

Гармонические колебания.

Процесс удовлетворяющий условию:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

называется гармоническими колебаниями.

Дифференциальное
уравнение
гармонических
колебаний.

Решением диф. уравнения является уравнение: $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_0)$

где: x - *смещение* (мгновенное значение колеблющейся величины)

X_m - *амплитуда* (максимальное значение смещения)

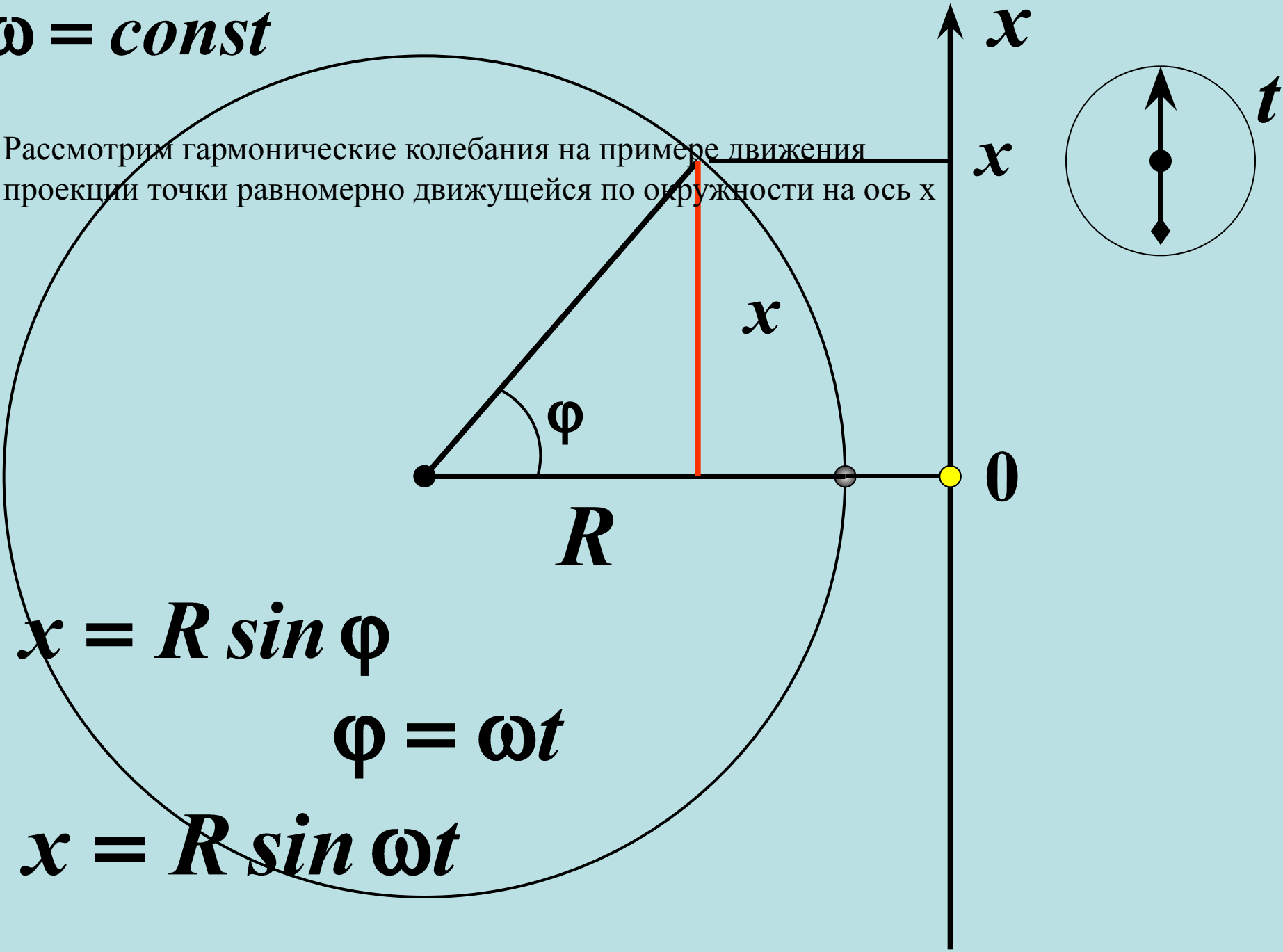
$(\omega t + \varphi_0)$ - *фаза* (величина определяющая смещение в данный момент времени)

φ_0 - *начальная фаза* (фаза в начальный момент времени, т.е. при $t=0$)

ω - *циклическая частота*

$\omega = \text{const}$

Рассмотрим гармонические колебания на примере движения проекции точки равномерно движущейся по окружности на ось x

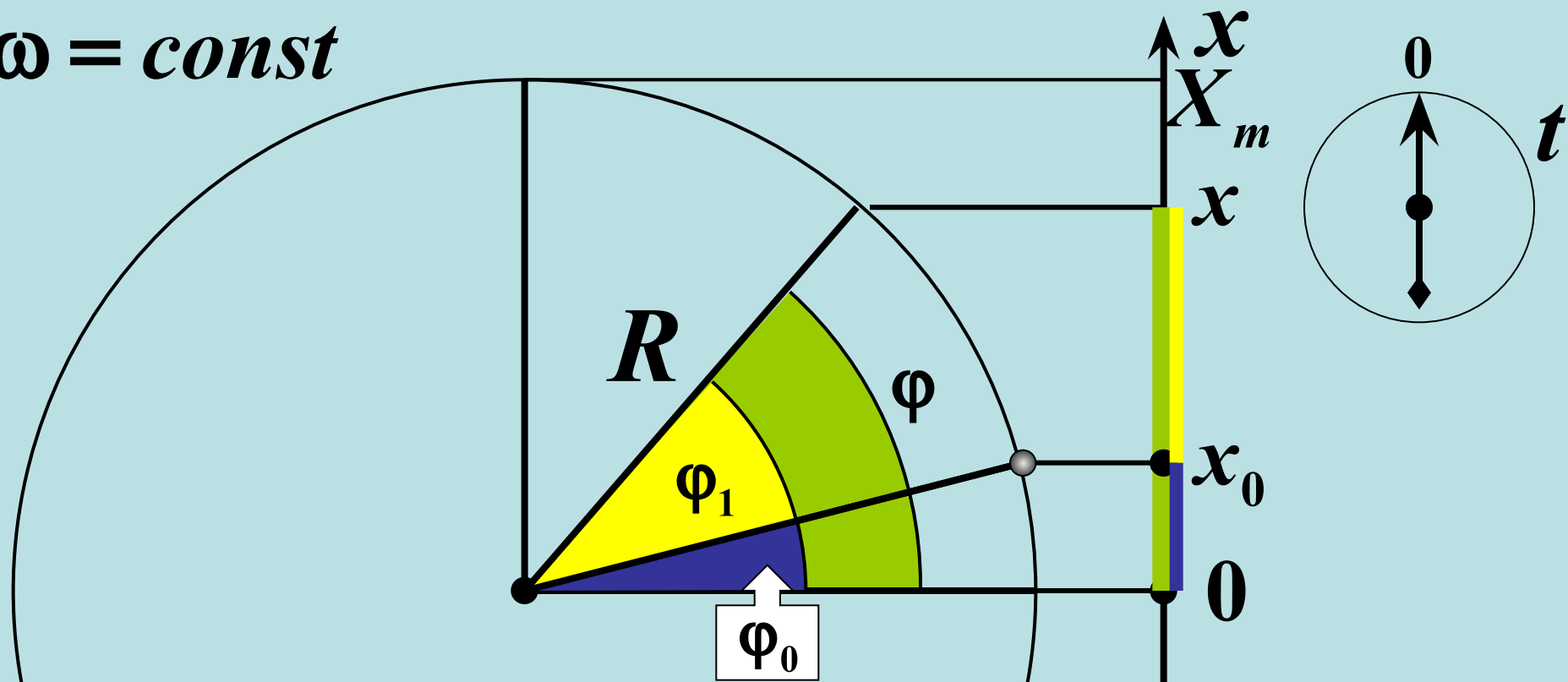


$x = R \sin \varphi$

$\varphi = \omega t$

$x = R \sin \omega t$

$\omega = \text{const}$

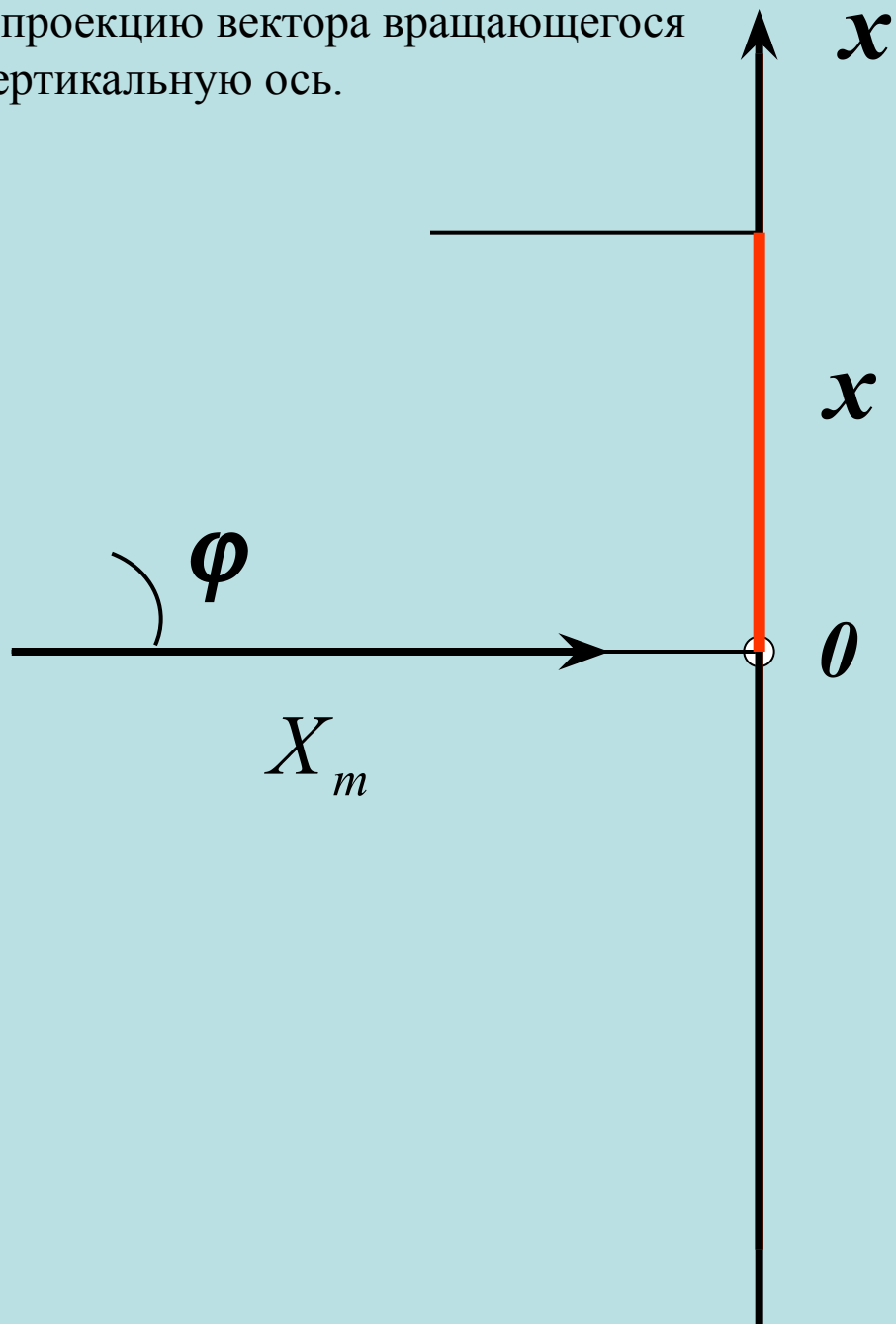


$$x = R \sin \varphi \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_0 \quad \varphi_1 = \omega t$$

$$x = R \sin(\omega t + \varphi_0) \quad R = X_m$$

$$x = X_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Колебание можно задать как проекцию вектора вращающегося против часовой стрелки на вертикальную ось.



Гармонические осцилляторы.

Гармонические осцилляторы – это система колебания которой удовлетворяют дифференциальному уравнению гармонических колебаний.

Свободными называются колебания системы предварительно выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

Частота свободных не затухающих колебаний называется **собственной частотой** колебаний системы.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Собственная частота

Рассмотрим пружинный маятник. (система из абсолютно упругой пружины и материальной точки).

Возвращающей силой является сила упругости.

$$F = -kx$$

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

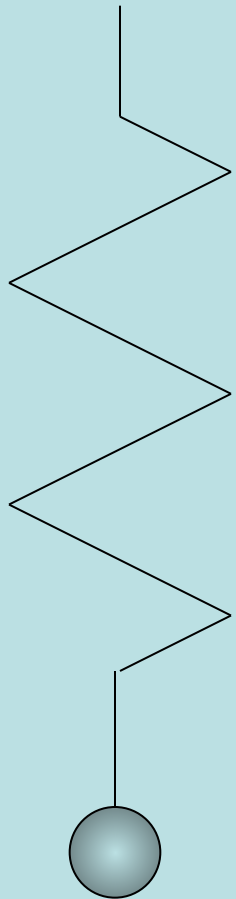
$$\left. \begin{array}{l} F = -kx \\ F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} \end{array} \right\} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - kx = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

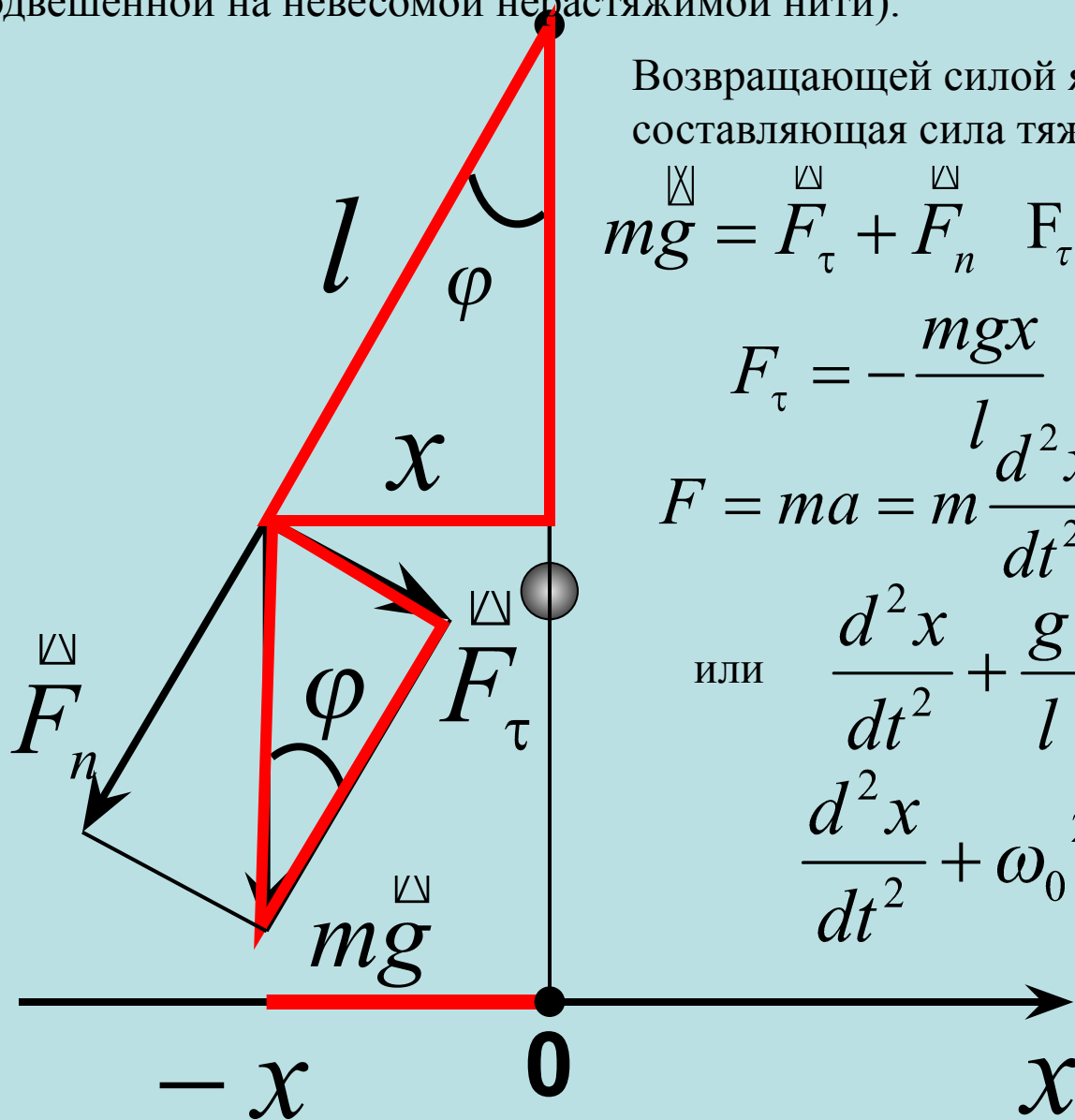
$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \end{array} \right\} \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$



Период колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Рассмотрим математический маятник. (система из материальной точки подвешенной на невесомой нерастяжимой нити).



Возвращающей силой является тангенсальная составляющая сила тяжести.

$$mg = F_{\tau} + F_n \quad F_{\tau} = mg \sin \varphi \quad \sin \varphi = \frac{x}{l}$$

$$F_{\tau} = -\frac{mgx}{l} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{g}{l} x$$

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

или $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0$

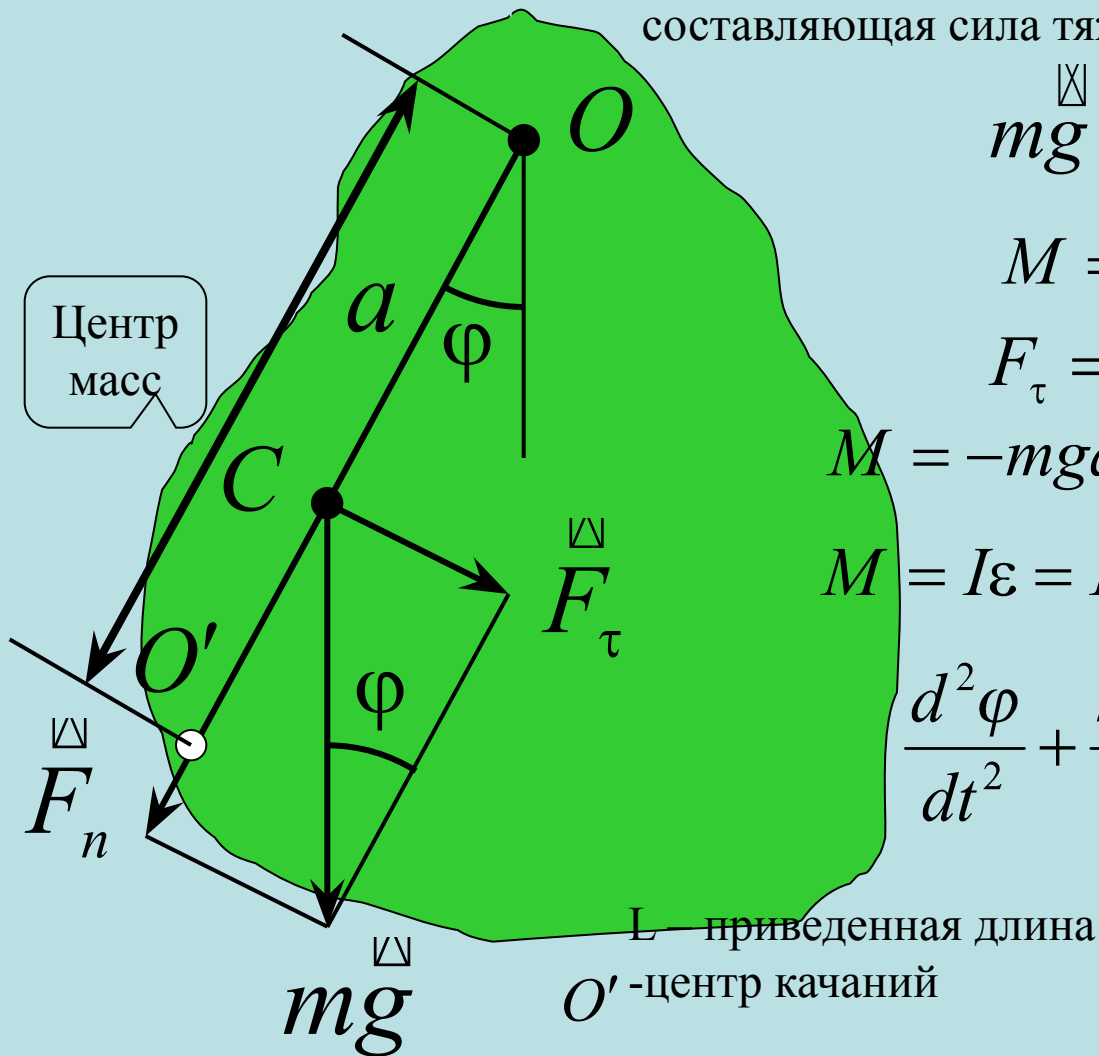
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Рассмотрим физический маятник. (система из тела совершающего колебания под действием силы тяжести относительно горизонтальной оси).

Возвращающей силой является тангенсальная составляющая силы тяжести.



$$mg = F_{\tau} + F_n$$

$$M = F_{\tau} l \quad F_{\tau} = -mg \sin \varphi$$

$$F_{\tau} = -mg \varphi$$

$$\left. \begin{aligned} M &= -mga\varphi \\ M &= I\varepsilon = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \end{aligned} \right\} I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I} \varphi = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{mga}{I}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}$$

