

# Минимизация ДНФ методом Квайна

---

ЛЕКЦИЯ

# Метод Квайна

---

*Способ представления функции в ДНФ или КНФ с минимальным количеством членов и минимальным набором переменных.*

Преобразование функции можно разделить на два этапа:

- на первом этапе осуществляется переход от канонической формы (СДНФ или СКНФ) к так называемой **сокращённой форме**;
- на втором этапе — переход от сокращённой формы к **минимальной форме**.

# Первый этап (получение сокращённой формы)

---

Представим, что заданная функция  $f$  представлена в СДНФ. Для осуществления первого этапа преобразование проходит два действия:

1. *Операция склеивания;*
2. *Операция поглощения.*

Операция склеивания сводится к нахождению пар членов, соответствующих виду  $w \cdot x$  или  $w \cdot \bar{x}$ , и преобразованию их в следующие выражения:  $w \cdot x \vee w \cdot \bar{x} = w \cdot (x \vee \bar{x}) = w$ . Результаты склеивания  $w$  теперь играют роль дополнительных членов.

Необходимо найти все возможные пары членов (каждый член с каждым).

# Получение сокращённой формы

---

Потом выполняется *операция поглощения*. Она основана на равенстве  $w \vee w \cdot z = w \cdot (1 \vee z) = w$  (член  $w$  поглощает выражение  $w \cdot z$ ).

Вследствие этого действия из логического выражения вычёркиваются все члены, поглощаемые другими переменными, результаты которых получены в *операции склеивания*.

Обе операции первого этапа могут выполняться до тех пор, пока это может быть осуществимо.

# Пример

---

Пусть есть таблица истинности:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|-------|-------|-------|--------------------|
| 0     | 0     | 0     | 0                  |
| 0     | 0     | 1     | 1                  |
| 0     | 1     | 0     | 0                  |
| 0     | 1     | 1     | 0                  |
| 1     | 0     | 0     | 1                  |
| 1     | 0     | 1     | 1                  |
| 1     | 1     | 0     | 1                  |
| 1     | 1     | 1     | 1                  |

$$СДНФ(f) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$$

После операции склеивания наша функция принимает вид:

$$f = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3$$

# Результаты упрощения

---

Получившиеся пять членов представляют собой результаты склеивания. Далее можно приступить как к поглощению, так и произвести новые склеивания:

$$f = x_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3$$

Теперь действительно наступает этап поглощения:

$$f = x_1 \vee \bar{x}_2x_3$$

В такой форме функция состоит из так называемых простых импликант функции. Это наиболее простое представление функции по сравнению с её СДНФ.

# Второй этап (табличный)

---

Рассмотренный выше пример уже удовлетворяет определению минимальной формы, однако далеко не всегда после первого этапа сокращённая форма совпадает с минимальной.

Ещё могут оставаться члены, чьё удаление не изменяет конечный результат.

На данном этапе требуется удалить лишние переменные.

# Пример

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------------------|
| 0     | 0     | 0     | 0     | 1                       |
| 0     | 0     | 0     | 1     | 1                       |
| 0     | 0     | 1     | 0     | 1                       |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0                       |
| 0     | 1     | 0     | 0     | 0                       |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 0                       |
| 0     | 1     | 1     | 0     | 1                       |
| 0     | 1     | 1     | 1     | 0                       |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------------------|
| 1     | 0     | 0     | 0     | 0                       |
| 1     | 0     | 0     | 1     | 0                       |
| 1     | 0     | 1     | 0     | 0                       |
| 1     | 0     | 1     | 1     | 0                       |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 0                       |
| 1     | 1     | 0     | 1     | 0                       |
| 1     | 1     | 1     | 0     | 1                       |
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1                       |

# Получение СДНФ

*СДНФ*

$$(f) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \\ \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4$$

После первого этапа функция принимает вид:

$$f = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4$$

# Обработка импликантной матрицы

---

Мы вновь получили дизъюнкцию простых импликант, на этот раз в количестве пяти штук.

Чтобы получить минимальную форму, воспользуемся импликантной матрицей.

Столбцы в ней соответствуют членам СДНФ, а строки — членам сокращённой формы.

Отмечаются столбцы членов СДНФ, которые поглощаются отдельными простыми импликантами:

|                               | $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$ | $x_1x_2x_3\bar{x}_4$ | $x_1x_2x_3x_4$ |
|-------------------------------|--|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------|----------------------|----------------|
| $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ | ×                                      | ×                                |                                  |                            |                      |                |
| $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ | ×                                      |                                  | ×                                |                            |                      |                |
| $\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$       |  |                                  | ×                                | ×                          |                      |                |
| $x_2x_3\bar{x}_4$             |  |                                  |                                  | ×                          | ×                    |                |
| $x_1x_2x_3$                   |  |                                  |                                  |                            | ×                    | ×              |

- Импликанты, не подлежащие исключению, образуют ядро.
- Такие импликанты определяются по вышеуказанной матрице.
- Для каждой из них имеется хотя бы один столбец, перекрываемый только этой импликантой.
- Исключить все остальные члены сокращённой формы, однако, нельзя, так как это может привести к превращению какой-либо другой импликанты в излишнюю.

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$$

---

Выбор остальных импликант, что войдут в минимальную форму, сводится к нахождению минимального набора неядровых импликант, которые покроют столбцы, не перекрываемые ядровыми.

Применительно к рассматриваемому случаю это будут третий и четвёртый столбец.

То, что можно исключить остальные импликанты, легко проверяется. На соответствующих наборах мы получаем значение 1, которая получается и на удалённых импликантах.

# Использование метода для получения минимальной КНФ

---

Для получения Минимальной конъюнктивной нормальной формы (МКНФ), используя метод Куайна, вводятся следующие критерии:

- для минимизации берётся не **СДНФ**, а **СКНФ** функции;
- склеиваемые пары членов меняются на:  $w \vee x$  или  $w \vee \bar{x}$ ;
- правило операции поглощения выглядит следующим образом:

$$z \cdot (z \vee y) = z \vee z \cdot y = z \cdot (1 \vee y) = z$$