

Метод интервалов



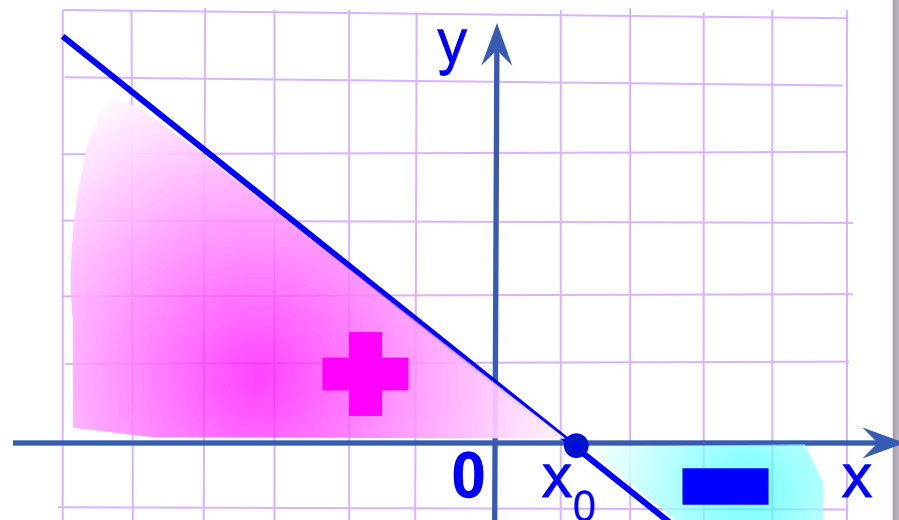
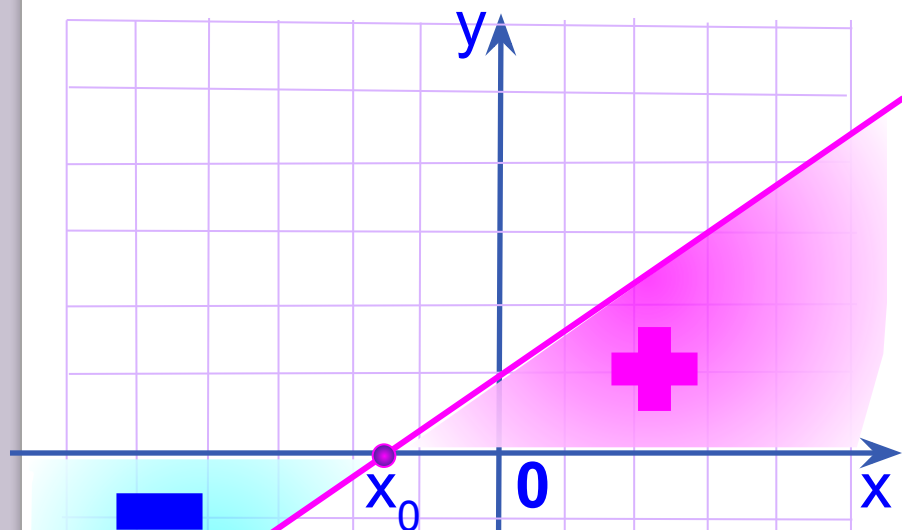
А Л Г Е Б Р А 8 К Л А С С

Корни многочлена делят числовую ось на промежутки, на каждом из которых функция сохраняет свой знак без изменения - либо везде положителен, либо отрицателен.

Исследуем линейную функцию: $y = kx + b$

$$k > 0$$

$$k < 0$$



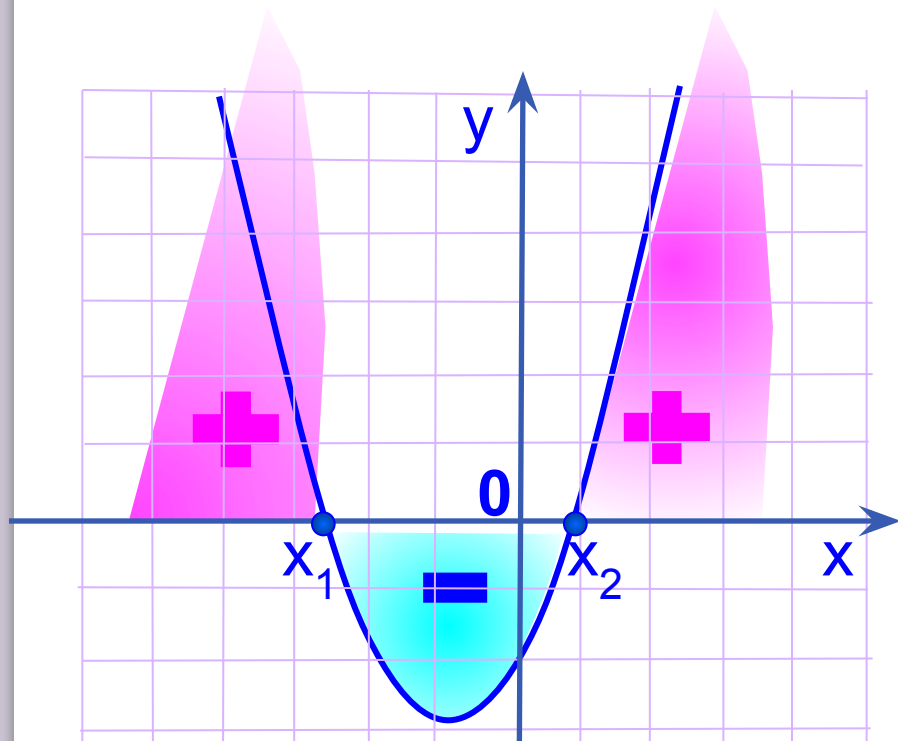
ЭТО ВАЖНО!

При переходе через корень функция **сменила свой знак** на противоположный, и знак крайнего правого промежутка совпадает со знаком старшего коэффициента.

Исследуем квадратичную функцию: $y = ax^2 + bx + c$

$$a > 0, D > 0$$

$$a < 0, D > 0$$

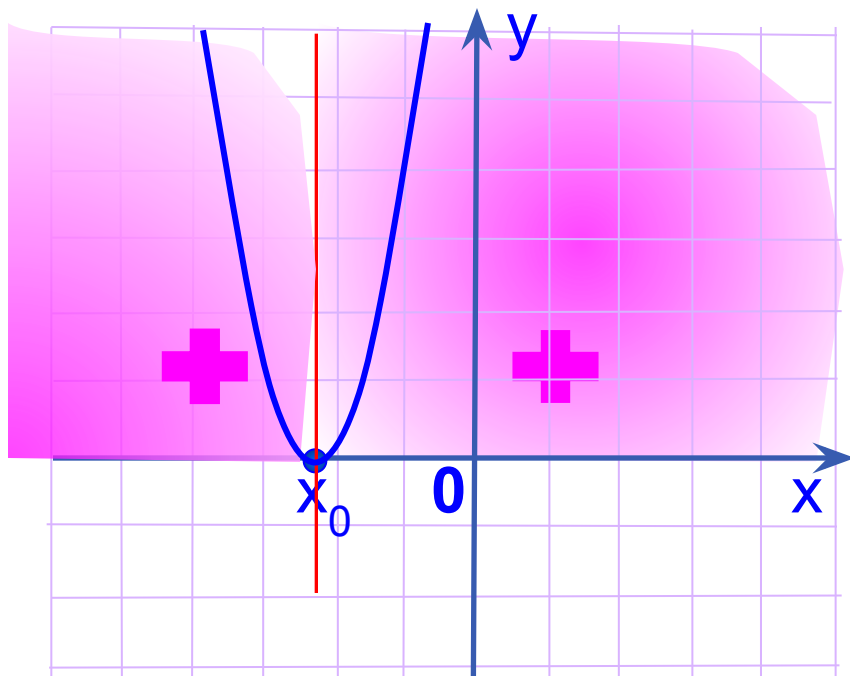


ЭТО ВАЖНО!

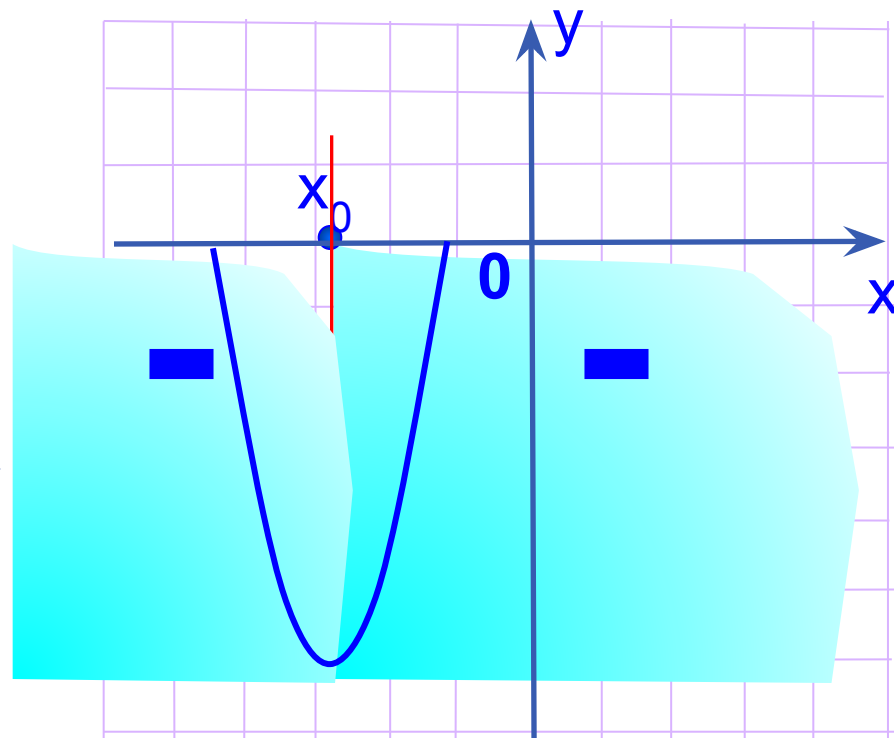
При переходе через корень функция **сменила свой знак** на противоположный, и знак крайнего правого промежутка совпадает со знаком старшего коэффициента.

Исследуем квадратичную функцию: $y = ax^2 + bx + c$

$$a > 0, D = 0$$



$$a < 0, D = 0$$



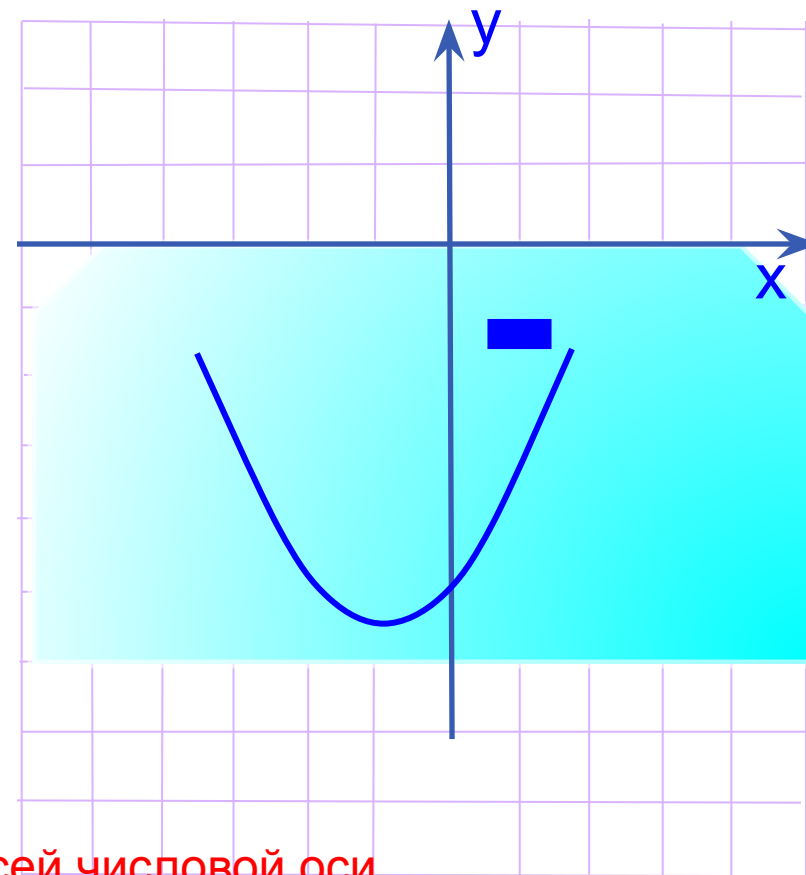
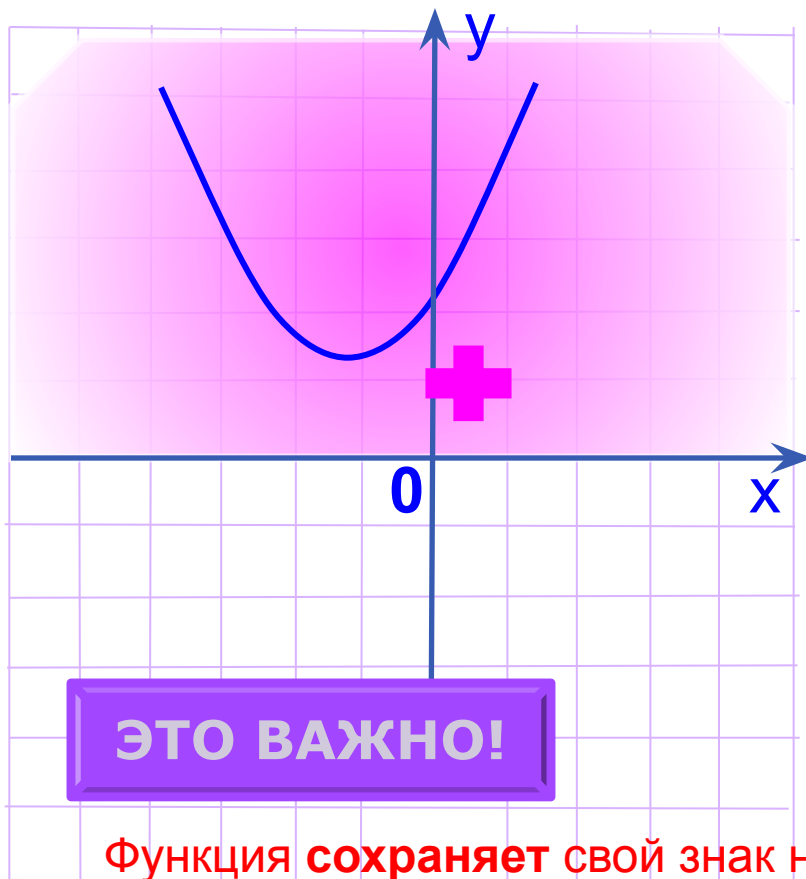
ЭТО ВАЖНО!

При переходе через корень функции свой знак **не поменяла**, знак старшего коэффициента совпадает со знаком крайнего правого промежутка.

Исследуем квадратичную функцию: $y = ax^2 + bx + c$

$$a > 0, D < 0$$

$$a < 0, D < 0$$



Выводы:

1) если корень функции встречается **нечетное** число раз, то при переходе через него функция меняет свой знак **на противоположный**;

- если корень встречается **четное** число раз, то при переходе через него функция свой знак **сохраняет**;

2) если корней нет, то функция сохраняет свой знак на всей числовой оси;

3) знак на любом из промежутков можно определить методом подстановки;

4) знак справа от большего корня совпадает со знаком старшего коэффициента многочлена.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов:

- привести неравенство к сравнению многочлена с нулем;
- найти корни многочлена, для дробно – рациональных неравенств корни числителя и знаменателя находят отдельно;
- нанести корни на числовую ось (если неравенство строгое, то корни на числовой оси «выкалываем»; корни знаменателя «выкалываем» всегда, т. к. на нуль делить нельзя);
- определить знак на одном из промежутков;
- расставить знаки на всех остальных промежутках;
- записать ответ в соответствии со знаком неравенства.

ЭТО ВАЖНО!

Методом интервалов решают неравенства с нулем в правой части:

$$f(x) > 0; \frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Решение неравенств

$$\text{№1. } a = 1 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0$$

Неравенство готово для решение методом интервалов, т. к. в правой части находится нуль. Находим корни.

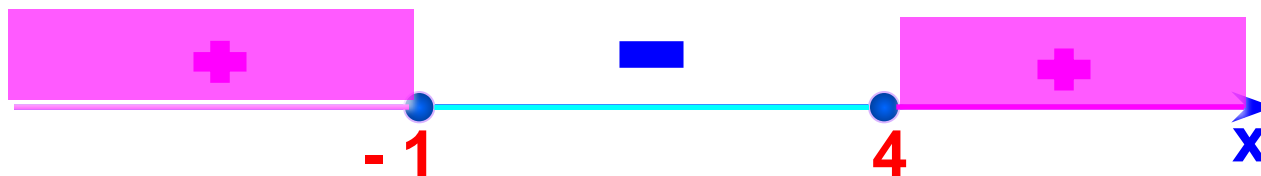
$$\text{Корни : } x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 x_2 = -4$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -1$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$$

$$\text{№2. } a = -1 < 0 \\ -x^2 + 6x - 8 > 0$$

Корни : $-x^2 + 6x - 8 = 0 \mid \times (-1)$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 x_2 = 8$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 4$$



Ответ: $(2; 4)$

№3. $3x^2 \leq 1$

$a = 3 > 0$ $3x^2 - 1 \leq 0$

Корни : $3x^2 - 1 = 0$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

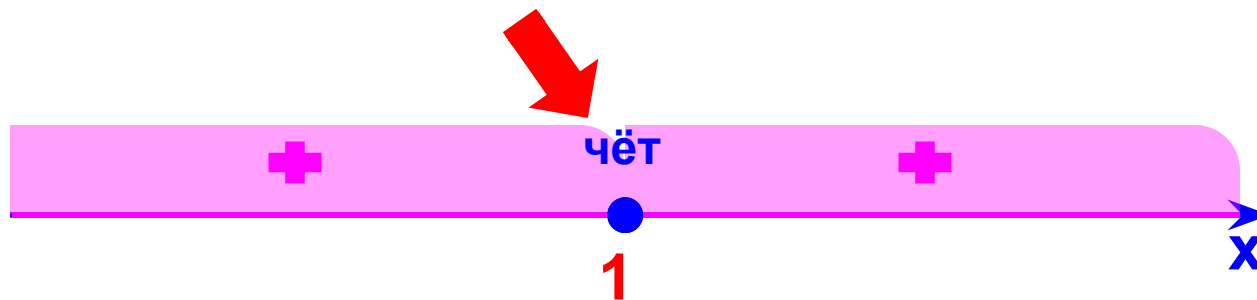


Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$

$a = 1 > 0$

№5. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

Корни : $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $x = 1$ (2 раза)

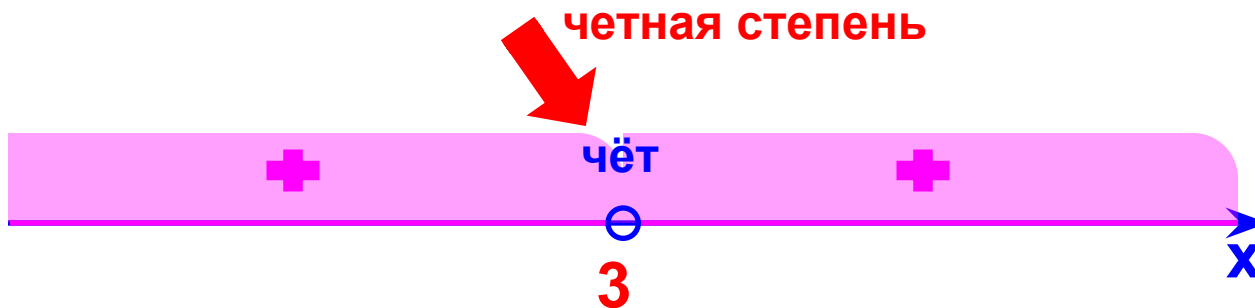


Ответ: \emptyset
Ответ: $(-\infty; +1) \cup (1; +\infty)$

$$\text{№8. } (x - 3)^{18} > 0$$

Корни : $x - 3 = 0$
 $x = 3$ (18 раз)

Обращаем внимание на знак перед старшим коэффициентом и на четность – нечетность степени.

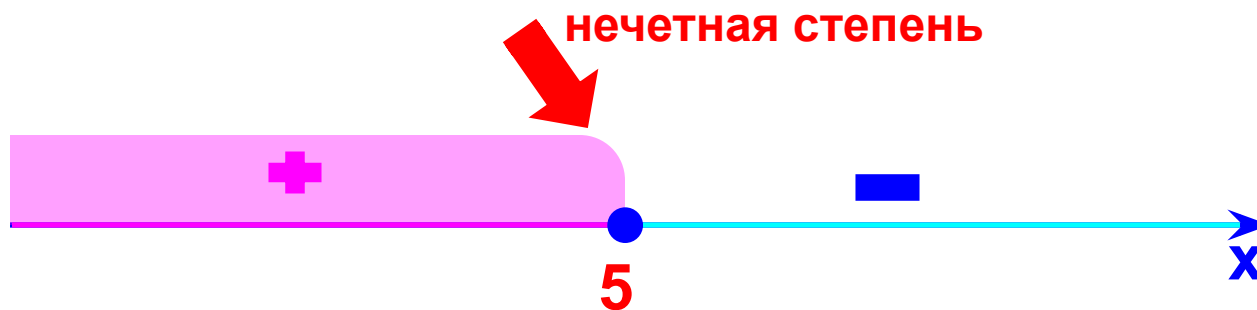


Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

$$\text{№9. } a = -1 < 0 \quad (5 - x)^5 \geq 0$$

Корни : $5 - x = 0$

$x = 5$ (5 раз)



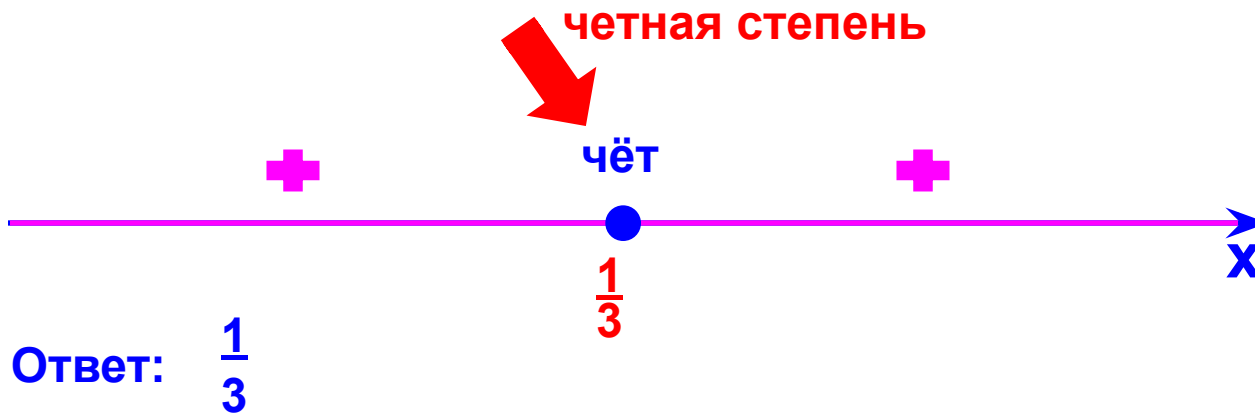
Ответ: $(-\infty ; 5]$

$$\text{№10. } (1 - 3x)^{50} \leq 0$$

$a = -3 < 0$

Корни : $1 - 3x = 0$

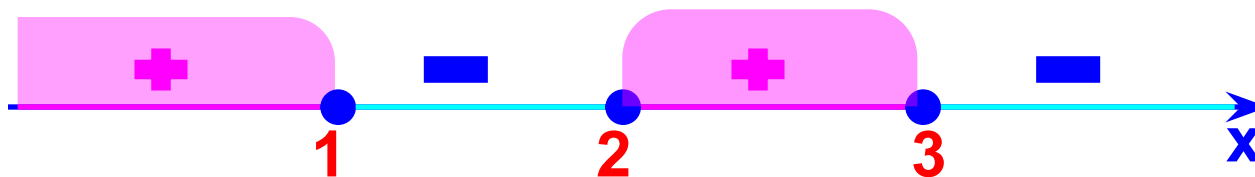
$$x = \frac{1}{3} \text{ (50 раз)}$$



$$\text{№11. } (x - 1)^{a_1 = 1 > 0} (x - 2)^{a_2 = 1 > 0} (3 - x)^{a_3 = -1 < 0} \geq 0$$

Корни : 1 ; 2 ; 3

Знак произведения отрицательный.



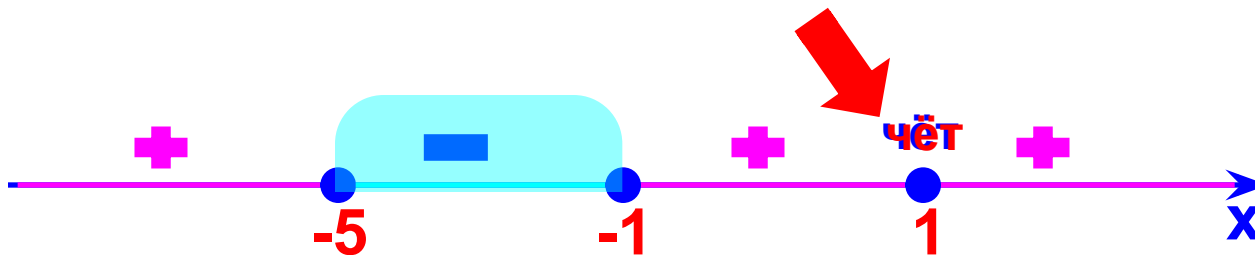
Ответ: $(-\infty ; 1] \cup [2; 3]$

$$\text{№12. } (x^2 - 1)(x^2 + 4x - 5) \leq 0$$

$a_1 = 1 > 0$ $a_2 = 1 > 0$

Корни : ± 1 ; -5 ; 1

Знак произведения положительный.



Ответ: $[-5; 1] \cup \{1\}$

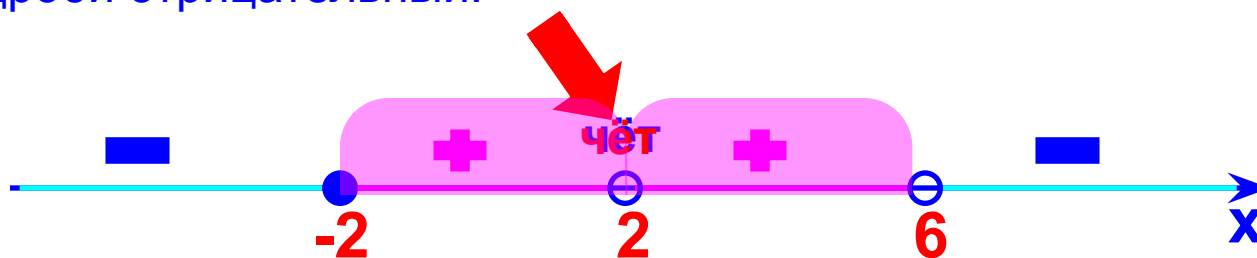
$$\text{№13. } \frac{4 - x^2}{x^2 - 8x + 12} \geq 0$$

$a_1 \leq 0$
 $a_2 > 0$

Корни числителя : ± 2

Корни знаменателя : $2; 6$ (корни знаменателя «выкалываем» всегда)

Знак дроби отрицательный.



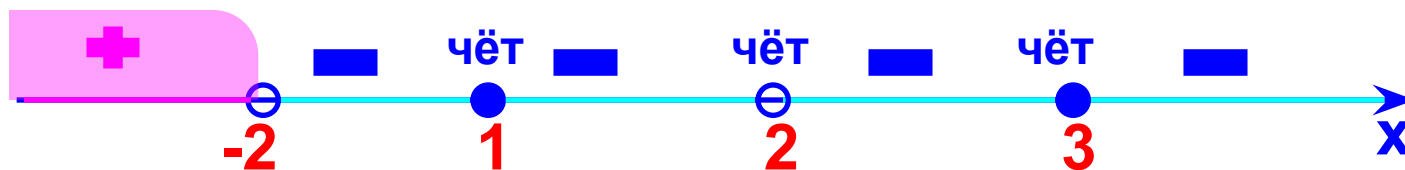
Ответ: $[-2; 2) \cup (2; 6)$

$$\text{№14. } \frac{(1-x)^2(2-x)^3(3-x)^4}{x^2-4} \geq 0$$

Корни числителя : ± 1 (2 раза); 2 (3 раза); 3 (4 раза)

Корни знаменателя : ± 2

Знак дроби отрицательный.

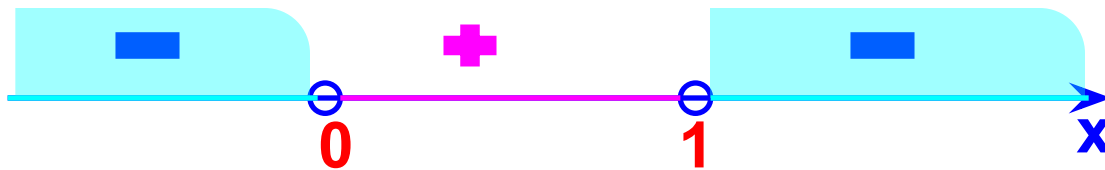


Ответ: $(-\infty; 2) \cup \{1; 3\}$

№15. $\frac{1}{x} < 1$
 $\frac{1}{x} - 1 < 0$
 $\frac{1-x}{x} < 0$

Корни числителя : 1

Корни знаменателя : 0



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$