



Аналитическая геометрия на плоскости

Метод координат на плоскости

Метод координат заключается в установлении соответствия между точками прямой (плоскости, пространства) и их координатами — действительными числами при помощи системы координат.

⇒ *Прямоугольная система координат Oxy на плоскости* задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти прямые называют *осями координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox , другую — *осью ординат* (Oy).

Единичные векторы осей Ox и Oy обозначают соответственно \vec{i} и \vec{j} . Если M — произвольная точка плоскости, то вектор \overline{OM} называется *радиусом-вектором* точки M .

⇒ *Координатами* точки M в системе координат Oxy называются координаты радиус-вектора \overline{OM} .

Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$; при этом число x называется — *абсциссой* точки M , а число y — *ординатой* точки M . Координаты точки полностью определяют ее положение на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координаты $(x; y)$ точки M , делящей в заданном отношении λ отрезок AB , где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ ($\lambda = \frac{AM}{MB}$), находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получаются формулы координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

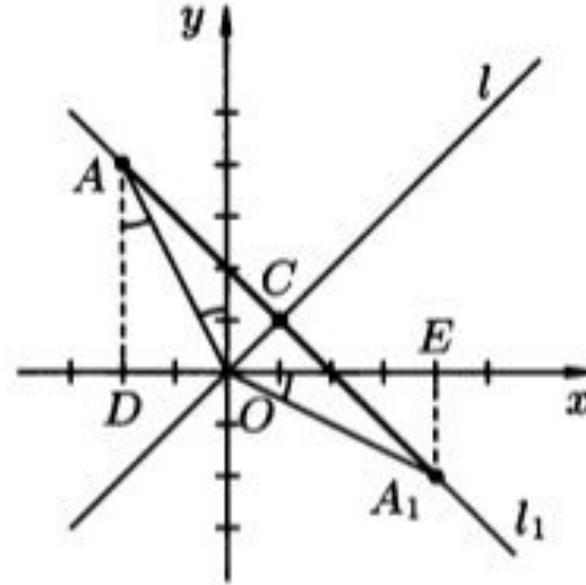
или, что то же самое: $S = \frac{1}{2} |\Delta|$, где $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Пример

Найти точку, симметричную точке $A(-2; 4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

○ Проведем через точку A прямую l_1 , перпендикулярную биссектрисе l первого координатного угла. Пусть $l_1 \cap l = C$. На прямой l_1 отложим отрезок CA_1 , равный отрезку AC . Прямоугольные треугольники ACO и A_1CO равны между собой (по двум катетам). Отсюда следует, что $|OA| = |OA_1|$. Треугольники ADO и OEA_1 также равны между собой (по гипотенузе и острому углу). заключаем, что $|AD| = |OE| = 4$, $|OD| = |EA_1| = 2$, т. е. точка A_1 имеет координаты $x = 4$, $y = -2$, т. е. $A_1(4; -2)$.

Отметим, что имеет место общее утверждение: точка A_1 , симметричная точке $A(a; b)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, имеет координаты $(b; a)$, т. е. $A_1(b; a)$. ●



Пример

В треугольнике с вершинами $A(2; 3)$, $B(6; 3)$, $C(6; -5)$ найти длину биссектрисы BM .

○ По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{|CM|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|BA|}$

Находим, используя формулу (1.1), длины сторон BC и BA треугольника ABC :
 $|BC| = \sqrt{(6-6)^2 + (-5-3)^2} = 8$, $|BA| = \sqrt{(2-6)^2 + (3-3)^2} = 4$. Следовательно,

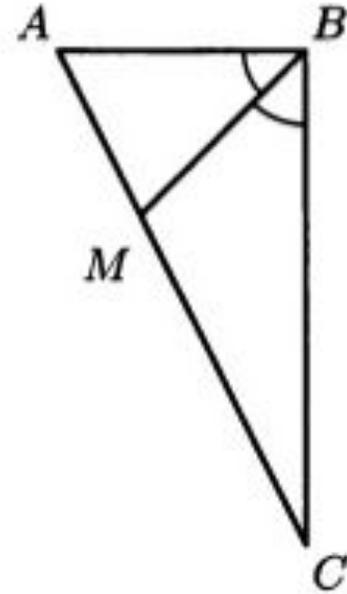
$\lambda = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{8}{4}$, т. е. $\lambda = 2$. Находим координаты x_M и y_M точки

M , используя формулу (1.2): $x_M = \frac{6+2 \cdot 2}{1+2}$, $y_M = \frac{-5+2 \cdot 3}{1+2}$,

т. е. $x_M = \frac{10}{3}$, $y_M = \frac{1}{3}$, т. е. $M\left(\frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Находим длину биссек-

трисы BM : $BM = \sqrt{\left(\frac{10}{3}-6\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$, т. е.

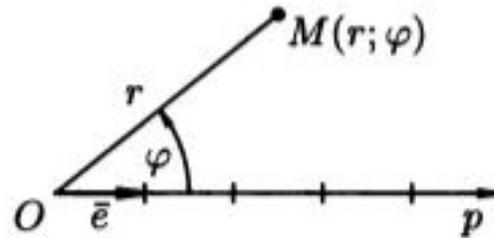
$BM = \frac{8}{3}\sqrt{2}$. ●



Полярная система координат

⇒ Полярная система координат задается точкой O , называемой полюсом, лучом Op , называемым полярной осью, и единичным вектором \vec{e} того же направления, что и луч Op .

Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью и отсчитываемым в положительном направлении.



⇒ Числа r и φ называются полярными координатами точки M : r называют полярным радиусом, φ — полярным углом.

Если рассматривать значения r в промежутке $[0; +\infty)$, а значения φ в $(-\pi; \pi]$ (или в $[0; 2\pi)$), то каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ , и наоборот.

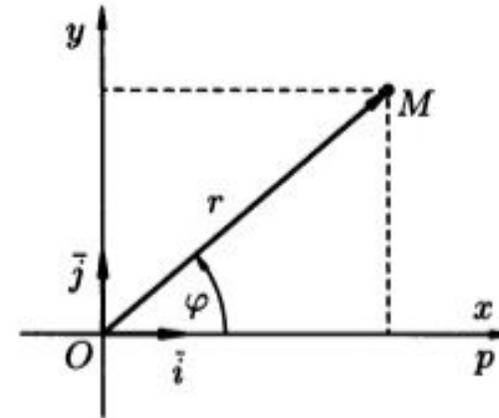
Если совместить полюс O с началом координат системы Oxy , а полярную ось — с положительной полуосью Ox , то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки O) устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Откуда, в частности, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, где $x \neq 0$.



Пример

Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $(2; -\frac{2}{3}\pi)$.

○ Имеем $r = 2$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$. По формулам (1.5) находим $x = 2 \cos(-\frac{2}{3}\pi) = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$, $y = 2 \sin(-\frac{2}{3}\pi) = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$. Итак, $M(-1; -\sqrt{3})$. ●

Пример

Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $(-\sqrt{3}; -1)$.

○ Имеем $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$. По формулам (1.6) находим $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что $-\pi < \varphi \leq \pi$, получаем $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$. Итак, $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$. ●

Пример

В полярной системе координат заданы точки $M_1(r_1; \varphi_1)$, $M_2(r_2; \varphi_2)$. Найти:

- расстояние между точками M_1 и M_2 ;
 - площадь треугольника OM_1M_2 (O — полюс).
- а) Воспользуемся формулами (1.1)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2} = \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)} = \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \end{aligned}$$

т. е. $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$;

б) пользуясь формулой для площади треугольника со сторонами a и b и углом α между ними ($S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$), находим площадь треугольника OM_1M_2 :

$$S = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad \bullet$$

Уравнение линии (кривой) на плоскости

⇒ Уравнением линии (кривой) на плоскости Oxy называется уравнение $F(x; y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и только они. Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0. \end{cases}$$

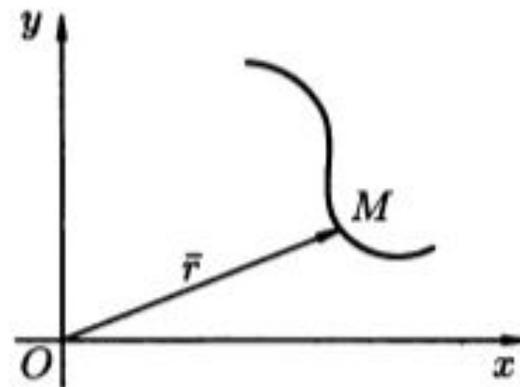
Аналогично вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат: $F(r; \varphi) = 0$.

Линию на плоскости можно рассматривать как траекторию пути, пройденного точкой, движущейся по какому-нибудь закону. Если абсцисса точки $M(x; y)$ изменяется по закону $x = x(t)$, а ордината — по закону $y = y(t)$, где t — переменная, называемая *параметром*, то уравнение линии записывается в виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1; t_2].$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями линии*.

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением* $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t — скалярный параметр: при изменении t конец вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ описывает некоторую линию, называемую *годографом*. Параметрические уравнения годографа: $x = x(t)$, $y = y(t)$.



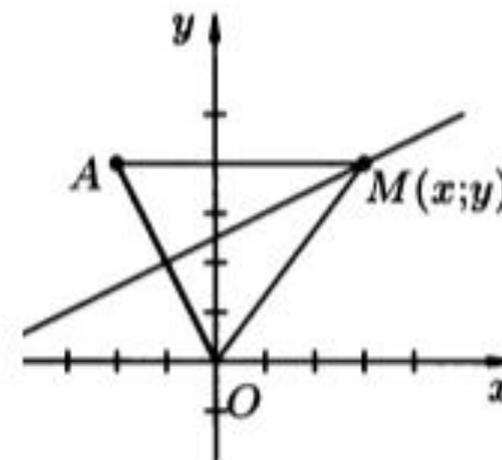
Пример

Описать уравнением множество всех точек плоскости, равноудаленных от начала координат и от точки $A(-2; 4)$.

○ Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомого множества точек плоскости. Тогда согласно условию задачи, $|MA| = |MO|$, где $O(0; 0)$ — начало координат. По формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

находим $|MA|$ и $|MO|$: $|MA| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 4)^2}$, $|MO| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Имеем $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2$, откуда $4x - 8y + 20 = 0$. Окончательно получим $x - 2y + 5 = 0$. Это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку OA и делящей этот отрезок пополам. ●

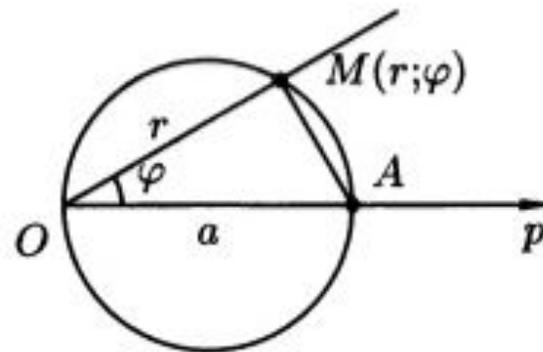


Пример

В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра a , если полюс системы координат лежит на окружности, а полярная ось проходит через ее центр.

○ Пусть $M(r; \varphi)$ — произвольная точка данной окружности. Рассмотрим $\triangle OMA$.

В нем $|OM| = r$, $\angle MOA = \varphi$, $\angle OMA = \frac{\pi}{2}$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр). Поэтому $\cos \varphi = \frac{r}{a}$. Отсюда находим $r = a \cos \varphi$ — искомое уравнение окружности. ●



Прямая на плоскости

Каждая *прямая* на плоскости Oxy определяется линейным *уравнением первой степени с двумя неизвестными*. Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую *прямую* на плоскости.

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* имеет вид

$$y = kx + b,$$

где k — *угловой коэффициент* прямой (т. е. тангенс угла α , который прямая образует с положительным направлением оси Ox , $k = \operatorname{tg} \alpha$), b — *ордината* точки пересечения прямой с осью Oy .

2. *Общее уравнение прямой*:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A , B и C — *постоянные коэффициенты*, причем A и B одновременно не обращаются в нуль ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Заметим, что $\vec{n} = (A; B)$ — нормальный вектор прямой (\vec{n} перпендикулярен прямой). Частные случаи этого уравнения:

$Ax + By = 0$ ($C = 0$) — прямая проходит через начало координат;

$Ax + C = 0$ ($B = 0$) — прямая параллельна оси Oy ;

$By + C = 0$ ($A = 0$) — прямая параллельна оси Ox ;

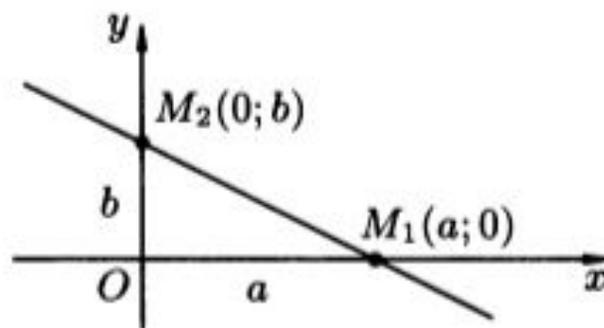
$Ax = 0$ ($B = C = 0$) — прямая совпадает с осью Oy ;

$By = 0$ ($A = C = 0$) — прямая совпадает с осью Ox .

3. Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b — длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно.



4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α — угол, образуемый прямой с осью Ox); $(x_0; y_0)$ — координаты данной точки. Уравнение называют также *уравнением пучка прямых с центром в точке $(x_0; y_0)$* ; уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где λ — числовой множитель.

5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

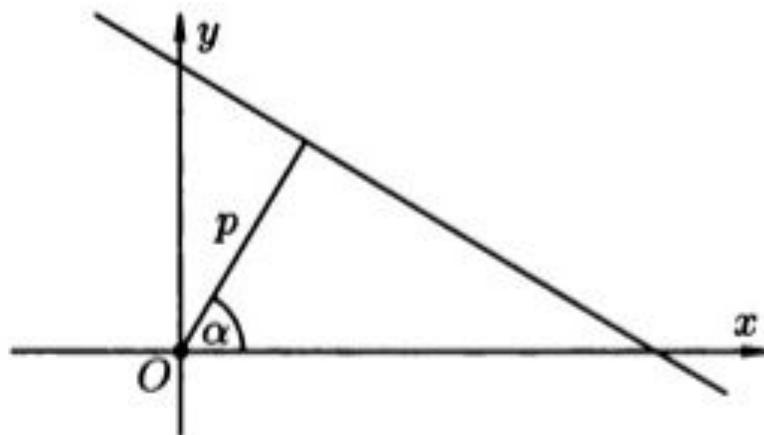
Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой имеет вид $x = x_1$; если $y_1 = y_2$, то: $y = y_1$.

6. Нормальное уравнение прямой:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α — угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox .

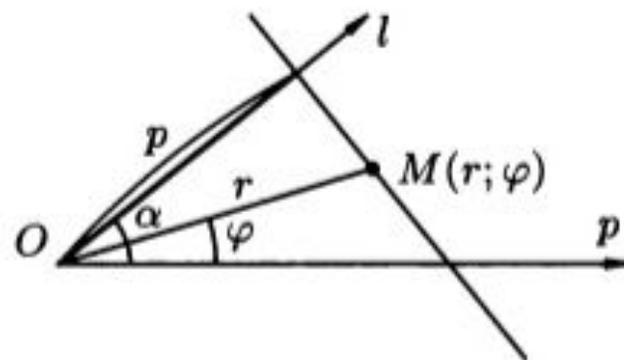
Общее уравнение прямой можно преобразовать в нормальное уравнение путем умножения на *нормирующий множитель* $\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаком свободного члена C (в общем уравнении прямой).



7. Уравнение прямой в полярных координатах имеет вид

$$r \cos(\varphi - \alpha) = p,$$

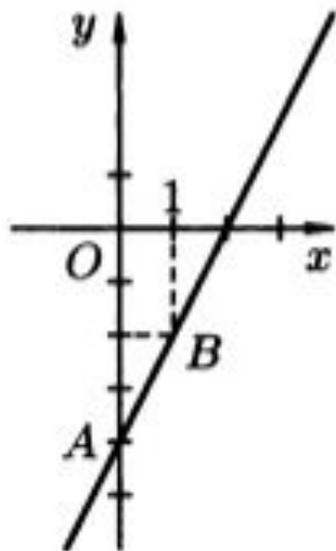
r , φ , α , p – изображены на рисунке (полярная система координат).



Пример

Построить прямую, заданную уравнением $2x - y - 4 = 0$.

○ 1. Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. Полагая в уравнении прямой, например, $x = 0$, получим $y = -4$. Имеем одну точку $A(0; -4)$. Полагая $x = 1$, получим $y = -2$. Отсюда вторая точка $B(1; -2)$. Осталось построить точки A и B и провести через них прямую



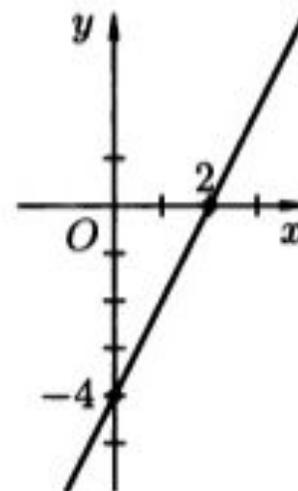
2. Задачу можно решить иначе, используя уравнение прямой в отрезках. Приведем уравнение к виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

Для этого

перенесем свободный член (-4) в правую часть уравнения и обе его части разделим на 4. Получаем $2x - y = 4$, $\frac{2x}{4} - \frac{y}{4} = 1$,

т. е. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$ — уравнение прямой в отрезках на осях. На оси Ox отложим 2 единицы вправо (от начала координат); на оси Oy отложим 4 единицы вниз. Получаем две точки на осях, через которые проводим прямую. ●



Пример

Уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения).

○ Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно y . Получим $3y = 4x + 12$ и далее $y = \frac{4}{3}x + 4$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь $k = \frac{4}{3}$, $b = 4$.

Для получения уравнения прямой в отрезках перенесем свободный член $C = 12$ вправо и разделим обе части уравнения на -12 . В результате получим $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ — уравнение в отрезках на осях; здесь $a = -3$, $b = 4$.

Приведем исходное уравнение к нормальному виду .
Для этого умножим обе части уравнения $4x - 3y + 12 = 0$ на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$, т. е. $\lambda = -\frac{1}{5}$. Перед корнем взят знак «минус», т. к. свободный член ($C = 12$) имеет знак «плюс». Получим $-\frac{1}{5}(4x - 3y + 12) = 0$, т. е. $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0$; здесь $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$), $p = \frac{12}{5}$, т. е. расстояние от $O(0; 0)$ до прямой равно 2,4. ●

Пример

Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $A(0; 2), B(-3; 7);$

б) $A(2; 1), B(4; 1).$

○ а) Используем уравнение .

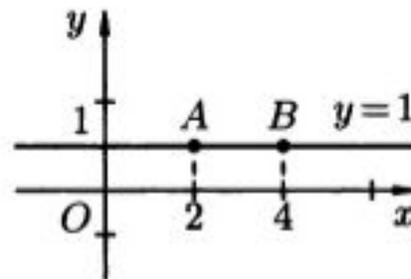
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Полагая в нем $x_1 = 0, y_1 = 2, x_2 = -3,$
 $y_2 = 7,$ получим $\frac{y - 2}{7 - 2} = \frac{x - 0}{-3 - 0},$

или $\frac{y - 2}{5} = \frac{x}{-3},$ т.е. $-3y + 6 = 5x$

или $5x + 3y - 6 = 0.$

б) Решаем аналогично: $\frac{y - 1}{1 - 1} = \frac{x - 2}{4 - 2}.$ Так как $y_1 = y_2,$
заключаем, что $y - 1 = 0, y = 1$ есть уравнение прямой, проходящей через точки A и $B.$ (Для наглядности построим точки и прямую в системе Oxy) ●



Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, пересечение прямых, расстояние от данной точки до данной прямой

Под *углом между прямыми в плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$k_1 = k_2,$$

а условие их перпендикулярности

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис).

Требуется найти угол φ , на который надо повернуть в положительном направлении прямую L_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой L_2 .

○ Решение: Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

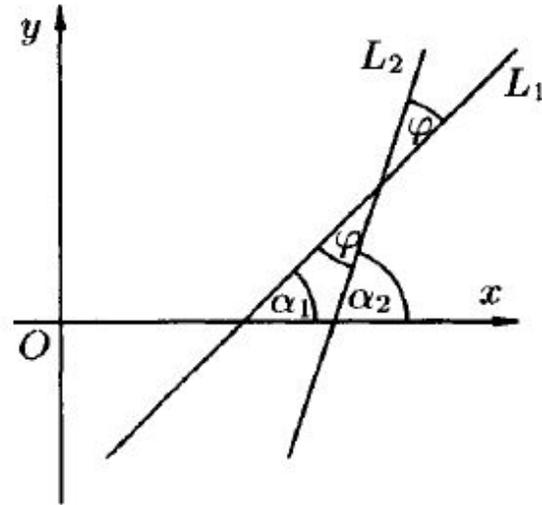
$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, поэтому

Но $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая — второй, то правая часть формулы берется по модулю, т. е. $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$.



(или $k_1 k_2 = -1$).

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|,$$

условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (\text{или } A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0),$$

условие их перпендикулярности

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис. 47). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L .

○ Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1)$ — произвольная точка прямой L , на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B)$. Следовательно,

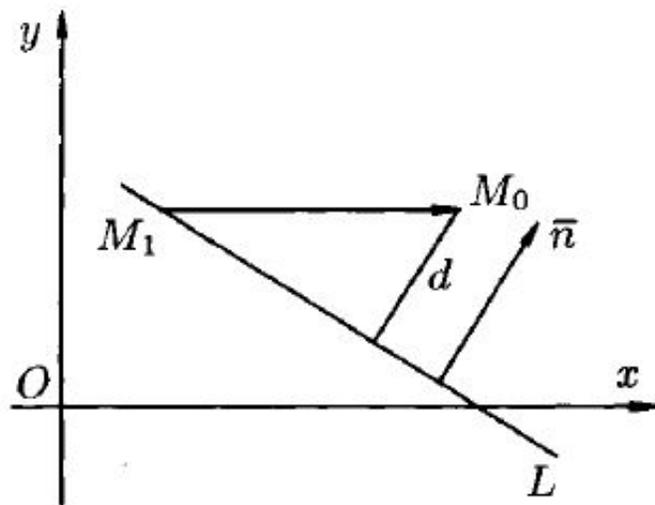


Рис. 47

$$\begin{aligned}d &= |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1M_0}| = \left| \frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \\ &= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.\end{aligned}$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L , то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е.

$C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

что и требовалось получить.

Решение: По формуле получаем

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$



