2. Доказательство клауз

Лекция 7

Понятие высказывания

<u>Определение</u>

<u>Высказывание</u> – утверждение об изучаемых в рамках области знаний объектах, имеющее однозначно и точно определенное значение.

В классической (булевой, двузначной) логике высказываний значение может быть либо истинным либо ложным.

В русском языке под высказыванием понимается повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Понятие формулы алгебры логики (алгебры высказываний)

Определение

1) Логические переменные, символы 0 и 1 – формулы алгебры логики.

2) Если A – логическая формула, то (A) – логическая формула алгебры логики.

3) Если A, B – логические выражения, то $\overline{A}$, $A \cdot B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$ – формулы алгебры логики.

Основные определения

<u>Опр.</u> *Пусть $A(x_1, ..., x_n)$ - пропозициональная формула, где $x_1, ..., x_n$ - входящие в нее пропозициональные переменные.*

Конкретный набор истинности значений, приписанных переменным $x_1, ..., x_n$, называется ***<u>интерпретацией формулы A</u>****.*

Формула может быть истинной (иметь значение 1) при одной интерпретации и ложной (иметь значение 0) при другой интерпретации.

<u>Опр.</u> *Формула, истинная при некоторой интерпретации, называется* ***<u>выполнимой</u>****. Формула, истинная при всех возможных интерпретациях, называется* ***<u>общезначимой (или тавтологией)</u>****.*

<u>Опр.</u> *Формула, ложная при всех возможных интерпретациях, называется* ***<u>невыполнимой (или противоречием)</u>****.*

<u>Опр.</u> *Две формулы назовем* ***<u>равносильными</u>****, если для любых наборов они принимают одинаковые значения.*

Основные определения

<u>Опр.</u> *Говорят, что* ***<u>формула B логически следует из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$</u>*** :

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B,$$

если формула B имеет значение 1 при всех интерпретациях, при которых формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *имеют одновременно значение 1.*

<u>Свойства:</u>

1) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B, \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B \models;$
2) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models \neg B, \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n, B \models;$
3) $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B \rightarrow C, \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n, B \models C$ – теорема о дедукции;
4) $A \models B, B \models C, \Rightarrow A \models C$ – правило силлогизма.

Доказательство от противного

1)

- Предположить, что существует такая интерпретация формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B, при которой

$$A_1 = 1, A_2 = 1, \ldots, A_n = 1;\ B = 0;$$

- прийти к противоречию.

2)

- Предположить, что существует такая интерпретация формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B, при которой

$$A_1 = 1, A_2 = 1, \ldots, A_n = 1,\ B = 1,$$

следовательно,

$$A_1 A_2 \ldots A_n\ B = 1;$$

- прийти к противоречию.

Доказательство от противного

Пример 1:

$A \to (\; B \; C), \neg B \vee D, (E \to \neg F) \to \neg D, \neg B \vee (A \; \neg E) \models \boldsymbol{B} \to \; \boldsymbol{E};$

1)

$A \to (\; B \; C), \neg B \vee D, (E \to \neg F) \to \neg D, \neg B \vee (A \; \neg E) \models \boldsymbol{B} \to \; \boldsymbol{E};$

(1) (2) (3) (4) **(5)**

Предположим, что существуют значения переменных A, B, C, D, E, F,

для которых (1) = 1, (2) = 1, (3) = 1, (4) = 1, **(5) = 0**.

(5): $\boldsymbol{B \to \; E = 0 \Rightarrow B = 1, E = 0;}$

(4): $\neg B \vee (A \; \neg E) = 1 \Rightarrow 0 \vee (A \cdot 1) = 1 \Rightarrow A = 1;$

(2): $\neg B \vee D = 1 \Rightarrow 0 \vee \mathrm{D} = 1 \Rightarrow D = 1;$

(3): $(E \to \neg F) \to \neg D = 1 \Rightarrow (0 \to \neg F) \to 0 = 1 \Rightarrow$ $\underline{\mathbf{1 \to \; 0 = 1}}$ **– противоречие**.

Доказательство от противного

2)

$A \to (B\ C),\ \neg B \vee D,\ (E \to \neg F) \to \neg D,\ \neg B \vee (A\ \neg E),\ \boldsymbol{\neg(B \to E)}\ |=;$

(1) (2) (3) (4) (5)

Предположим, что существуют значения переменных A, B, C, D, E, F,

для которых (1) = 1, (2) = 1, (3) = 1, (4) = 1, **(5) = 1**, *следовательно,*

конъюнкция (1) (2) (3) (4) **(5)** = 1.

ДНФ для **(5)**: $\boldsymbol{\neg(B \to E) = B\ \neg E;}$

ДНФ для (1): $A \to (B\ C) = \neg A \vee B\ C;$

ДНФ для (3): $(E \to \neg F) \to \neg D = E\ F \vee \neg D;$

$(\neg A \vee B\ C)(\neg B \vee D)(E\ F \vee \neg D)(\neg B \vee A\ \neg E)(\boldsymbol{B\ \neg E}) =$

$= (\neg A \neg B \vee (\neg A \vee B\ C)\ D)(E\ F \vee \neg D)\ A\ B\ \neg E =$

$= (\neg A \neg B \vee (\neg A \vee B\ C)\ D)\ A\ B\ \neg D\ \neg E =$

$= (\neg A \neg B \vee (\neg A \vee B\ C)\ D)\ A\ B\ \neg D\ \neg E =$ **0 – противоречие**.

Доказательство от противного

Пример 2:

$A \to C, D \to F, B \to E, \neg D \to \neg C, A \to B \models \boldsymbol{A \to (E\ \ F)}$;

(1) (2) (3) (4) (5) **(6)**

$A \to (E\ \ F) = 0 \Rightarrow A = 1, E\ F = 0 \Rightarrow A = 1, E = 0$ или $F = 0$;

1.

(6): $A = 1, E = 0$;

(5): $A \to B = 1 \Rightarrow B = 1$;

(3): $B \to E = 1 \Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{E = 1}}$ **– противоречие**;

2.

(6): $A = 1, F = 0$;

(1): $A \to C = 1 \Rightarrow C = 1$;

(4): $\neg D \to \neg C = 1 \Rightarrow D = 1$;

(2): $D \to F = 1 \Rightarrow$ $\underline{\boldsymbol{F = 1}}$ **– противоречие**.

Метод резолюций

- Привести A_i, ¬B представлены в КНФ;
- составить конъюнкцию $A_1\ A_2 ... A_n \neg B$;
- последовательно применять правило резолюции

$$\frac{A \vee C, B \vee \overline{C}}{A \vee B}$$

к дизъюнктам конъюнкции $A_1\ A_2 ... A_n \neg B$.

При последовательном применении правила резолюций происходит уменьшение числа переменных, вплоть до их полного исчезновения (если клауза верна).

Метод резолюций

Пример:

$$A \to B, C \to D, B \to E, D \to F, E \to \neg F, A \to C \ \models \neg A$$

По свойству 1:

$$A \to B, C \to D, B \to E, D \to F, E \to \neg F, A \to C, \ A \models;$$

После приведения посылок к КНФ:

$$\neg A \vee B, \neg C \vee D, \neg B \vee E, \neg D \vee F, \neg E \vee \neg F, \neg A \vee C, A \vee 0 \models;$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

№	Вывод	Как получили
1.	$\neg B \vee \neg F$	(3), (5)
2.	$\neg C \vee F$	(2), (4)
3.	$\neg A \vee \neg F$	1, (1)
4.	$\neg A \vee F$	2, (6)
5.	$\neg A$	3, 4
6.	**0**	5, (7)

Аксиоматический метод

Логика высказывания является *расширением* логики Буля. Поэтому все истинные тождества логики Буля автоматически становятся справедливыми клаузами логики высказываний.

Например, *закон склеивания*:

$$(\mathrm{A} \vee \neg B)\,(\mathrm{A} \vee B) = \mathrm{A}$$

можно представить следующими справедливыми клаузами:

$$(\mathrm{A} \vee \neg B)\,(\mathrm{A} \vee B) \models \mathrm{A},$$

$$\mathrm{A} \models (\mathrm{A} \vee \neg B)\,(\mathrm{A} \vee B).$$

Аксиоматический метод

Пример:

$$A \to C, D \to F, B \to E, \neg D \to \neg C, A \to B \models \boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{F});$$

(1) (2) (3) (4) (5) **(6)**

По свойству 3 (**теореме о дедукции**):

$$A \to C, D \to F, B \to E, \neg D \to \neg C, A \to B, \boldsymbol{A} \models (\boldsymbol{E}\ \ \boldsymbol{F});$$

(1) (2) (3) (4) (5) **(6)** **(7)**

По свойству 1:

$$A \to C, D \to F, B \to E, \neg D \to \neg C, A \to B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\neg(E\ \ F)} \models;$$

(1) (2) (3) (4) (5) **(6)** **(7)**

По закону Де Моргана:

$$A \to C, D \to F, B \to E, \neg D \to \neg C, A \to B, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\neg E} \vee \boldsymbol{\neg F} \models;$$

(1) (2) (3) (4) (5) **(6)** **(7)**

№	**Вывод**	**Как получили**
1	C	MP: (6), (1)
2	D	MT: (4), 1
3	F	MP: 2, (2)
4	B	MP: (6), (5)
5	E	MP: 4, (3)
6	$\boldsymbol{\neg E}$ **противоречие**	TP: 3, (7)
7	$\boldsymbol{\neg F}$ **противоречие**	TP: 5, (7)