Гармонические колебания.

Процесс удовлетворяющий условию: $$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

называется гармоническими колебаниями.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Решением диф. уравнения является уравнение: $$\mathrm{x}=\mathrm{X_m}\sin(\omega\mathrm{t}+\varphi_0)$$

где: x - ***смещение*** (мгновенное значение колеблющейся величины)

X_m - ***амплитуда*** (максимальное значение смещения)

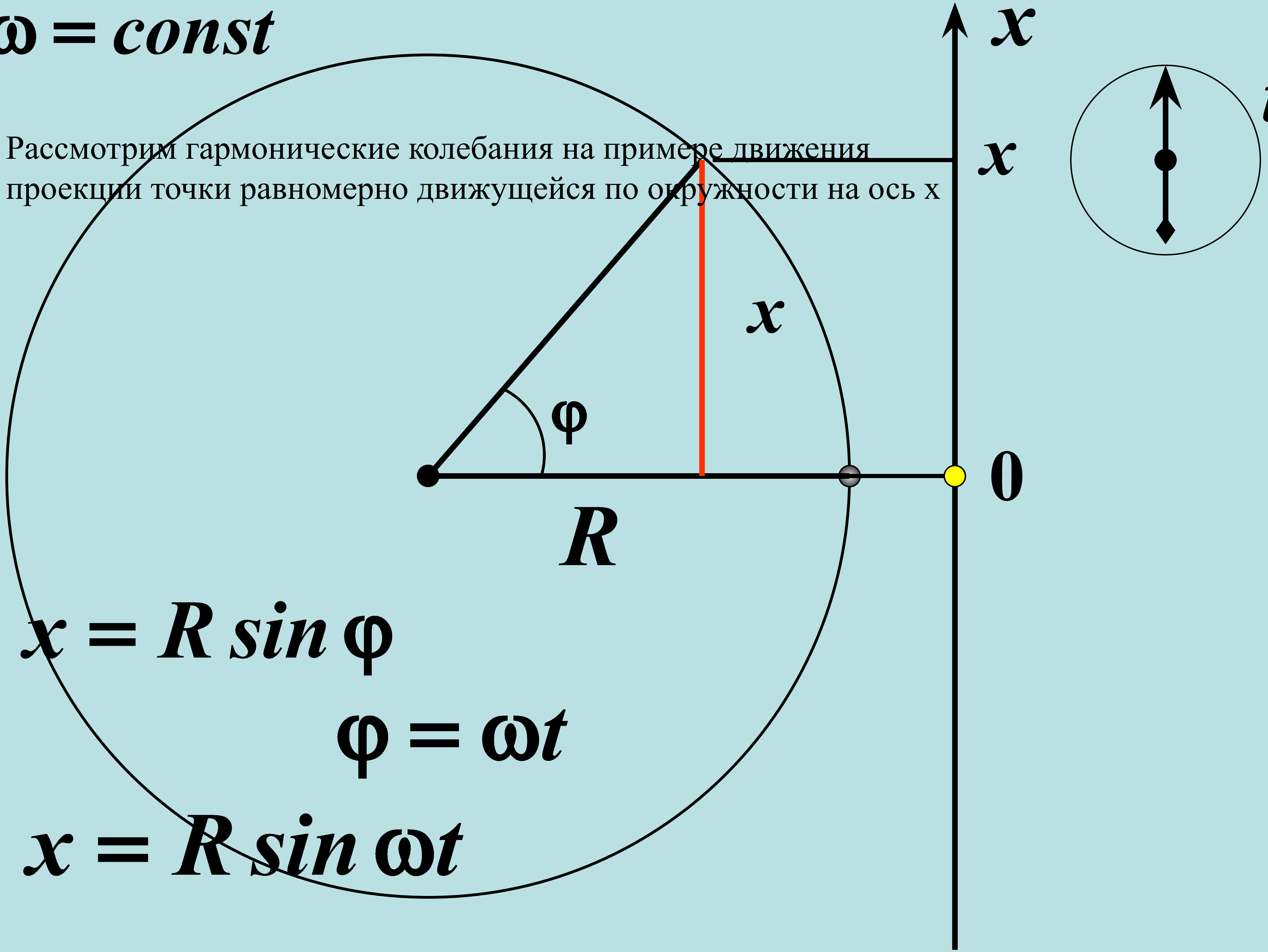
$(\omega t+\varphi_0)$ - ***фаза*** (величина определяющая смещение в данный момент времени)

φ_0 - ***начальная фаза*** (фаза в начальный момент времени, т.е. при t=0

ω - ***циклическая частота***

$$\omega = const$$

Рассмотрим гармонические колебания на примере движения проекции точки равномерно движущейся по окружности на ось х

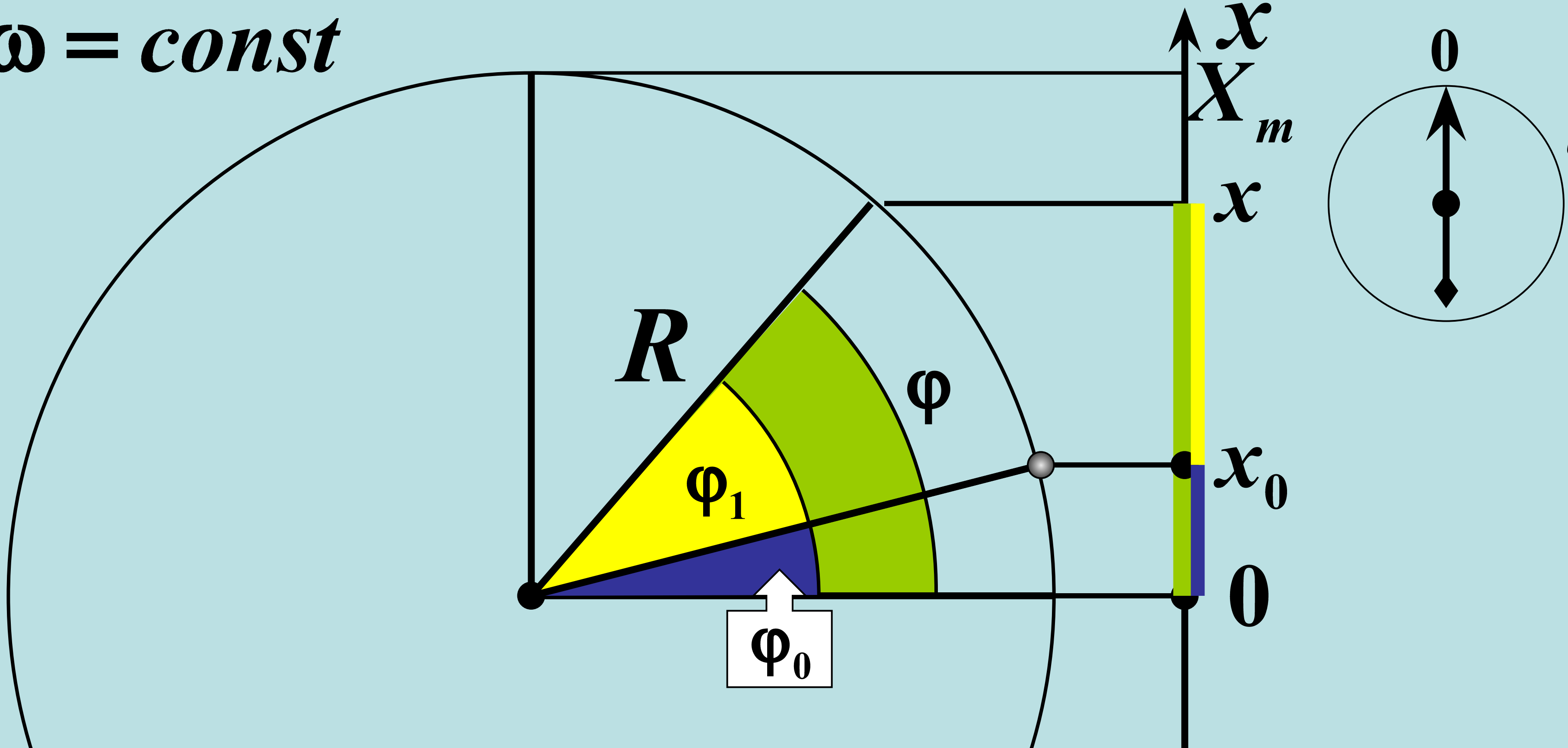


$$x = R \sin \varphi$$

$$\varphi = \omega t$$

$$x = R \sin \omega t$$

$\omega = const$

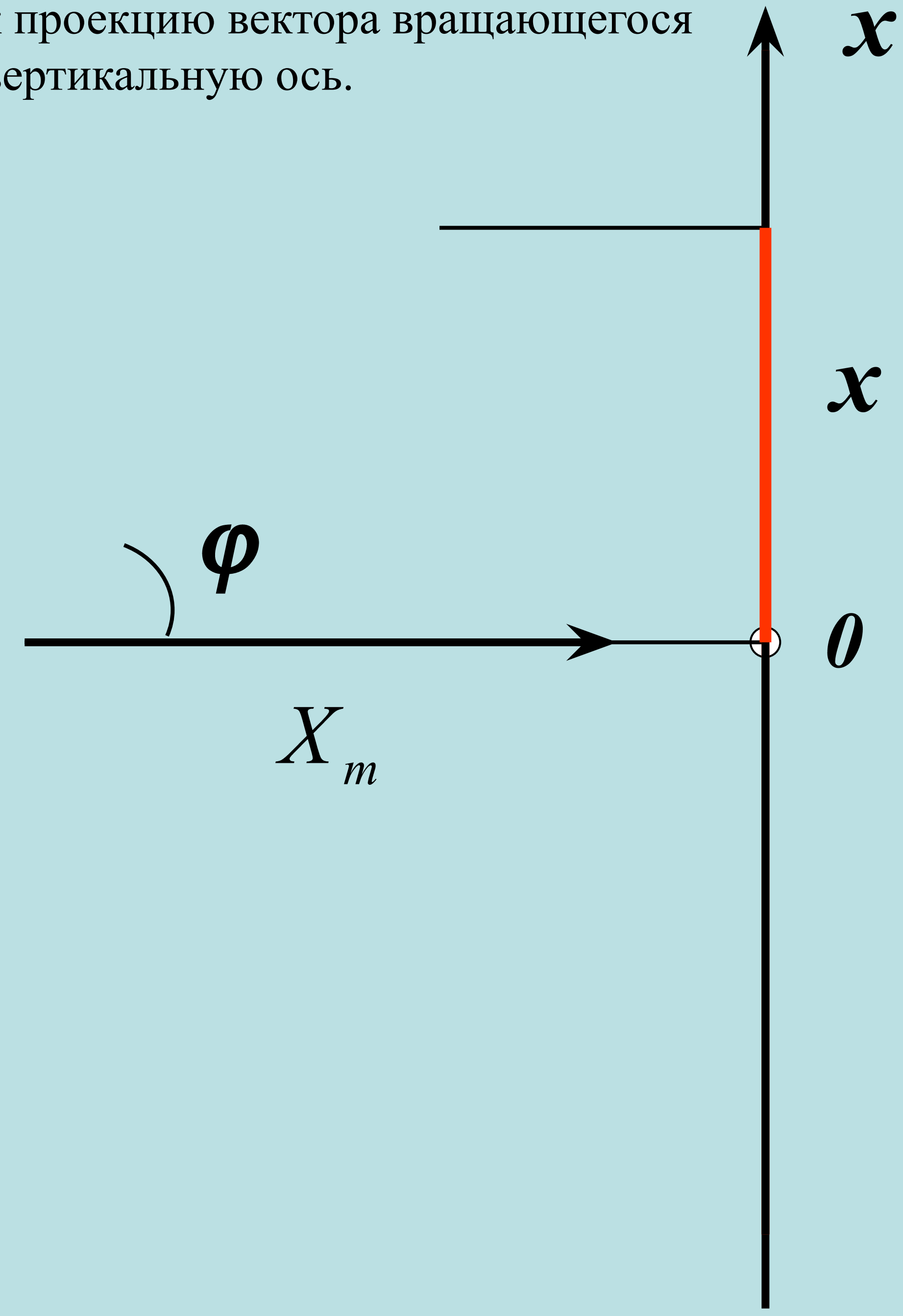


$$x = R\sin\varphi \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_0 \quad \varphi_1 = \omega t$$

$$x = R\sin(\omega t + \varphi_0) \quad R = X_m$$

$$x = X_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Колебание можно задать как проекцию вектора вращающегося против часовой стрелки на вертикальную ось.



Гармонические осцилляторы.

Гармонические осцилляторы – это система колебания которой удовлетворяют дифференциальному уравнению гармонических колебаний.

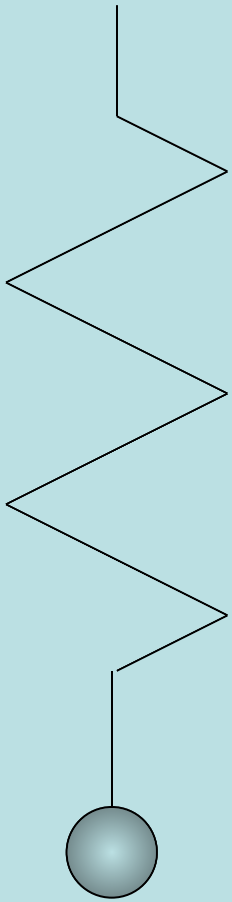
Свободными называются колебания системы предварительно выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе.

Частота свободных не затухающих колебаний называется ***собственной частотой*** колебаний системы.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0$$

Собственная частота

Рассмотрим пружинный маятник. (система из абсолютно упругой пружины и материальной точки).



Возвращающей силой является сила упругости.

$$F = -kx$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - kx = o$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

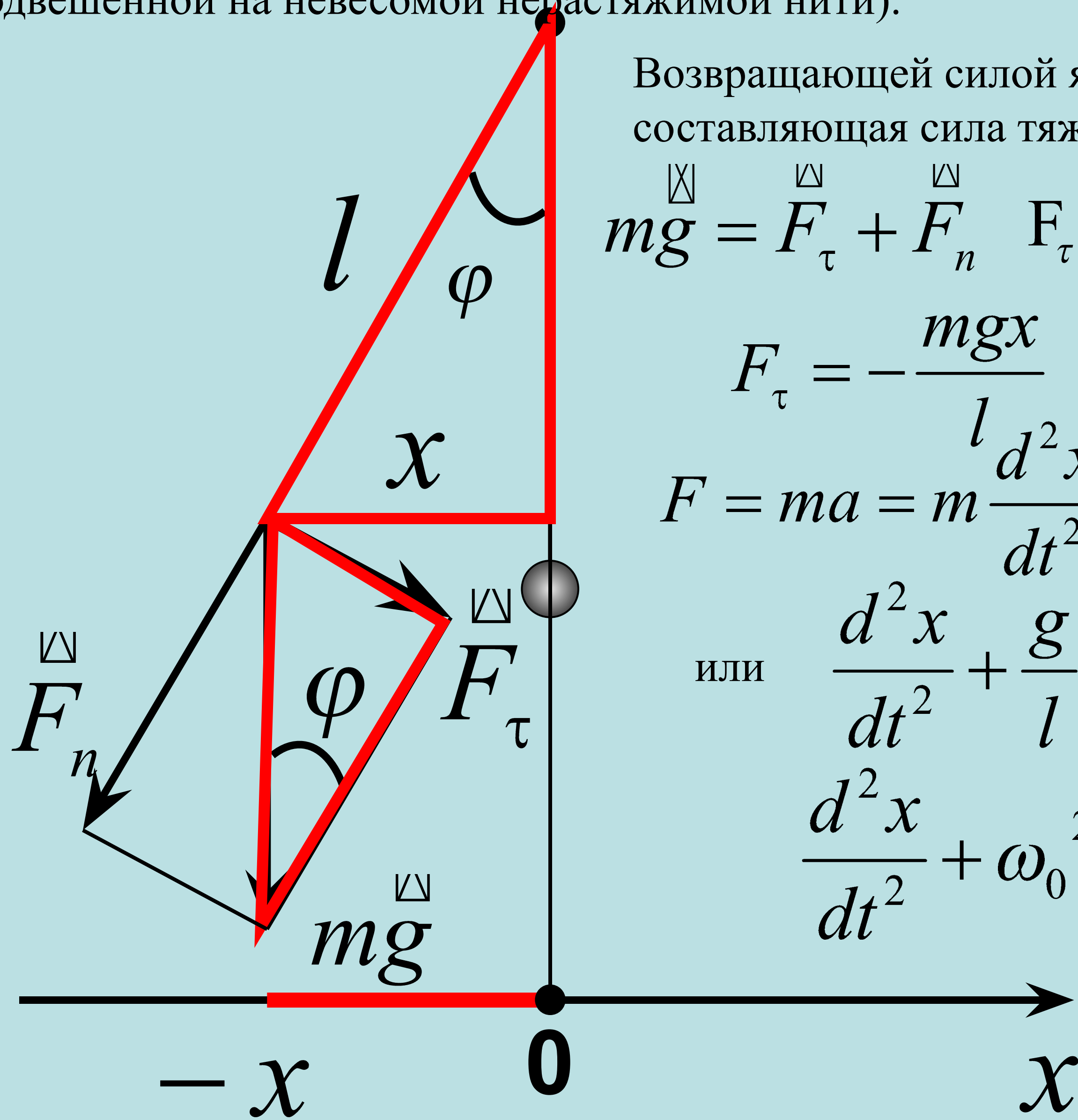
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0$$

Период колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Рассмотрим математический маятник. (система из материальной точки подвешенной на невесомой нерастяжимой нити).

Возвращающей силой является тангенсальная составляющая сила тяжести.



$$m\vec{g} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n \qquad \mathrm{F}_\tau = \mathrm{mg}\sin\varphi \qquad \sin\varphi = \frac{x}{l}$$

$$F_\tau = -\frac{mgx}{l}$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x$$

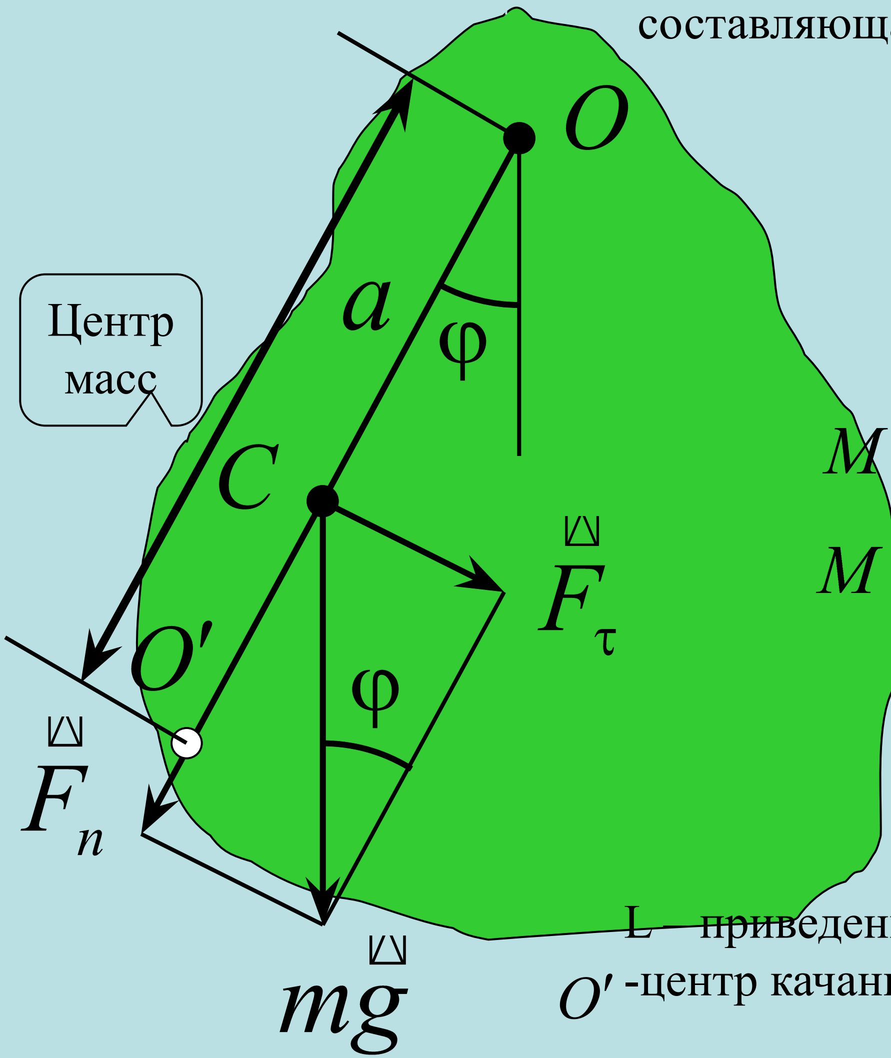
или $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\;}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Рассмотрим физический маятник. (система из тела совершающего колебания под действием силы тяжести относительно горизонтальной оси).



Возвращающей силой является тангенсальная составляющая сила тяжести.

$$m\vec{g} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$

$$M = F_\tau l \qquad \mathrm{F}_\tau = -\mathrm{mg}\sin\varphi$$

$$F_\tau = -mg\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} M &= -mga\varphi \\ M &= I\varepsilon = I\frac{d^2\varphi}{dt^2} \end{aligned}\right\} I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I}\varphi = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{mga}{I}$$

L – приведенная длина

O' -центр качаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$