

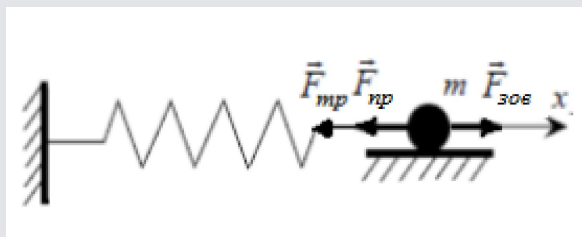


Лекція 4

Вимушені коливання.

Резонанс

Диференціальне рівняння вимушених коливань



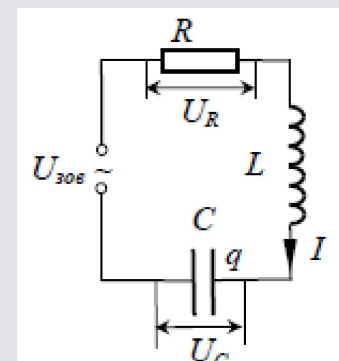
$$\vec{F}_{306}(t) = \vec{F}_{\max} \cos \omega t$$

$$ma = F_{np} + F_{mep} + F_{306}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - rv + F_{\max} \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t,$$

$$\text{де } \beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_m = \frac{F_{\max}}{m}$$



$$U_{306}(t) = U_{\max} \cos \omega t$$

$$U_{306} + U_R = \varepsilon_i + U \quad (t)$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt} + U_{\max} \cos \omega t$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_{\max} \cos \omega t$$

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = u_m \cos \omega t,$$

$$\text{де } \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad u_m = \frac{U_{\max}}{L}$$

Розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань

Оскільки рівняння неоднорідне, його розв'язок являє собою лінійну комбінацію загального розв'язку однорідного рівняння (це розв'язок рівняння вільних згасаючих коливань) та частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x(t) = x_{\text{заг.од.}}(t) + x_{\text{част.неод.}}(t)$$

У випадку **усталених** коливань (коли час дії зовнішньої періодичної сили значно довший за час релаксації) доданком вільних згасаючих коливань можна знехтувати і розглядати лише частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який буде мати вигляд:

$$x(t) = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

При цьому:

- усталені вимушені коливання завжди мають частоту зовнішньої періодичної сили;
- амплітуда цих коливань прямо пропорційна амплітуді зовнішньої періодичної сили;
- коливання відбуваються з запізненням по відношенню до коливань зовнішньої сили (тобто мають зсув фаз), причому поки $\omega < \omega_0$, це запізнення менше $\pi/2$, коли $\omega = \omega_0$, запізнення дорівнює значенню $\pi/2$, та для $\omega > \omega_0$, запізнення більше $\pi/2$.

Розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань

Часова залежність заряду для усталених коливань описується виразом:

$$q(t) = Q_{\max}(\omega) \cos(\omega t - \alpha),$$

де залежність амплітуди від частоти зовнішньої ЕРС має вигляд

$$Q_{\max}(\omega) = \frac{U_{\max}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

а зсув фаз між коливаннями заряду та зовнішньої ЕРС описується виразом

$$\alpha = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонанс

Як видно, амплітуда усталених вимушених коливань залежить від частоти зовнішньої періодичної сили (або зовнішньої ЕРС у випадку електромагнітних коливань):

$$Q_{\max}(\omega) = \frac{U_{\max}}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

з цього виразу також видно, що функція залежності амплітуди від частоти має максимум при значенні частоти, коли знаменник буде мати найменше значення.

Продиференціювавши підкореневий вираз та прирівнявши його до нуля,

$$\frac{d}{d\omega} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \right) = 2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8\beta^2\omega = 4\omega(2\beta^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)) = 0, \quad \text{або} \quad 2\beta^2 - \omega_0^2 + \omega^2 = 0$$

бачимо, що максимум амплітуди припадає на частоту:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Резонансом називається явище стрімкого зростання амплітуди вимушених коливань при зміні частоти коливань та наближенні частоти зовнішньої сили до власної частоти контуру.

Резонансні криві для різних значень опорів, побудовані для амплітуди напруги на конденсаторі.

Зверніть увагу, що в цьому випадку резонансна частота не співпадає ні з частотою контуру, ні з частотою згасаючих коливань.

На резонансній частоті амплітудне значення заряду має вигляд:

$$Q_{\max}(\omega_{\text{рез}}) = \frac{U_{\max}}{2L\beta\omega_0}$$

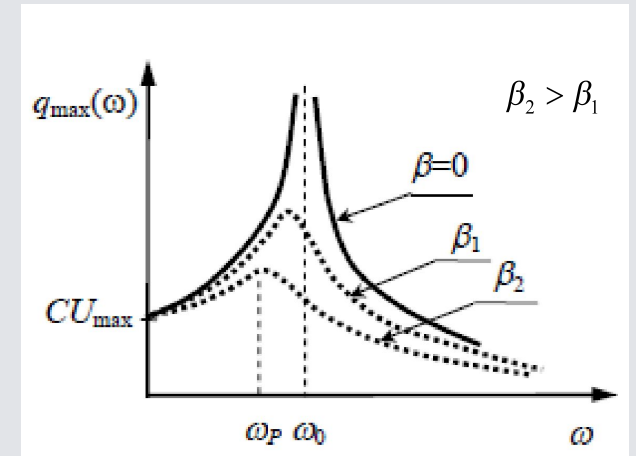
В нулі та на нескінченності амплітуда заряду дорівнює CU_{\max} та 0 відповідно.

Амплітуда напруги відрізняється від амплітуди заряду в C разів, і за умови слабого згасання

можна одержати: $U_{\max}(\omega_{\text{рез}}) = \frac{U_{\max}}{2LC\beta\omega_0}$

що дає змогу з резонансної кривої обчислити добротність контуру:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_{\max}(\omega_{\text{рез}})}{U_{\max}}$$



Тепер проаналізуємо зміну амплітуди струму: $I_{\max} = \omega Q_{\max} = \frac{\omega U_{\max}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$.

Поділимо чисельник та знаменник на частоту, після чого знову продиференціюємо підкореневий вираз:

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2 \right) = \frac{d}{d\omega} (\omega_0^4 \omega^{-2} - 2\omega_0^2 + \omega^2 + 4\beta^2) = -2\omega_0^4 \omega^{-3} + 2\omega = 0.$$

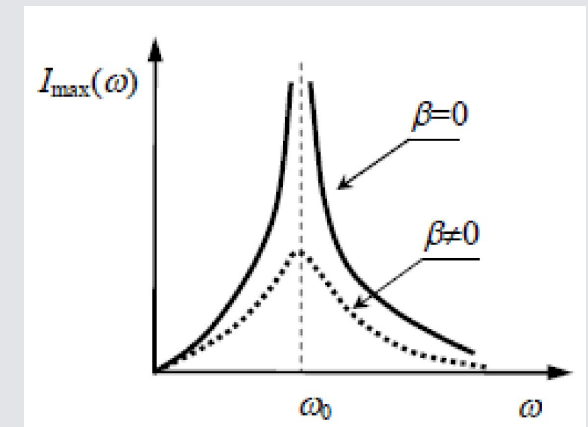
Якщо поділити ліву і праву частину на 2ω , це призводить до рівності:

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0$$

На резонансній частоті амплітуда сили струму становить:

$$I_{\max}(\omega_{\text{рез}}) = \frac{U_{\max}}{2\beta L} = \frac{U_{\max}}{R}.$$

В нулі та на нескінченності амплітуда струму обертається в нуль.



Досліджуючи залежність від частоти амплітуди сили струму, можна показати інший спосіб обчислення добротності контура. Згадаємо, що добротність можна виразити як $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T_3} = \frac{\pi \omega_0}{\beta \cdot 2\pi} = \frac{\omega_0}{2\beta}$ (тут застосовано наближення слабого згасання).

На графіку слід вибрати інтервал частот для значення амплітуди струму

$I_{\max}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\max}(\omega_{\text{рез}})$ відповідає припустимій зміні сигналу на 3 дБ або на 30% і становить 0,7 від резонансного значення амплітуди.

Співставивши $I_{\max}(\omega) = \frac{\omega U_{\max}}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$, одержимо: $I_{\max}(\omega_{\text{рез}}) = \frac{U_{\max}}{2\beta L}$

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} = \sqrt{2} \cdot 2\beta \omega$$

Піднісши до квадрату обидві частини та ввівши після спрощення рівності

$$\omega_0 - \omega = \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \omega_0 + \omega \approx 2\omega_0, \quad \omega \approx \omega_0,$$

одержимо наближено, що $\Delta\omega \approx 2\beta$ яке при підстановці у вираз добротності $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ призводить до

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

