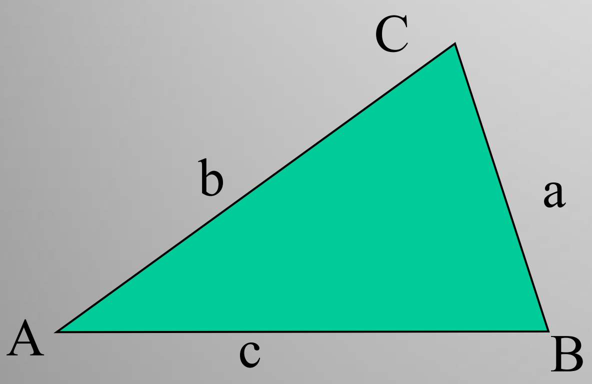
9 классе

Практическое применение теоремы косинусов и синусов

ПОВТОРЕНИЕ

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Стороны треугольника прямо пропорциональны синусам противолежащих углов.

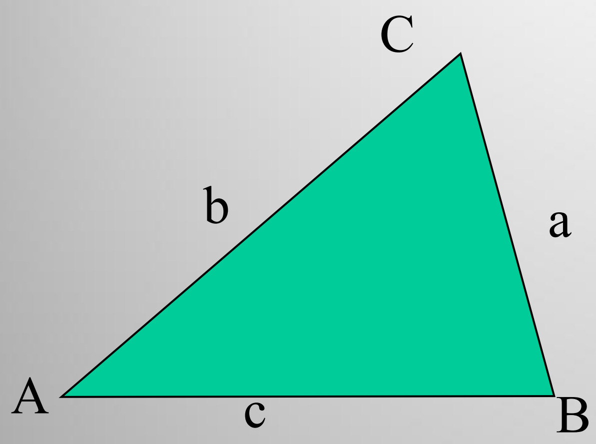


$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

?

ПРИМЕР:



Дано: ΔABC, c = AB = 3 см,

a = BC = 5 см, $\sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

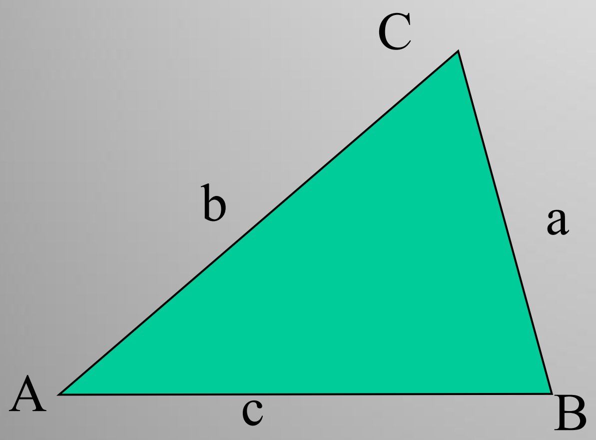
Найти: sinC

Решение:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\sin C} \Rightarrow \quad \sin C = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

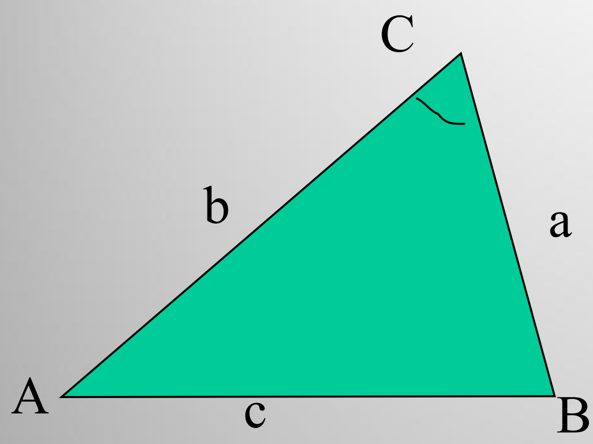


Это частный случай теоремы Пифагора. Почему?

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

?

ПРИМЕР:



Дано: ΔABC, $b = AC = 5$ см,

$a = BC = 4$ см, $\cos C = \dfrac{1}{2}$

Найти: AB

Решение:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$AB^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 21$$

$$AB = \sqrt{21}$$

Практическое применение
теоремы косинусов и синусов

Решение задачи №1

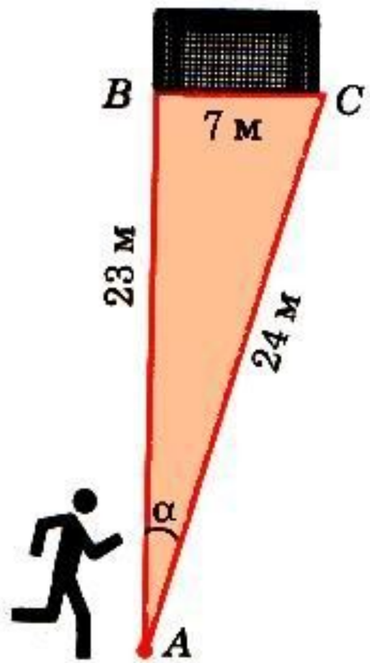


Рис. 1.

Условие.

Футбольный мяч находится в точке А футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований В и С стоек ворот (рис.1). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

Решение.

Рассмотрим треугольник АВС, вершинами которого являются точка А расположения мяча и точки В и С в основаниях стоек ворот. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м и $a = BC = 7$ м. Эти данные позволяют решить треугольник АВС и найти угол α, равный углу А. С помощью теоремы косинусов определяем cosA:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23}$$

Угол α находим по таблице: $\alpha \approx 16°57'$.

Решение задачи №2
Измерение высоты предмета

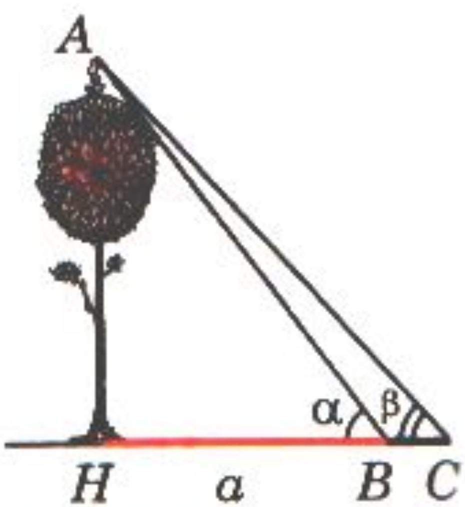


Рис. 2

Предположим, что требуется определить высоту AH какого-либо предмета (рис. 2). Для этого отметим точку B на определенном расстоянии α от основания H предмета и измерим угол ABH: ∠ABH=α. По этим данным из прямоугольного треугольника ABH находим высоту предмета: AH = a tgα.

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание H предмета, отметим две точки B и C на определенном расстоянии α друг от друга и измерим углы ABH и ACB: ∠ABH=α и ∠ACB=β (рис. 2). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника ABC, в частности AB. В самом деле, ∠ABH-внешний угол треугольника ABC, поэтому ∠A=α-β.

Используя теорему синусов, находим AB: $AB = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$

Из прямоугольного треугольника ABH находим высоту AH предмета:

AH=AB · sin α. Итак, AH= $\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$

Решение задачи №3

Измерение расстояния до недоступной точки

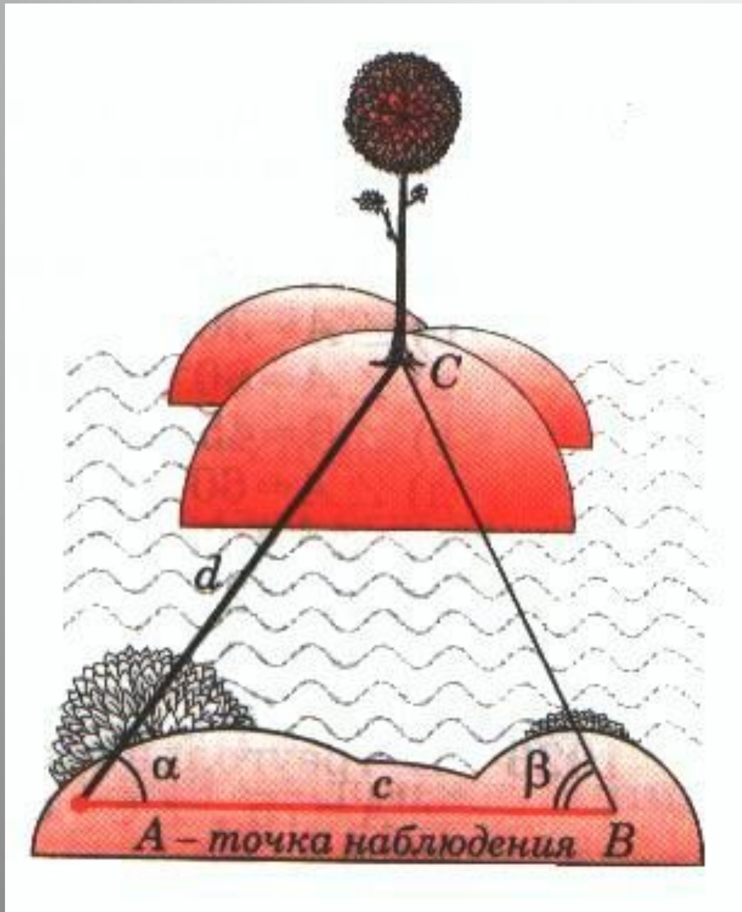


Рис. 3

Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 3). Напомним, что эту задачу мы уже решали в 8 классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи – с использованием формул тригонометрии.

На местности выберем точку B и измерим длину c отрезка AB. Затем измерим, например с помощью астролябии, углы A и B: $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$. Эти данные, т. е. c, α и β, позволяют решить треугольник ABC и найти искомое расстояние d=AC.

Сначала находим $\angle C=180°-\alpha-\beta$,

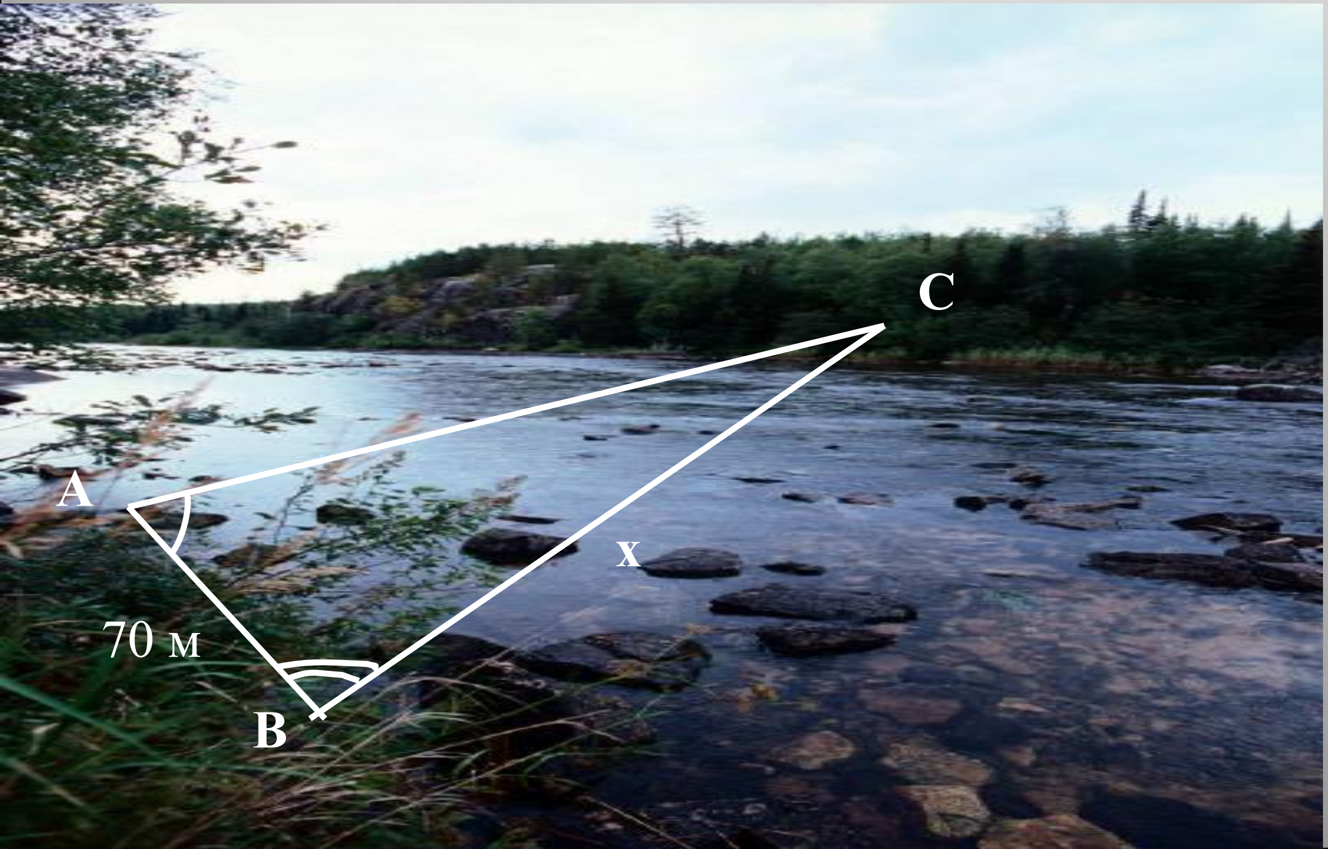
$\sin C = \sin(180°-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$.

Затем с помощью теоремы синусов находим d. Так как , $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$

AC=d, AB=c, $\angle B=\beta$, то $d=\dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

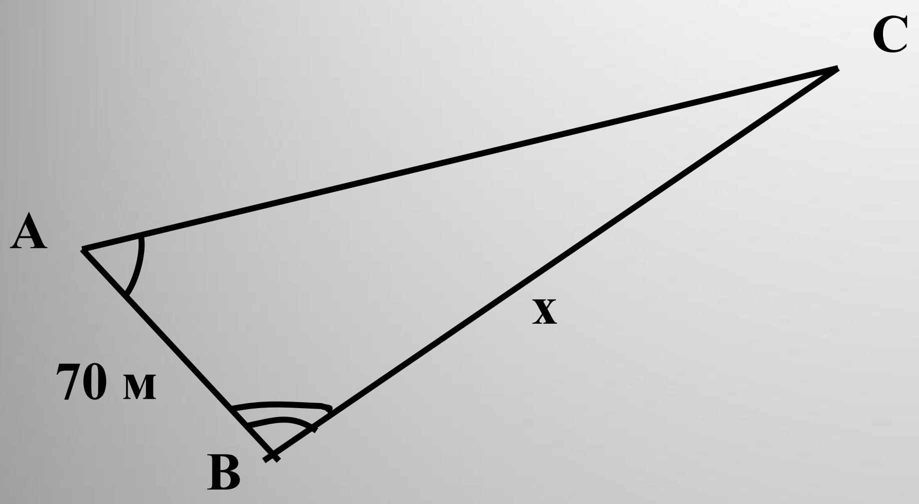
Решите задачу №4

Для определения ширины реки отметили два пункта A и B на берегу реки на расстоянии 70 м друг от друга и измерили углы CAB и ABC, где C – дерево, стоящее на другом берегу у кромки воды. Оказалось, что $\angle CAB = 12°30'$, $\angle ABC = 72°42'$. Найдите ширину реки.



?

Решение задачи №4



$$\frac{CB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$

$\sin\angle C = \sin(\angle A + \angle B) =$

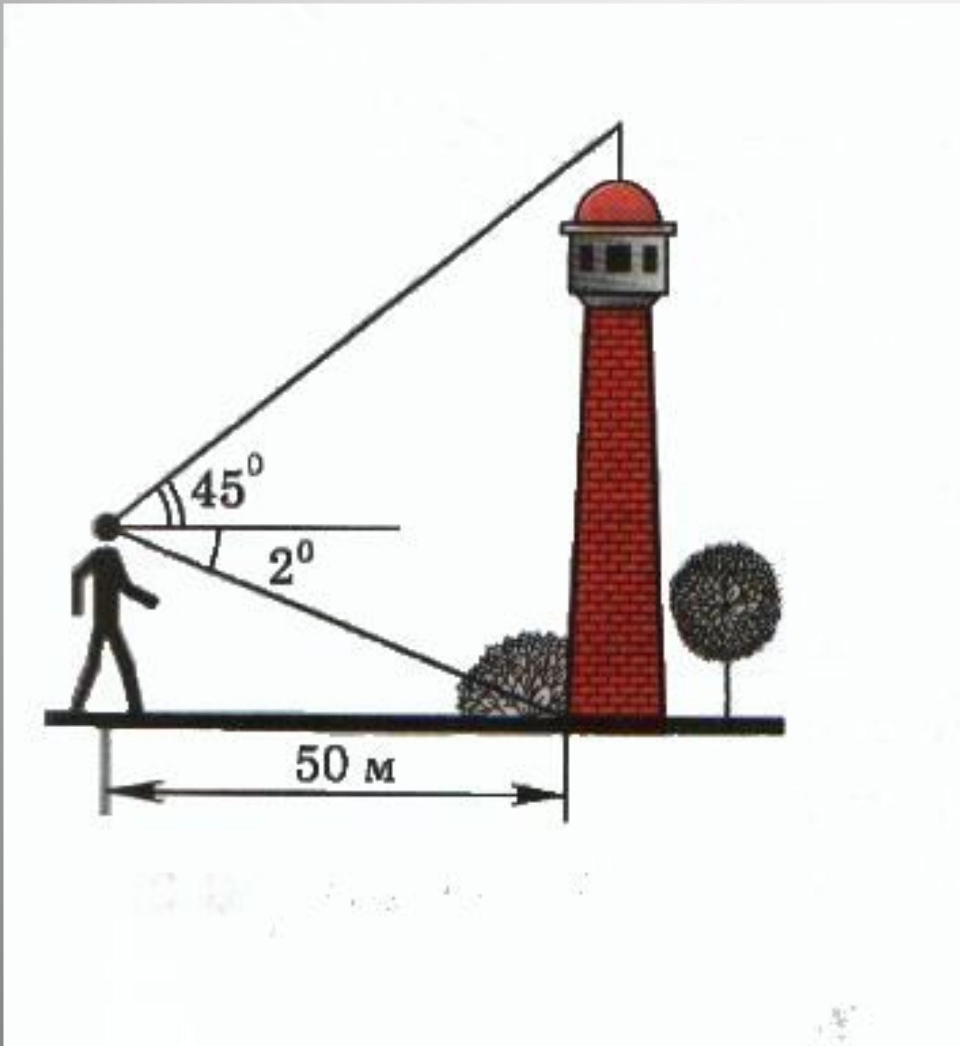
$= \sin(12°30' + 72°42') = \sin 85°12'$

$$\frac{x}{\sin 12°30'} = \frac{70}{\sin 85°12'}$$

$$x = \frac{70 \cdot \sin 12°30'}{\sin 85°12'} = \frac{70 \cdot 0{,}2164}{0{,}9965} = 15{,}2$$

ОТВЕТ: Ширина реки равна 15,2 м.

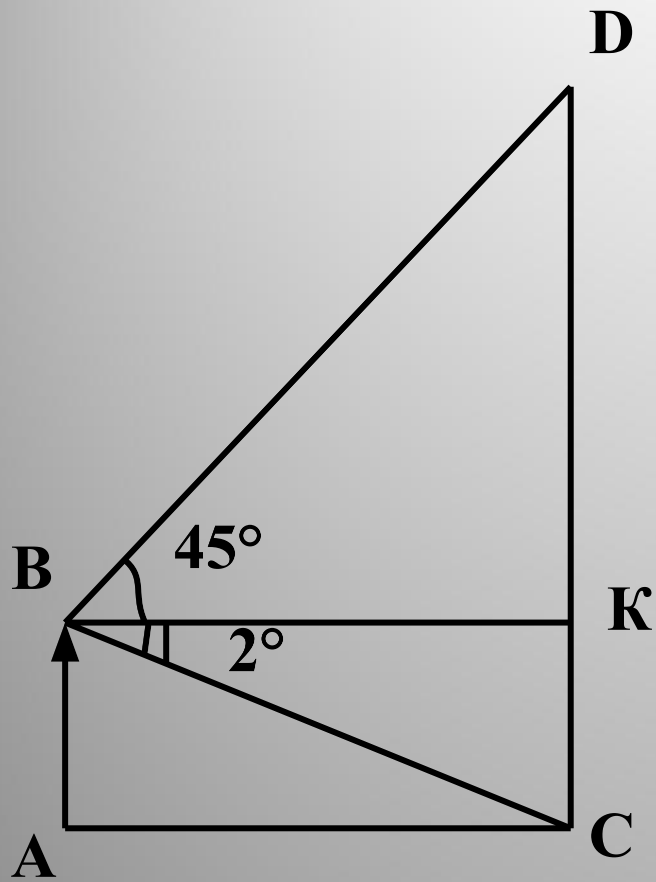
Решите задачу №5



Наблюдатель находится на расстоянии 50 м от башни, высоту которой хочет определить. Основание башни он видит под углом 2° к горизонту, а вершину – под углом 45° к горизонту. Какова высота башни?

?

Решение задачи №5



1) АВКС - прямоугольник, ВК = АС = 50 м

2) △ BDK: ∠B = 45°; ∠К = 90°, ∠D = 45° следовательно △BDK равнобедренный,

т. е. ВК = DК = 50 м

3) △ВКС; ∠В=2°, ВК=50 м

∠С=180-(2+90)=88°

По теореме синусов

$$\frac{KC}{\sin B} = \frac{BK}{\sin C}, \text{ то } \frac{KC}{\sin 2} = \frac{50}{\sin 88};$$

$$KC = \frac{50 \sin 2}{\sin 88} = \frac{50 \cdot 0{,}0349}{0{,}9994} \approx 2 \text{ м},$$

DC=50+2=52 м

ОТВЕТ:

Высота башни равна 52 м.


теперь я могу...
я научился...
было трудно ...
у меня получилось ...
было интересно ...
меня удивило ...
сегодня я узнал (а) ...