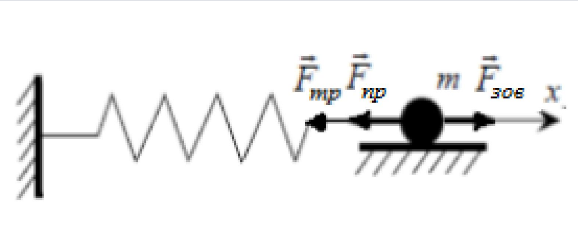
Лекція 4

Вимушені коливання. Резонанс

Диференціальне рівняння вимушених коливань



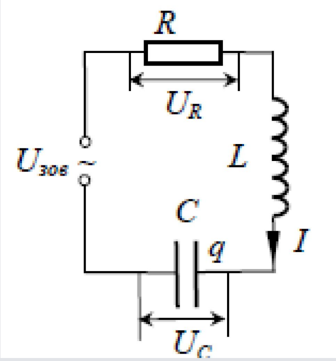
$$\vec{F}_{зов}(t) = \vec{F}_{max} cos\omega t$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{пр} + \vec{F}_{тер} + \vec{F}_{зов}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - rv + F_{max} cos\omega t$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0{}^2 x = f_m cos\omega t,}$$

$$де \quad \beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}, \quad f_m = \frac{F_{max}}{m}$$



$$U_{зов}(t) = U_{max} cos\omega t$$

$$U_C + U_R = \varepsilon_i + U_{зов}(t)$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L\frac{dI}{dt} + U_{max} cos\omega t$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_{max} cos\omega t$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0{}^2 q = u_m cos\omega t,}$$

$$де \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}, \quad u_m = \frac{U_{max}}{L}$$

Розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань

Оскільки рівняння неоднорідне, його розв'язок являє собою лінійну комбінацію загального розв'язку однорідного рівняння (це розв'язок рівняння вільних згасаючих коливань) та частинного розв'язку неоднорідного рівняння: $x(t) = x_{заг.од.}(t) + x_{част.неод.}(t)$

У випадку усталених коливань (коли час дії зовнішньої періодичної сили значно довший за час релаксації) доданком вільних згасаючіх коливань можна знехтувати і розглядати лише частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який буде мати вигляд:

$$x(t) = \frac{f_m}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^{\,2} - \omega^2}\right)$$

При цьому:

- *усталені вимушені коливання завжди мають частоту зовнішньої періодичної сили;*
- *амплітуда цих коливань прямо пропорційна амплітуді зовнішньої періодичної сили;*
- *коливання відбуваються з запізненням по відношенню до коливань зовнішньої сили (тобто мають зсув фаз), причому поки $\omega < \omega_0$, це запізнення менше $\pi/2$, коли $\omega = \omega_0$, запізнення дорівнює значенню $\pi/2$, та для $\omega > \omega_0$, запізнення більше $\pi/2$.*

Розв’язок диференціального рівняння вимушених коливань

Часова залежність заряду для усталених коливань описується виразом:

$$q(t) = Q_{max}(\omega)cos(\omega t - \alpha),$$

де залежність амплітуди від частоти зовнішньої ЕРС має вигляд

$$Q_{max}(\omega) = \frac{U_{max}}{L\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

а зсув фаз між коливаннями заряду та зовнішньої ЕРС описується виразом

$$\alpha = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}.$$

Резонанс

Як видно, амплітуда усталених вимушених коливань залежить від частоти зовнішньої періодичної сили (або зовнішньої ЕРС у випадку електромагнітних коливань):

$$Q_{\max}(\omega)=\frac{U_{\max}}{L\sqrt{\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}},$$

з цього виразу також видно, що функція залежності амплітуди від частоти має максимум при значенні частоти, коли знаменник буде мати найменше значення.

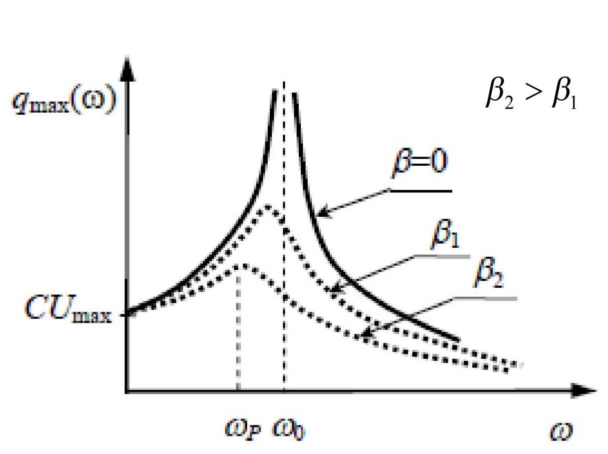
Продиференціювавши підкореневий вираз та прирівнявши його до нуля,

$$\frac{d}{d\omega}\left(\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right)=2\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)\cdot(-2\omega)+8\beta^2\omega=4\omega\left(2\beta^2-\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)\right)=0,\qquad \textit{або}\quad 2\beta^2-\omega_0^{\,2}+\omega^2=0$$

бачимо, що максимум амплітуди припадає на частоту:

$$\boxed{\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^{\,2}-2\beta^2}.}$$

Резонансом *називається явище стрімкого зростання амплітуди вимушених коливань при зміні частоти коливань та наближенні частоти зовнішньої сили до власної частоти контуру.*



Резонансні криві для різних значень опорів, побудовані для амплітуди представлені на рисунку. Аналогічний вигляд мають резонансні напруги на конденсаторі.

Зверніть увагу, що в цьому випадку резонансна частота не співпадає ні з частотою контуру, ні з частотою згасаючих коливань.

На резонансній частоті амплітудне значення заряду має вигляд:

$$Q_{\max}(\omega_{рез}) = \frac{U_{\max}}{2L\beta\omega_з}$$

В нулі та на нескінченності амплітуда заряду дорівнює CU_{max} *та 0 відповідно.*

Амплітуда напруги відрізняється від амплітуди заряду в C разів, і за умови слабкого згасання можна одержати: $U_{\max}(\omega_{рез}) = \dfrac{U_{\max}}{2LC\beta\omega_0}$

що дає змогу з резонансної кривої обчислити добротність контуру: $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{U_{\max}(\omega_{рез})}{U_{\max}}$

Тепер проаналізуємо зміну амплітуди струму: $I_{\max} = \omega Q_{\max} = \dfrac{\omega U_{\max}}{L\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$

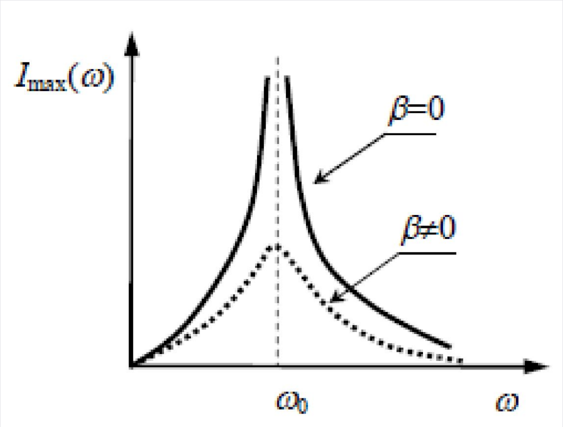
Поділимо чисельник та знаменник на частоту, після чого знову продиференціюємо підкореневий вираз:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2}{\omega^2} + 4\beta^2\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\omega_0{}^4\omega^{-2} - 2\omega_0{}^2 + \omega^2 + 4\beta^2\right) = -2\omega_0{}^4\omega^{-3} + 2\omega = 0.$$

Якщо поділити ліву і праву частину на 2ω, це призводить до рівності: $\boxed{\omega_{рез} = \omega_0}$

На резонансній частоті амплітуда сили струму становить:

$$I_{\max}(\omega_{рез}) = \frac{U_{\max}}{2\beta L} = \frac{U_{\max}}{R}.$$



В нулі та на нескінченності амплітуда струму обертається в нуль.

Досліджуючи залежність від частоти амплітуди сили струму, можна показати інший спосіб обчислення добротності контура. Згадаємо, що добротність можна виразити як $Q=\frac{\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{\beta T_з}=\frac{\pi\omega}{\beta\cdot 2\pi}\approx\frac{\omega_0}{2\beta}$ *(тут застосовано наближення слабкого згасання).*

На графіку слід вибрати інтервал частот для значення амплітуди струму $I_{\max}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}I_{\max}(\omega_{рез})$, *це відповідає припустимій зміні сигналу на 3 дБ або на 30% і становить 0,7 від резонансного значення амплітуди.*

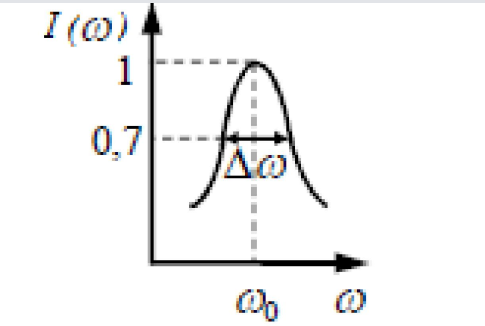
Співставивши $I_{\max}(\omega)=\frac{\omega U_{\max}}{L\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$ *та* $I_{\max}(\omega_{рез})=\frac{U_{\max}}{2\beta L}$*, одержимо:*

$$\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}=\sqrt{2}\cdot 2\beta\omega$$

Піднісши до квадрату обидві частини та ввівши після спрощення рівності

$$\omega_0-\omega=\frac{\Delta\omega}{2},\ \omega_0+\omega\approx 2\omega_0,\ \omega\approx\omega_0,$$

одержимо наближено, що $\Delta\omega\approx 2\beta$*, яке при підстановці у вираз добр*



призводить до

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$