ДИНАМИКА

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- Яблонский А.А. Теоретическая механика.
- Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, Т.1,2. 2002.
- Диевский В.А. Курс лекций по теоретической механике. Ч. 1,2. СПб.: ВИТУ, 2002.
- Теоретическая механика. Динамика. Учебное пособие / А.С.Аистов, А.С.Баранова, Н.Ю. Трянина.- Н.Новгород: Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет.

Тема 1.
Основные законы механики

1.1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение механических систем под действием сил.

Динамика является синтезом двух предыдущих разделов теоретической механики:

- **статики**, которая изучает преобразования систем сил и условия их равновесия, и
- **кинематики**, которая изучает способы математического описания движения тел.

Задачи, решаемые методами динамики, условно можно разделить на две группы:

- **Первая задача динамики (прямая)** предполагает, что закон движения механической системы известен, а силы которые вызывают это движение необходимо найти.
- **Вторая задача динамики (обратная)** предполагает, что известны силы, действующие на механическую систему, а найти необходимо закон движения.

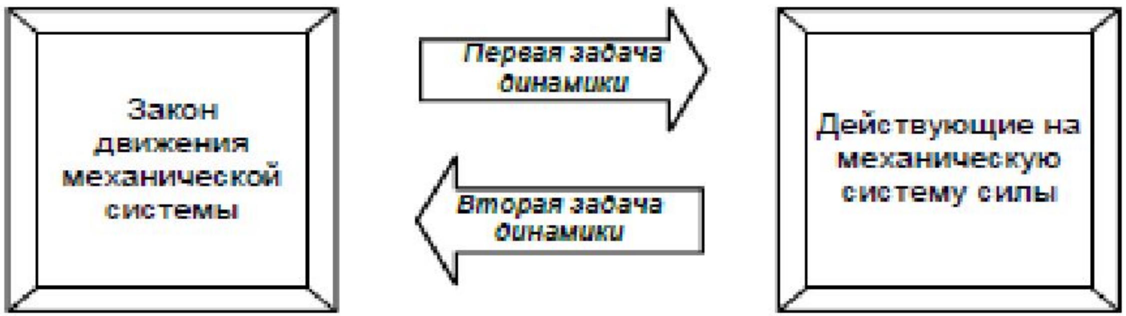

Рис. 1.1

1.2. Принципы Галилея.

Материальные точки, на которые не действуют никакие силы, будем называть **изолированными материальными точками**.

Принцип инерции Галилея состоит в следующем:

Всегда можно найти систему отсчета, в которой изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Такая система отсчета называется инерциальной.

Принцип относительности Галилея состоит в утверждении, что

Во всех инерциальных системах отсчета все механические процессы происходят одинаково, то есть все эти системы отсчета равноправны.

В неинерциальных системах те же процессы происходят иначе.

1.3. ЗАКОН РАВЕНСТВА ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Третий закон Ньютона, который принят в качестве одной из аксиом статики, считается справедливым также для движущихся тел и материальных точек:

Силы взаимодействия тел всегда направлены по одной прямой, направлены в противоположные стороны и равны по модулю.

1.4. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

Фундаментальное значение имеет **второй закон Ньютона**, который называют **основным законом динамики**:

Сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально этой силе:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1.1}$$

В уравнение (1.1) входит величина m, которая называется **массой материальной точки**. Она является мерой инертности точки: чем больше масса, тем меньшее ускорение сообщает точке приложенная сила

Масса измеряется в килограммах (кг), и, следовательно, единица силы (ньютон) будет равна $1\,H = 1\frac{кг \cdot м}{с^2}$.

Тема 2.
Динамика материальной точки

2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть материальная точка движется в инерциальной системе отсчета. Если движение задано в векторной форме, то

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

и тогда уравнение (1.1) примет вид, который называют **дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.**

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \qquad (2.1)$$

в котором сила может зависеть от положения точки, от скорости точки и от времени, то есть:

$$\vec{F} = \vec{F}\ \ \vec{r}, \vec{v}, t\ \ .$$

Спроектировав векторное равенство (2.1) на оси, получим **дифференциальные уравнения движения материальной точки в координатной (аналитической) форме**:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}. \qquad (2.2)$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественных осях могут быть получены с помощью формул кинематики, после чего они приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_\tau}{dt} = F_\tau \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}. \qquad (2.3)$$

2.4. Интегрирование уравнения прямолинейного движения

Пусть материальная точка движется в положительном направлении оси x.

Тогда $$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt}, \qquad F_x = F.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = F\;x,v,t$$

и рассмотрим способы его интегрирования с учетом начальных условий

$$\begin{cases} x_0 = x\big|_{t=0} \\ \dot{x}_0 = \dot{x}\big|_{t=0} \end{cases}$$

для трех частных случаев:

- когда сила зависит от времени $F = F\;t$,
- когда сила зависит от скорости $F = F\;v$,
- когда сила зависит от координаты $F = F\;x$.

Частный случай 1: сила зависит от времени:

$$m\frac{dv}{dt}=F\ \ t\ \ .$$

Умножив обе части уравнения на dt, разделим переменные t и v:

$$m\,dv=F\ \ t\ \ dt$$

При интегрировании уравнения можно пользоваться определенными или неопределенными интегралами.

Используем **неопределенные интегралы:**

$$m\int dv=\int F\ \ t\ \ dt\ ,\ \text{откуда}\ \ mv=\int F\ \ t\ \ dt+C_1\ ,$$

где C_1 определяется из начального условия.

Используем **определенные интегралы:**

$$m\int_{v_0}^{v} dv=\int_{0}^{t} F\ \ t\ \ dt$$

Интегрируя и выполняя подстановку, получим:

$$mv-mv_0=\int_{0}^{t}F\ \ t\ \ dt.$$

Частный случай 2: сила зависит от скорости:

$$m\frac{dv}{dt}=F\;\;v\;\;.$$

Умножив обе части равенства на $\dfrac{dt}{F\;\;v}$, получим

$$m\frac{dv}{F\;\;v}=dt$$

Используем **неопределенные интегралы:**

$$m\int\frac{dv}{F\;\;v}=\int dt,\quad \text{откуда}\quad m\int\frac{dv}{F\;\;v}=t+C_1,$$

где C_1 определяется из начального условия.

Используем **определенные интегралы:**

$$m\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv}{F\;\;v}=\int\limits_{0}^{t}dt\quad \text{или}\quad m\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv}{F\;\;v}=t\,.$$

После взятия интеграла и подстановки пределов получим выражение для v, не содержащее постоянных интегрирования.

Частный случай 3: сила зависит от координаты:

$$m\frac{dv}{dt}=F\ \ x\ \ .$$

Выполним замену $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v$, получим уравнение

$$mv\frac{dv}{dx}=F\ \ x\ \ .$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$mvdv=F\ \ x\ \ dx\,.$$

Используем **неопределенные интегралы:**

$$m\int vdv=\int F\ \ x\ \ dx\,,\ \text{откуда}\ \ m\frac{v^2}{2}=\int F\ \ x\ \ dx+C_1.$$

Постоянная C_1 определяется из начального условия.

Используем **определенные интегралы:**

$$m\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} F\ x\ dx,\ \text{откуда}\ m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F\ x\ dx$$

После взятия интеграла и подстановки пределов получим выражение для v, не содержащее постоянных интегрирования.

Примечание

Если требуется получить не только выражение скорости $v\ t$, но и выражение для координаты точки $x\ t$, то описанный процесс интегрирования следует повторить.

Тема 3.
Теорема о движении центра масс

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n точек. Положение k-й точки определяется радиус-вектором $\vec{r}_k$. Точка имеет массу m_k и движется со скоростью $\vec{v}_k$ и с ускорением $\vec{a}_k$.

Силы, действующие на материальную точку можно разбить на две группы.

Сделать это можно разными способами.

Первый способ

Разделим силы, действующие на k-ю точку, на внешние и внутренние. Получим следующую запись основного уравнения динамики:

$$m\vec{a} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

где $\vec{F}_k^e$ *external* – равнодействующая внешних сил,

$\vec{F}_k^i$ *internal* – равнодействующая сил, действующих со стороны тел системы.

Второй способ

Разделим силы, действующие на k-ю точку, на активные силы и реакции связей. Получим следующую запись:

$$m\vec{a} = \vec{F}_k + \vec{R}_k \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

где $\vec{F}_k$ – равнодействующая активных сил, приложенных к точке k,

$\vec{R}_k$ – равнодействующая реакций связей, действующих на точку k.

При этом выполнится равенство $\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i = \vec{F}_k + \vec{R}_k$.

Первый способ записи основного уравнения используется при решении задач динамики с помощью **ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ**, которые включают в себя:

- теорему о движении центра масс,
- теорему об изменении количества движения,
- теорему об изменении кинетического момента,
- теорему об изменении кинетической энергии.

Второй способ записи основного уравнения применяется при решении задач динамики методами **АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**, которые используют:

- принцип Лагранжа,
- принцип д'Аламбера,
- принцип д'Аламбера − Лагранжа,
- уравнения Лагранжа второго рода.

3.3. Теорема о движении центра масс механической системы

ТЕОРЕМА

Произведение массы системы на ускорение центра масс равно главному вектору внешних сил, действующих на точки системы:

$$m\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad (3.8)$$

или в проекциях на оси

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e \\ m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e \\ m\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e \end{cases} \qquad (3.9)$$

3.4. Сохранение движения центра масс (следствия из теоремы о движении центра масс системы)

Следствие 1

Если главный вектор внешних сил механической системы все время равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

Действительно, если $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = 0$, то из (3.8) получаем, что $\vec{a}_C = 0$, откуда $\vec{v}_C = const$.

Следствие 2

Если сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось все время равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось постоянна.

Действительно, если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0$, то из (3.9) получаем, что $\ddot{x}_C = 0$.

Отсюда следует, что $\dot{x}_C = const$ (центр масс движется по оси x равномерно или покоится: $v_{Cx} = const$).

Тема 4.
Теорема об изменении количества движения

4.1. Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость: $\vec{Q} = m\vec{v}$.

Количеством движения материальной системы называется векторная сумма количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \sum_{r=1}^{n} m_r \vec{v}_r \,. \tag{4.1}$$

Поскольку по формуле (3.6) $\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = m\vec{v}_C$, то

$$\vec{Q} = m\vec{v}_C \,. \tag{4.2}$$

Количество движения характеризует только поступательную часть движения и никакого отношения не имеет к его вращательной составляющей.

ТЕОРЕМА

Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e \tag{4.3}$$

или в проекциях на оси:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kx}^e \\ \dfrac{dQ_y}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{ky}^e. \\ \dfrac{dQ_z}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kz}^e \end{cases} \tag{4.4}$$

4.2. Теорема об изменении количества движения в интегральной форме

Импульсом силы за некоторый промежуток времени $0,t$ называется величина равная интегралу от силы по времени

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}\,dt \tag{4.5}$$

Если $\vec{F} = const$, то естественно, что $\vec{S} = \vec{F} \cdot \Delta t$, где Δt – промежуток времени.

Размерность импульса силы $S = H \cdot c = \frac{кг \cdot м}{c}$ совпадает с размерностью количества движения.

ТЕОРЕМА

изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за этот промежуток времени:

$$\Delta\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e \qquad (4.6)$$

или в проекциях на координатные оси

$$\begin{cases} \Delta Q_x = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e \\ \Delta Q_y = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e \\ \Delta Q_z = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e \end{cases} . \qquad (4.7)$$

Выводы:

- Для одной материальной точки теорема приобретает вид:

  $$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S},$$

  где $\vec{S}$ - импульс равнодействующей всех сил, приложенных к точке.
  То есть, **импульс является такой характеристикой силы, которая показывает насколько эта сила изменяет количество движения материальной точки или механической системы.**
- Внутренние силы не могут изменить количество движения механической системы.

4.3. Сохранение количества движения

Из теорем, доказанных в §4.1 и §4.1 можно сделать важные выводы.

Следствие 1

Если главный вектор внешних сил механической системы все время равен нулю, то вектор количества движения системы постоянен.

Действительно, если, $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^e \equiv 0$ то $\frac{d\vec{Q}}{dt} \equiv 0$ и, следовательно, $\vec{Q} \equiv const$, или $m\vec{v}_C \equiv const$.

Следствие 2

Если сумма проекций всех внешних сил механической системы на какую-либо ось все время равна нулю, то проекция количества движения на эту ось постоянна.

Действительно, если, $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^e \equiv 0$, то из (4.4) следует, что $\frac{dQ_x}{dt} \equiv 0$ и $Q_x \equiv const$.

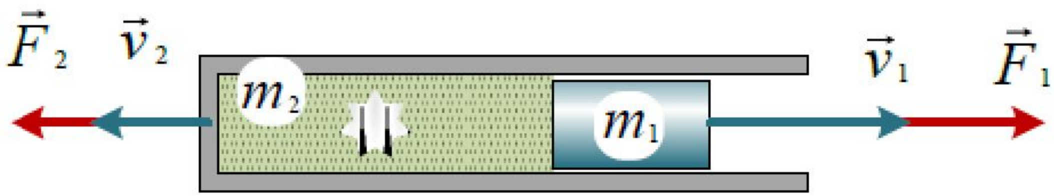

Рис. 4.1

При выстреле, например, $\vec{Q} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ и (в проекциях)

$Q_x = m_1 v_1 + m_2 v_2$, откуда $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$.

Отсюда видно, что скорость отката ствола будет равна $v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$.

Тема 5.
Моменты инерции тела и механической системы

5.1. Моменты инерции относительно осей

Установлено, что мерой инертности материального тела является его масса. Но это справедливо только для поступательного движения.

Для вращательного движения мерой инертности является величина, которая называется моментом инерции.

Моменты инерции точки

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси (осевым моментом инерции) называется величина, равная произведению массы точки на квадрат ее расстояния до этой оси.

Момент инерции принято обозначать буквами I или J, указывая при этом индекс соответствующей оси.

Пусть точка M в системе $Oxyz$ (рис. 5.1) имеет координаты x, y, z и массу m.

Тогда ее момент инерции относительно оси z будет равен:

$$J_z = m\,h^2$$

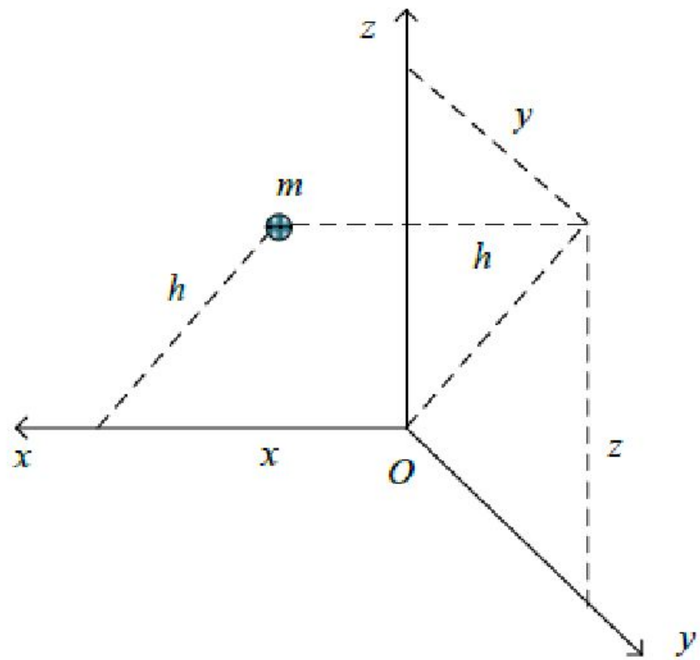

Рис. 5.1

Так как $h^2 = y^2 + z^2$, то

$$J_x = m \quad y^2 + z^2 \tag{5.1}$$

Аналогично получаются формулы относительно двух других осей:

$$J_y = m \quad z^2 + x^2$$

$$J_z = m \quad x^2 + y^2$$

Видно, что момент инерции всегда положительная величина.

Ее размерность $[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Механическая система из n материальных точек

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из n точек.

Пусть k-я точка имеет массу m_k и координаты x_k, y_k, z_k.

Тогда моменты инерции механической системы можно вычислить путем суммирования моментов инерции входящих в нее точек:

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \;\; y_k^2 + z_k^2 \;\;,$$

$$J_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \;\; z_k^2 + x_k^2 \;\;, \qquad (5.2)$$

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \;\; x_k^2 + y_k^2 \;\;.$$

Материальное тело

Рассмотрим твердое тело, в котором масса распределена непрерывно.

В этом случае тело следует поделить на бесконечно малые элементы объема с массами и вычислять моменты инерции путем интегрирования по всему объему тела:

$$J_x = \int_V y^2 + z^2 \ \ dm$$

$$J_y = \int_V z^2 + x^2 \ \ dm \qquad (5.3)$$

$$J_z = \int_V x^2 + y^2 \ \ dm$$

Радиус инерции

Момент инерции твердого тела относительно оси имеет размерность произведения массы на квадрат некоторой линейной величины.

Представим его в виде $$J_z = mi_z^2, \qquad (5.4)$$

где m - масса тела, i_z - радиус инерции тела относительно оси z.

Радиус инерции твердого тела относительно некоторой оси – это расстояние от оси до точки, в которой надо сконцентрировать массу тела, чтобы момент инерции этой точки относительно оси был равен моменту инерции тела.

1. Момент инерции тонкого однородного стержня (рис. 5.2)

Вычислим момент инерции однородного тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через его середину (рис. 5.2).

Масса единицы длины стержня равна m/l. Если выделить бесконечно малый элемент стержня длиной dx, лежащий на расстоянии x от оси Oz, то его масса будет ровна $dm = \frac{m}{l}\,dx$.

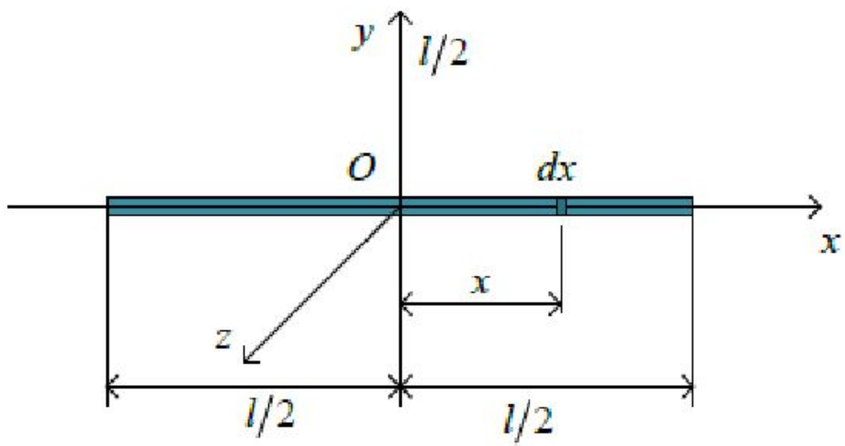

Рис. 5.2

Момент инерции относительно оси z можно определить путем интегрирования:

$$J_z = \int_V \left(x^2 + y^2\right) dm = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{+l/2} = ml^2/12 \qquad (5.5)$$

2.Тонкая однородная круглая пластина

Моменты инерции других однородных тел различной формы выводятся аналогично с помощью интегрирования.

Так момент инерции круглого однородного круглого диска массой m и радиуса r относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости (рис. 5.3, а) будет равен

$$J_z = \frac{mr^2}{2} \tag{5.6}$$

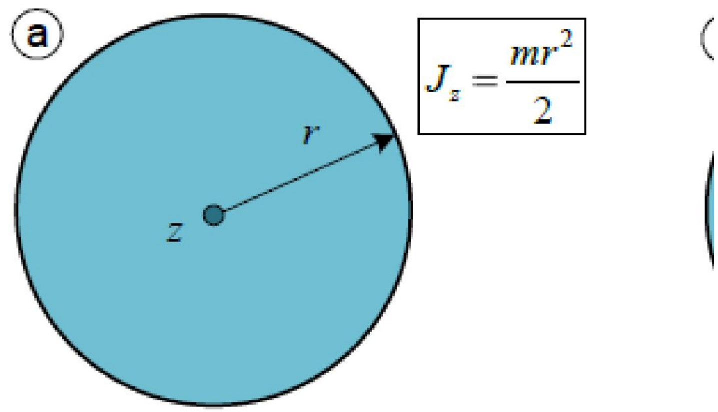

Рис. 5.3.

3.Круглый однородный цилиндр

Момент инерции круглого кольца (цилиндра, трубы) массой m, которая равномерно распределена вдоль окружности радиуса r, относительно оси, совпадающей с осью цилиндра (рис. 5.3, б), будет равен

$$J_z = mr^2. \tag{5.7}$$

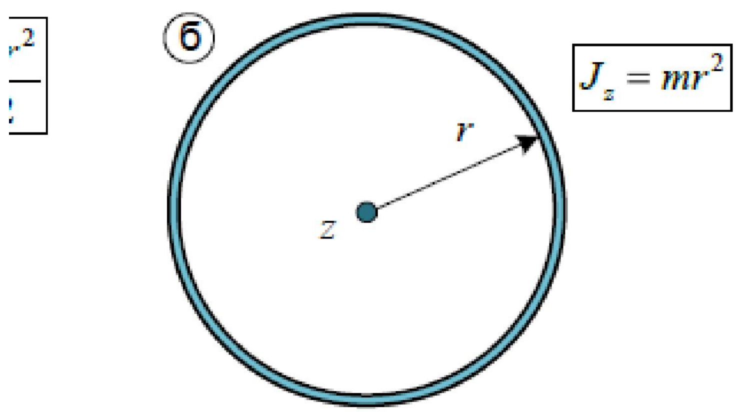

Рис. 5.3.

5.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

При решении задач приходится вычислять моменты инерции тел относительно осей вращения, которые не проходят через центр масс.

В этом случае применяют теорему Гюйгенса - Штайнера.

ТЕОРЕМА Гюйгенса - Штайнера

Момент инерции механической системы (тела) относительно некоторой оси равен сумме момента инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и величины равной произведению массы системы на квадрат расстояния между осями:

$$J_z = J_{zC} + md^2 \tag{5.8}$$

Тема 6.
Теорема об изменении кинетического момента

- САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ

Тема 7.
Мощность и работа сил

7.1. Определение мощности и работы силы

<u>Мощностью силы</u> называется величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения:

$$N = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\ v\cos\ \vec{F},\vec{v}\ . \qquad (7.1)$$

Мощность может быть как положительной, так и отрицательной (рис. 7.1).

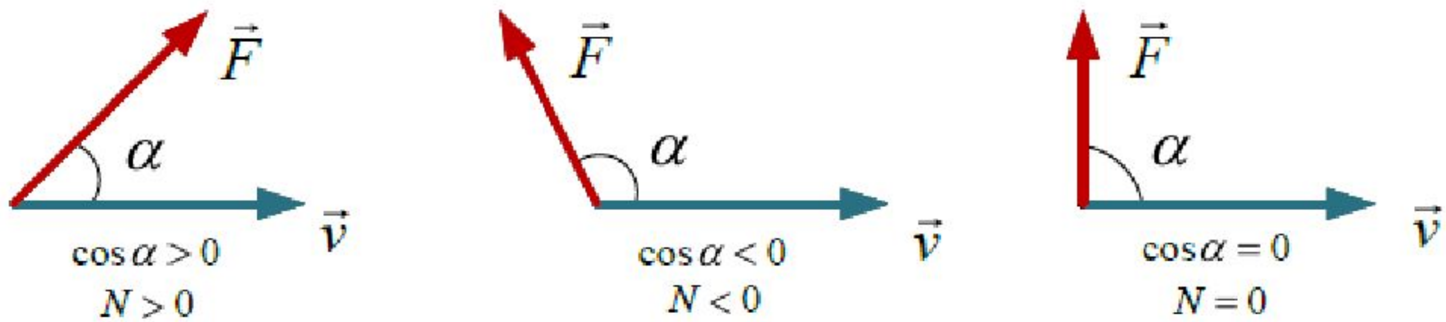

Рис. 7.1

Размерность мощности $N = F \quad v = Н\cdot м/с = Вт.$

Работой силы за некоторый промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ называется величина, равная интегралу от мощности силы по времени:

$$A = \int_0^t N\,dt\text{, и следовательно } N = \frac{dA}{dt} \qquad (7.2)$$

Если мощность постоянна, то $A = N\,\Delta t$.

Размерность работы $A = N \quad t = Bm \cdot c = \dfrac{H \cdot м \cdot c}{c} = H \cdot м$.

Выражение под знаком интеграла в (7.4) есть работа за бесконечно малый промежуток времени, которую называют **элементарной работой:**

$$dA = N\,dt = \left(\vec{F} \cdot \vec{v}\,\right)dt \qquad (7.3)$$

Закон движения задан в векторной форме

Если учесть, что $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, то $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, и тогда

$$A = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (7.4)$$

При $\vec{F} = const$ из (7.5) следует, что

$$A = \vec{F} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \qquad (7.5)$$

Закон движения задан в аналитической форме

Пусть $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$.

Тогда $N = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z = F_x \dfrac{dx}{dt} + F_y \dfrac{dy}{dt} + F_z \dfrac{dz}{dt}$.

Тогда путем интегрирования мощности получаем, что работа равна

$$A = \int_{M_0}^{M} \left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz\right) \qquad (7.7)$$

Закон движения задан в естественной форме

Поскольку $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$, то $N = F_\tau v_\tau = F_\tau \dot{s}$.

Отсюда следует, что при разложении силы по естественному базису мощность имеет только составляющая силы, направленная по касательной к траектории. Тогда путем интегрирования мощности получаем, что работа равна

$$A = \int_0^S F_\tau \, ds \tag{7.9}$$

Когда проекция силы на касательную к траектории постоянна, то есть $F_\tau = const$, получаем, что

$$A = F_\tau s \tag{7.10}$$

Тема 8.
Теорема об изменении кинетической энергии

8.1. Кинетическая энергия

Кинетической энергией материальной точки называется величина, равная половине произведения массы точки на квадрат скорости:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (8.1)$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий ее точек

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k v_k^2 \qquad (8.2)$$

Кинетическая энергия твердого тела вычисляется по формуле аналогичной (8.2) с той разницей, что сумма заменяется интегралом:

$$T = \frac{1}{2}\int_V v^2 dm, \tag{8.3}$$

где m — масса бесконечно малого объема тела, а v — его скорость.

Примечания:

Кинетическая энергия не может быть отрицательной;

Кинетическая энергия (так же как и скорость) зависит от выбора системы отсчета.

Размерность кинетической энергии — джоуль:

$$[T] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}.$$

Поступательное движение тела

При поступательном движении скорости всех точек тела одинаковы и совпадают со скоростью центра масс. По этой причине (8.3) упрощается:

$$T = \frac{1}{2} v_C^2 \int_v dm = \frac{1}{2} m v_C^2 \tag{8.4}$$

Вращательное движение тела

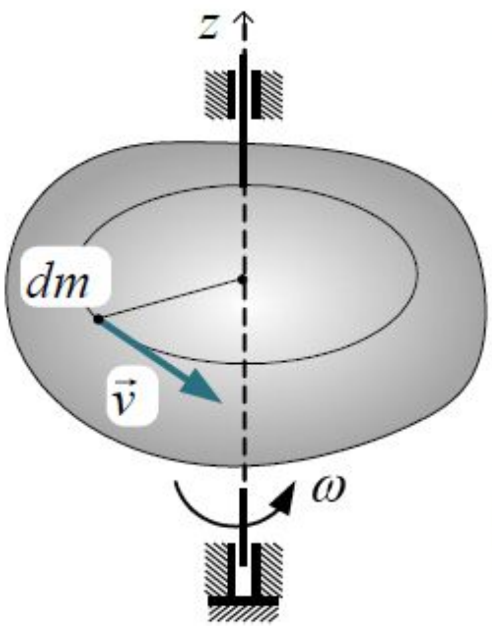

Рис. 8.1

Рассмотрим бесконечно малый элемент тела dm, находящийся на расстоянии h от оси вращения. Его скорость равна

$$v = \omega h.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2}\int_v v^2 dm = \frac{1}{2}\int_v \omega^2 h^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_v h^2 dm.$$

Последний интеграл является моментом инерции. Окончательно получаем:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \qquad (8.5)$$

Плоскопараллельное движение тела

При рассмотрении плоского движения тела применим теорему Кенига.

ТЕОРЕМА Кенига:

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии поступательной части движения и кинетической энергии системы в ее относительном движении относительно центра масс.

Рассмотрим материальное тело.

Кинетическая энергия поступательной части его движения равна $\frac{1}{2}mv_C^2$.

Относительное движение тела относительно центра масс является вращательным, поэтому его кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}I_{zC}\omega^2$.

В результате в соответствии с теоремой Кенига получаем, что

$$T_{пл} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{zC}\omega^2, \qquad (8.6)$$

где v_C – скорость центра массы тела, а I_{zC} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр массы тела перпендикулярно оси вращения.

8.2. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

ТЕОРЕМА

Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех действующих в системе сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k \qquad (8.7)$$

или, после разделения мощностей внешних и внутренних сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k^e + \sum_{k=0}^{n} N_k^i$$

Для неизменяемых систем, у которых внутренние силы не работают, получим:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=0}^{n} N_k^e$$

8.3. Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме

ТЕОРЕМА

Изменение кинетической энергии механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме работ всех действующих в системе сил:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k \tag{8.8}$$

Или, выделяя отдельно работы внешних и внутренних сил:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i$$

где T — начальное, а T_0 — конечное значение кинетической энергии.

Для неизменяемых систем $\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0\right)$ можно записать:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$$

Тема 9.
Потенциальное силовое поле

9.1. Потенциальная энергия

<u>Потенциальными или консервативными силами</u> называются силы, работа которых не зависит ни от траектории, по которой движется точка приложения силы, ни от характера этого движения, а определяется только начальным и конечным положением точки.

<u>Силовым полем</u> называется область пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, однозначно определенная в любой момент времени по величине и по направлению:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t).$$

Силовое поле называется стационарным, если действующая в нем сила не зависит от времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z).$$

Силовое поле называется однородным, если действующая в нем сила постоянна как вектор:

$$\vec{F} = const.$$

Силовое поле называется потенциальным или консервативным, если для него существует функция координат $\Pi(x, y, z)$, такая, что проекции действующей силы могут быть вычислены через ее частные производные:

$$F_x = \partial\Pi/\partial x; \qquad F_y = \partial\Pi/\partial y; \qquad F_z = \partial\Pi/\partial z. \qquad (9.1)$$

Эта функция называется **потенциальной энергией.**

Потенциальной энергией механической системы называется сумма потенциальных энергий ее точек:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k.$$

9.3. Консервативная механическая система

Консервативной называется механическая система, в которой полная механическая энергия сохраняется постоянной:

Полная механическая энергия системы равняется сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + \Pi.$$

- Если все действующие в системе силы потенциальны, то эта система является консервативной.
- Если в системе действуют непотенциальные силы, то полная механическая энергия сохраняться не будет, часть ее будет переходить в другие формы энергии (тепловую и т.п.) и рассеиваться. Такие системы называются неконсервативными или диссипативными (*dissipation* — рассеивание).

Тема 10.
Введение в аналитическую механику

10.1. Классификация связей

Связи могут быть

- интегрируемыми (голономными),
- неинтегрируемыми (неголономными).

Связи могут быть

- стационарными,
- нестационарными.

Связи могут быть

- односторонними (неудерживающими),
- двухсторонними (удерживающими).

10.2. Возможные перемещения

<u>Возможным перемещением материальной точки</u> называется воображаемое бесконечно малое перемещение $\delta\vec{r}$, допускаемое в данный момент наложенными на нее связями.

<u>Возможным перемещением механической системы</u> называется любая совокупность возможных перемещений точек данной системы, допускаемая всеми наложенными на нее связями.