPhi);
v = real(V.*exp(1i*2*pi*f0*t));

figure;
subplot(2,1,1); plot(t*1e6, u);
xlim([0 1]); ylabel('u(t)'); xlabel('t, \mus'); grid on;
subplot(2,1,2); plot(t*1e6, v);
xlim([0 1]); ylabel('v(t)'); xlabel('t, \mus'); grid on;
```



Кафедра Радиотехнических систем (РТС)

Математическое моделирование РТУ и С

e-mail: ZakharovaYV@mpei.ru