

9 классе

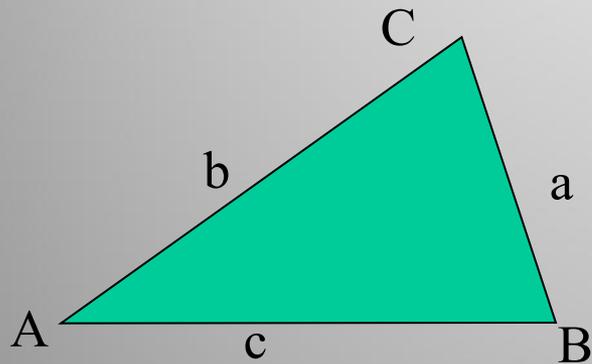
Практическое применение теоремы косинусов и синусов

ПОВТОРЕНИЕ

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Стороны треугольника прямо пропорциональны
синусам противоположных углов.

Отношение
сторон

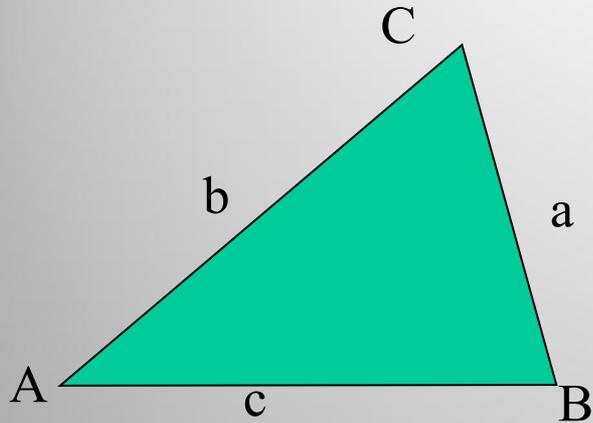


треугольника к
синусу
противоположащего
угла
равно диаметру
описанной
окружности.

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$



ПРИМЕР:



Дано: $\triangle ABC$, $c = AB = 3$ см,
 $a = BC = 5$ см, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Найти: $\sin C$

Решение:

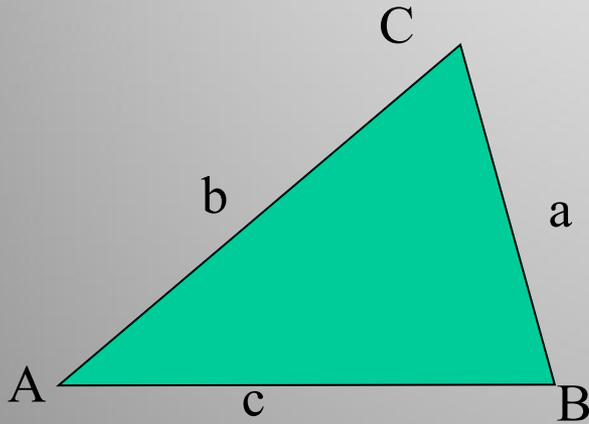
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

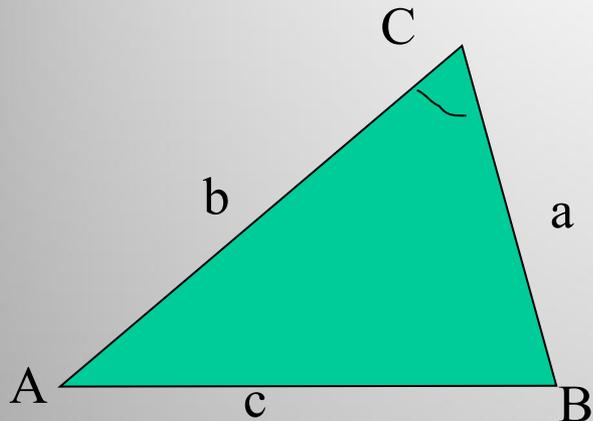


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Это частный
случай теоремы
Пифагора.
Почему?

ПРИМЕР:



Дано: $\triangle ABC$, $b = AC = 5$ см,
 $a = BC = 4$ см, $\cos C = \frac{1}{2}$

Найти: AB

Решение:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$AB^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 21$$

$$AB = \sqrt{21}$$

Практическое применение
теоремы косинусов и синусов

Решение задачи №1

Условие.

Футбольный мяч находится в точке А футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований В и С стоек ворот (рис.1). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

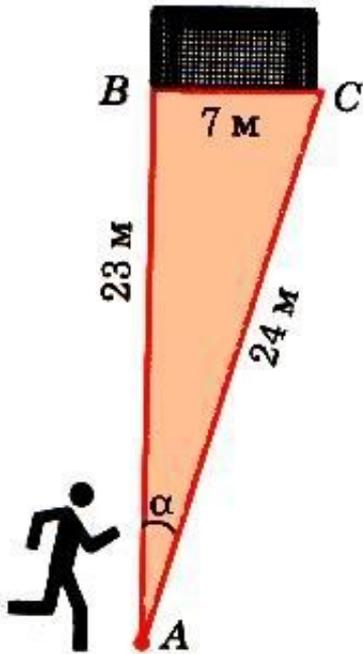


Рис. 1.

Решение.

Рассмотрим треугольник ABC, вершинами которого являются точка А расположения мяча и точки В и С в основаниях стоек ворот. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м и $a = BC = 7$ м. Эти данные позволяют решить треугольник ABC и найти угол α , равный углу А. С помощью теоремы косинусов определяем $\cos A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23}$$

Угол α находим по таблице: $\alpha \approx 16^\circ 57'$.

Решение задачи №2

Измерение высоты предмета

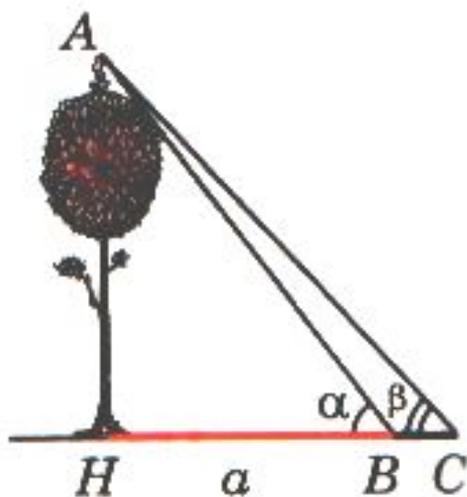


Рис. 2

Предположим, что требуется определить высоту $АН$ какого-либо предмета (рис. 2). Для этого отметим точку $В$ на определенном расстоянии a от основания $Н$ предмета и измерим угол $АВН$: $\angle АВН = \alpha$. По этим данным из прямоугольного треугольника $АВН$ находим высоту предмета: $АН = a \operatorname{tg} \alpha$.

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание $Н$ предмета, отметим две точки $В$ и $С$ на определенном расстоянии a друг от друга и измерим углы $АВН$ и $АСВ$: $\angle АВН = \alpha$ и $\angle АСВ = \beta$ (рис. 2). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника $АВС$, в частности $АВ$. В самом деле, $\angle АВН$ — внешний угол треугольника $АВС$, поэтому $\angle А = \alpha - \beta$.

Используя теорему синусов, находим $АВ$:
$$АВ = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Из прямоугольного треугольника $АВН$ находим высоту $АН$ предмета:

$$АН = АВ \cdot \sin \alpha. \quad \text{Итак, } АН = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Решение задачи №3

Измерение расстояния до недоступной точки

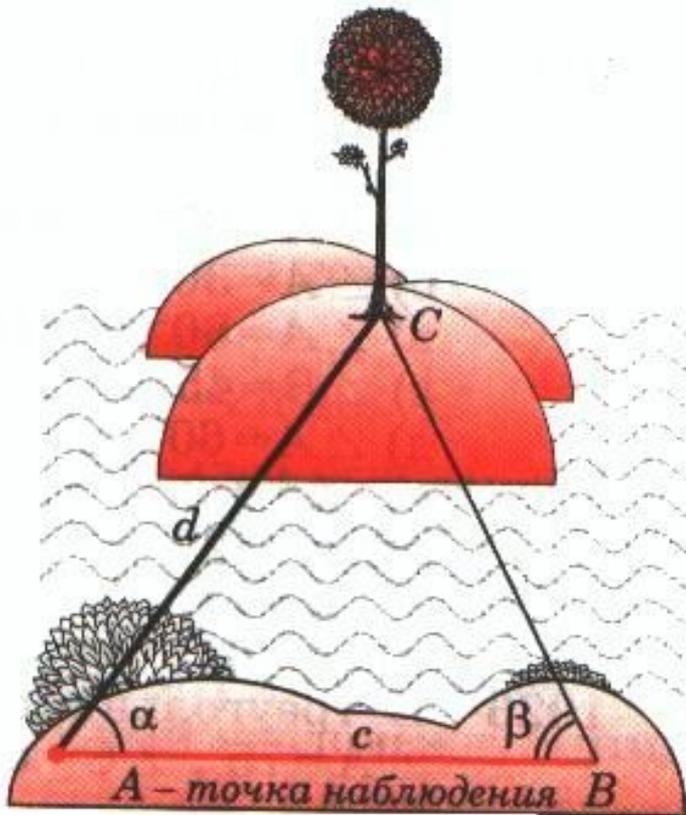


Рис. 3

Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 3). Напомним, что эту задачу мы уже решали в 8 классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи – с использованием формул тригонометрии.

На местности выберем точку B и измерим длину c отрезка AB . Затем измерим, например с помощью астролябии, углы A и B : $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Эти данные, т. е. c , α и β , позволяют решить треугольник ABC и найти искомое расстояние $d = AC$.

Сначала находим $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$,

$$\sin C = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

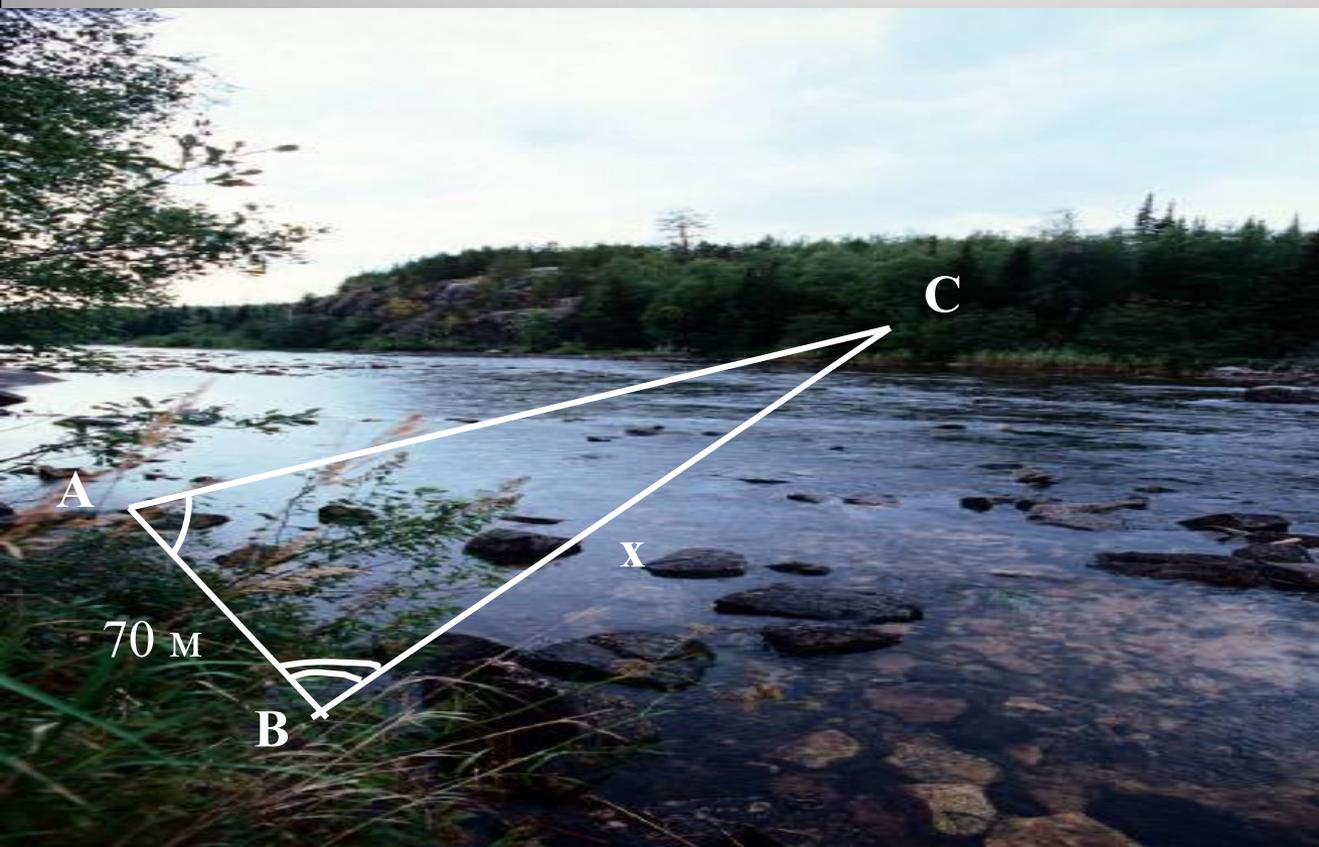
Затем с помощью теоремы синусов находим d . Так как,

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

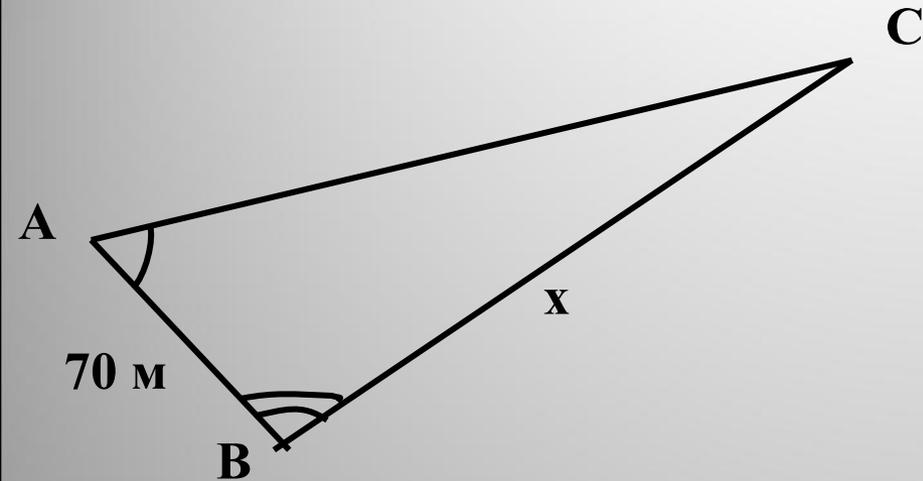
$$AC = d, AB = c, \angle B = \beta, \text{ то } d = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Решите задачу №4

Для определения ширины реки отметили два пункта А и В на берегу реки на расстоянии 70 м друг от друга и измерили углы САВ и АВС, где С – дерево, стоящее на другом берегу у кромки воды. Оказалось, что $\angle САВ=12^{\circ}30'$, $\angle АВС=72^{\circ}42'$. Найдите ширину реки.



Решение задачи №4



$$\frac{CB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$$

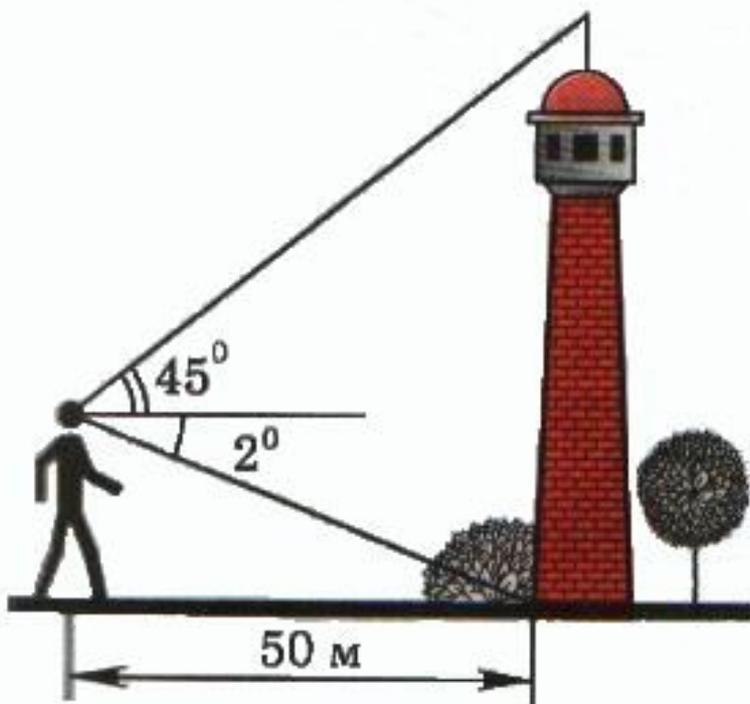
$$\begin{aligned}\sin \angle C &= \sin(\angle A + \angle B) = \\ &= \sin(12^\circ 30' + 72^\circ 42') = \sin 85^\circ 12'\end{aligned}$$

$$\frac{x}{\sin 12^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 85^\circ 12'}$$

$$x = \frac{70 \cdot \sin 12^\circ 30'}{\sin 85^\circ 12'} = \frac{70 \cdot 0,2164}{0,9965} = 15,2$$

ОТВЕТ: Ширина реки равна 15,2 м.

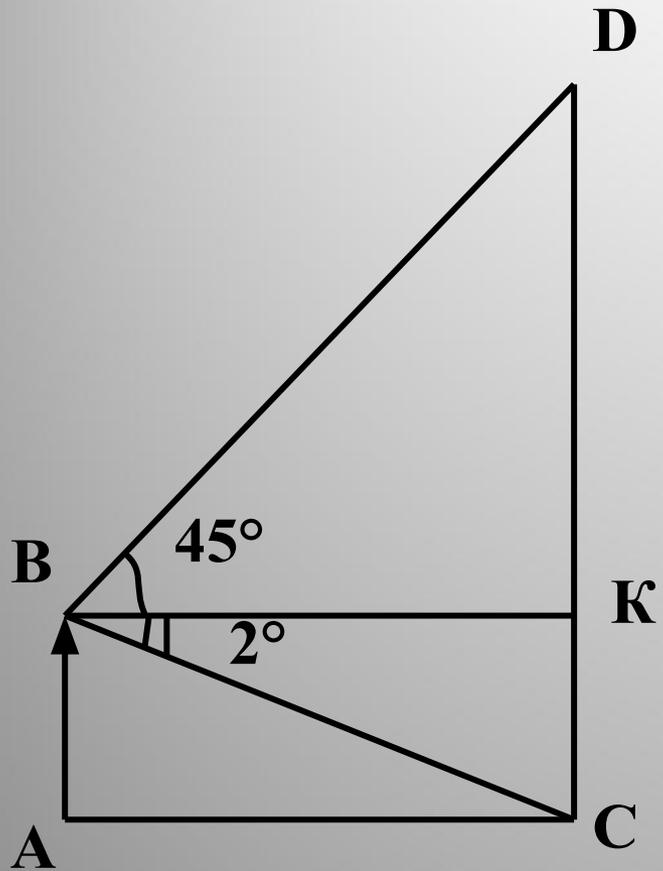
Решите задачу №5



Наблюдатель находится на расстоянии 50 м от башни, высоту которой хочет определить. Основание башни он видит под углом 2° к горизонту, а вершину – под углом 45° к горизонту. Какова высота башни?



Решение задачи №5



1) $\triangle BKC$ - прямоугольник, $BK = AC = 50$ м

2) $\triangle BDK$: $\angle B = 45^\circ$; $\angle K = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$
следовательно $\triangle BDK$ равнобедренный,

т. е. $BK = DK = 50$ м

3) $\triangle BKC$; $\angle B = 2^\circ$, $BK = 50$ м

$\angle C = 180 - (2 + 90) = 88^\circ$

По теореме синусов

$$\frac{KC}{\sin B} = \frac{BK}{\sin C}, \text{ то } \frac{KC}{\sin 2} = \frac{50}{\sin 88};$$

$$KC = \frac{50 \sin 2}{\sin 88} = \frac{50 \cdot 0,0349}{0,9994} \approx 2 \text{ м,}$$

$DC = 50 + 2 = 52 \text{ м}$

ОТВЕТ:

Высота башни равна 52 м.



теперь я могу...

я научился...

было трудно ...

у меня получилось ...

было интересно ...

меня удивило ...

сегодня я узнал (а) ...