Аналитическая геометрия на плоскости

Метод координат на плоскости

Метод координат заключается в установлении соответствия между точками прямой (плоскости, пространства) и их координатами — действительными числами при помощи системы координат.

⇛ *Прямоугольная система координат Oxy на плоскости* задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти прямые называют *осями координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox, другую — *осью ординат* (Oy).

Единичные векторы осей Ox и Oy обозначают соответственно $\bar{i}$ и $\bar{j}$ Если M — произвольная точка плоскости, то вектор $\overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M.

⇛ *Координатами* точки M в системе координат Oxy называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$.

Если $\overline{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$; при этом число x называется — *абсциссой* точки M, а число y — *ординатой* точки M. Координаты точки полностью определяют ее положение на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координаты $(x; y)$ *точки* M, *делящей в заданном отношении* λ *отрезок* AB, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ $(\lambda = \frac{AM}{MB})$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, при $\lambda = 1$ (точка M делит отрезок AB пополам), получаются формулы координат середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

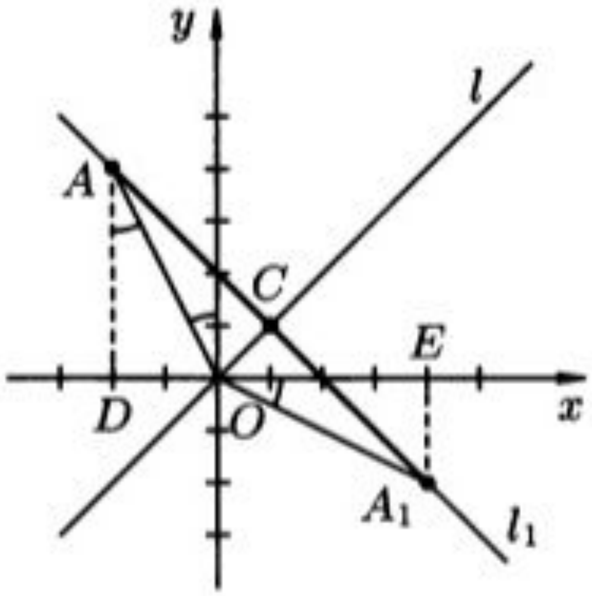
Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

или, что то же самое: $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, где $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Пример

Найти точку, симметричную точке $A(-2; 4)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

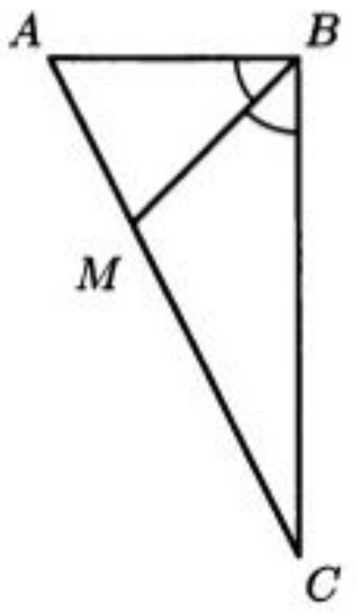


❍ Проведем через точку A прямую l_1, перпендикулярную биссектрисе l первого координатного угла. Пусть $l_1 \cap l = C$. На прямой l_1 отложим отрезок CA_1, равный отрезку AC. Прямоугольные треугольники ACO и A_1CO равны между собой (по двум катетам). Отсюда следует, что $|OA| = |OA_1|$. Треугольники ADO и OEA_1 также равны между собой (по гипотенузе и острому углу). Заключаем, что $|AD| = |OE| = 4$, $|OD| = |EA_1| = 2$, т. е. точка A_1 имеет координаты $x = 4$, $y = -2$, т. е. $A_1(4; -2)$.

Отметим, что имеет место общее утверждение: точка A_1, симметричная точке $A(a; b)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, имеет координаты $(b; a)$, т. е. $A_1(b; a)$. ●

Пример

В треугольнике с вершинами $A(2;3)$, $B(6;3)$, $C(6;-5)$ найти длину биссектрисы BM.



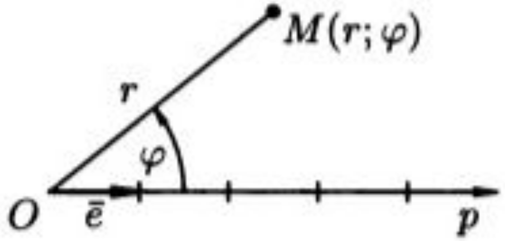
◐ По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{|CM|}{|MA|} = \frac{|BC|}{|BA|}$. Находим, используя формулу (1.1), длины сторон BC и BA треугольника ABC: $|BC| = \sqrt{(6-6)^2 + (-5-3)^2} = 8$, $|BA| = \sqrt{(2-6)^2 + (3-3)^2} = 4$. Следовательно,

$\lambda = \frac{|CM|}{|MA|} = \frac{8}{4}$, т. е. $\lambda = 2$. Находим координаты x_M и y_M точки M, используя формулу (1.2): $x_M = \frac{6+2\cdot 2}{1+2}$, $y_M = \frac{-5+2\cdot 3}{1+2}$, т. е. $x_M = \frac{10}{3}$, $y_M = \frac{1}{3}$, т. е. $M\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$. Находим длину биссектрисы BM: $BM = \sqrt{\left(\frac{10}{3}-6\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$, т. е. $BM = \frac{8}{3}\sqrt{2}$. ●

Полярная система координат

⇛ ***Полярная система координат*** задается точкой O, называемой ***полюсом***, лучом Op, называемым ***полярной осью***, и ***единичным вектором*** $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op.

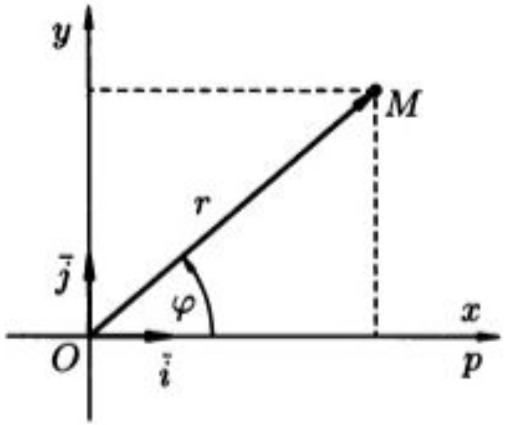
Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью и отсчитываемым в положительном направлении.



⇛ Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки M: r называют ***полярным радиусом***, φ — ***полярным углом***.

Если рассматривать значения r в промежутке $[0; +\infty)$, а значения φ в $(-\pi; \pi]$ (или в $[0; 2\pi)$), то каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и наоборот.

Если совместить полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось — с положительной полуосью Ox, то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки O) устанавливается формулами:



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Откуда, в частности, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, где $x \neq 0$.

Пример

Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $\left(2; -\frac{2}{3}\pi\right)$.

○ Имеем $r = 2$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$. По формулам (1.5) находим $x = 2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $y = 2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$. Итак, $M(-1; -\sqrt{3})$. ●

Пример

Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $(-\sqrt{3}; -1)$.

◐ Имеем $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$. По формулам (1.6) находим $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $tg\varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, получаем $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$. Итак, $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$. ●

Пример

В полярной системе координат заданы точки $M_1(r_1;\varphi_1)$, $M_2(r_2;\varphi_2)$. Найти:

а) расстояние между точками M_1 и M_2;

б) площадь треугольника OM_1M_2 (O — полюс).

◐ а) Воспользуемся формулами (1.1)

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}= \\ &=\sqrt{(r_2\cos\varphi_2-r_1\cos\varphi_1)^2+(r_2\sin\varphi_2-r_1\sin\varphi_1)^2}= \\ &=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}= \\ &=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}, \end{aligned}$$

т. е. $d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$;

б) пользуясь формулой для площади треугольника со сторонами a и b и углом α между ними $\left(S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha\right)$, находим площадь треугольника OM_1M_2:

$$S=\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1). \quad ●$$

Уравнение линии (кривой) на плоскости

⇛ *Уравнением линии (кривой)* на плоскости Oxy называется уравнение $F(x;y)=0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и только они. Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек линии.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0. \end{cases}$$

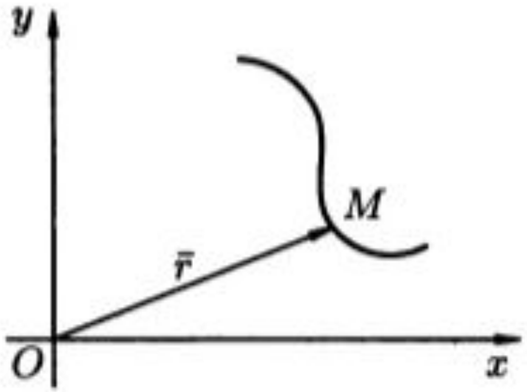
Аналогично вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат: $F(r;\varphi)=0$.

Линию на плоскости можно рассматривать как траекторию пути, пройденного точкой, движущейся по какому-нибудь закону. Если абсцисса точки $M(x;y)$ изменяется по закону $x = x(t)$, а ордината — по закону $y = y(t)$, где t — переменная, называемая *параметром*, то уравнение линии записывается в виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [t_1; t_2].$$

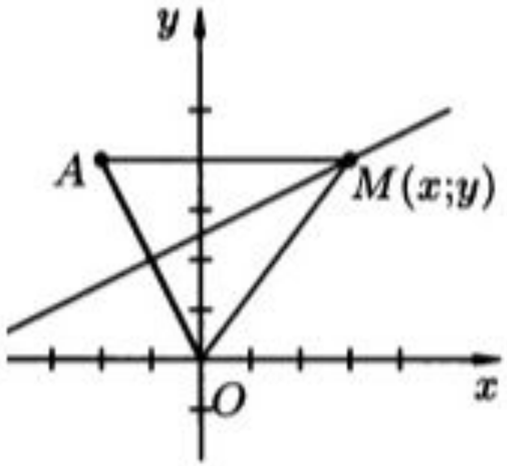
Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями линии.*

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где t — скалярный параметр: при изменении t конец вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ описывает некоторую линию, называемую *годографом*. Параметрические уравнения годографа: $x = x(t)$, $y = y(t)$.



Пример

Описать уравнением множество всех точек плоскости, равноудаленных от начала координат и от точки $A(-2;4)$.



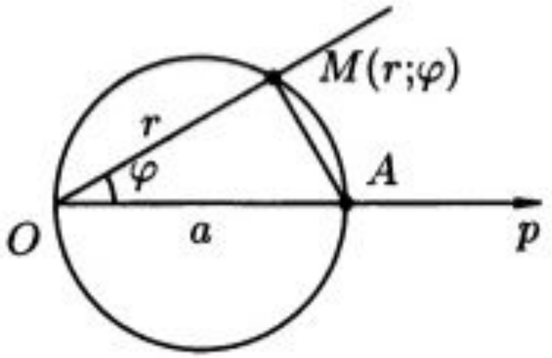
Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка искомого множества точек плоскости. Тогда согласно условию задачи, $|MA|=|MO|$, где $O(0;0)$ — начало координат. По формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

находим $|MA|$ и $|MO|$: $|MA|=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$, $|MO|=\sqrt{x^2+y^2}$. Имеем $\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, т.е. $x^2+4x+4+y^2-8y+16=x^2+y^2$, откуда $4x-8y+20=0$. Окончательно получим $x-2y+5=0$. Это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку OA и делящей этот отрезок пополам. ●

Пример

В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра a, если полюс системы координат лежит на окружности, а полярная ось проходит через ее центр.



◐ Пусть $M(r;\varphi)$ — произвольная точка данной окружности. Рассмотрим ΔOMA.

В нем $|OM| = r$, $\angle MOA = \varphi$, $\angle OMA = \frac{\pi}{2}$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр). Поэтому $\cos\varphi = \frac{r}{a}$. Отсюда находим $r = a\cos\varphi$ — искомое уравнение окружности. ●

Прямая на плоскости

Каждая *прямая* на плоскости Oxy определяется линейным *уравнением первой степени с двумя неизвестными*. Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* имеет вид

$$y = kx + b,$$

где k — угловой коэффициент прямой (т. е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ox, $k = \operatorname{tg}\alpha$), b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

2. *Общее уравнение прямой*:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B и C — постоянные коэффициенты, причем A и B одновременно не обращаются в нуль ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Заметим, что $\bar{n} = (A; B)$ — нормальный вектор прямой ($\bar{n}$ перпендикулярен прямой). Частные случаи этого уравнения:

$Ax + By = 0$ ($C = 0$) — прямая проходит через начало координат;

$Ax + C = 0$ ($B = 0$) — прямая параллельна оси Oy;

$By + C = 0$ ($A = 0$) — прямая параллельна оси Ox;

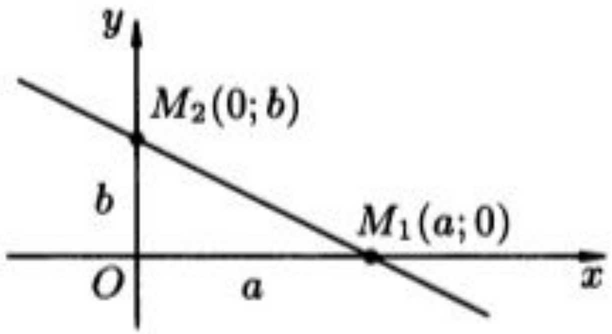
$Ax = 0$ ($B = C = 0$) — прямая совпадает с осью Oy;

$By = 0$ ($A = C = 0$) — прямая совпадает с осью Ox.

3. ***Уравнение прямой в отрезках***:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b — длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно .



4. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении:*

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α — угол, образуемый прямой с осью Ox); $(x_0; y_0)$ — координаты данной точки. Уравнение называют также *уравнением пучка прямых с центром в точке* $(x_0; y_0)$; *уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где λ — числовой множитель.

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1; y_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

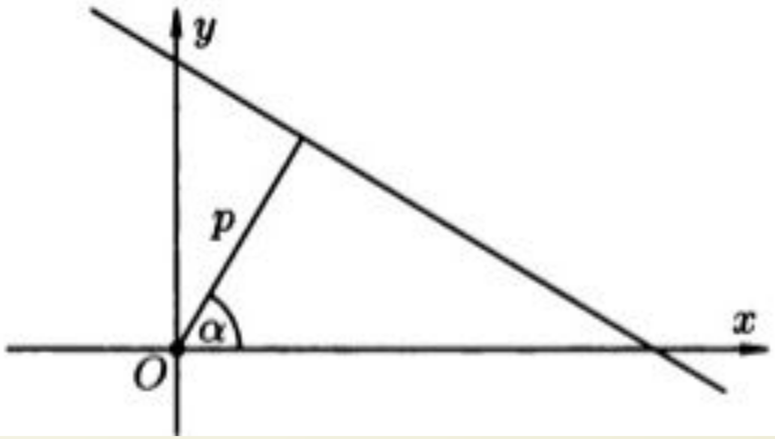
Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой имеет вид $x = x_1$; если $y_1 = y_2$, то: $y = y_1$.

6. *Нормальное уравнение прямой*:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α — угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox.

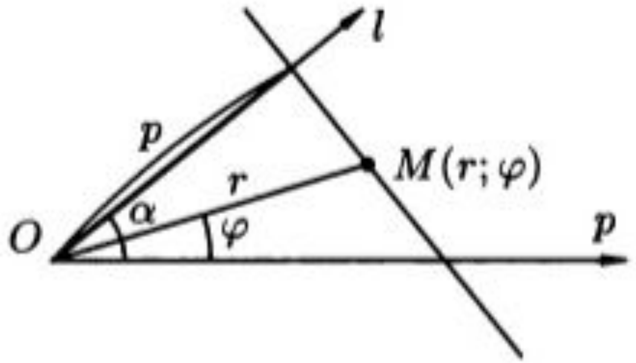
Общее уравнение прямой можно преобразовать в нормальное уравнение путем умножения на *нормирующий множитель* $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена C (в общем уравнении прямой).



7. *Уравнение прямой* в полярных координатах имеет вид

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p,$$

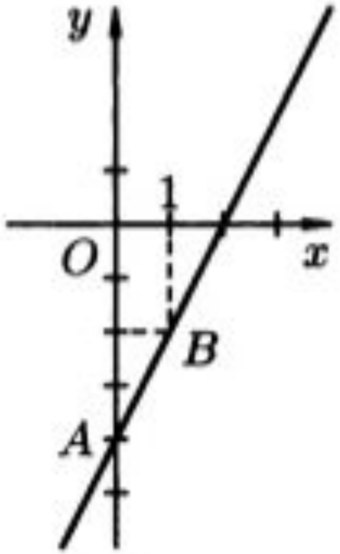
r, φ, α, p – изображены на рисунке (полярная система координат).



Пример

Построить прямую, заданную уравнением $2x - y - 4 = 0$.

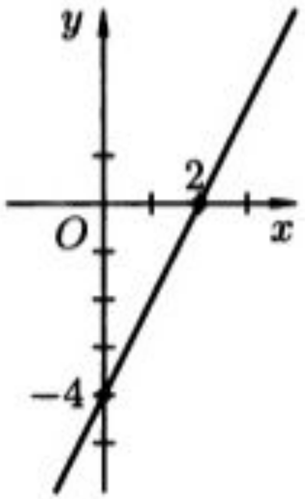
1. Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. Полагая в уравнении прямой, например, $x = 0$, получим $y = -4$. Имеем одну точку $A(0; -4)$. Полагая $x = 1$, получим $y = -2$. Отсюда вторая точка $B(1; -2)$. Осталось построить точки A и B и провести через них прямую



2. Задачу можно решить иначе, используя уравнение прямой в отрезках. Приведем уравнение к виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

Для этого



перенесем свободный член (-4) в правую часть уравнения и обе его части разделим на 4. Получаем $2x - y = 4$, $\frac{2x}{4} - \frac{y}{4} = 1$, т. е. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$ — уравнение прямой в отрезках на осях. На оси Ox отложим 2 единицы вправо (от начала координат); на оси Oy отложим 4 единицы вниз. Получаем две точки на осях, через которые проводим прямую.

Пример

Уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения).

Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно y. Получим $3y = 4x + 12$ и далее $y = \frac{4}{3}x + 4$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь $k = \frac{4}{3}$, $b = 4$.

Для получения уравнения прямой в отрезках перенесем свободный член $C = 12$ вправо и разделим обе части уравнения на -12. В результате получим $\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ — уравнение в отрезках на осях; здесь $a = -3$, $b = 4$.

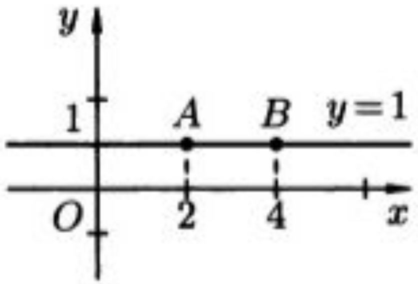
Приведем исходное уравнение к нормальному виду . Для этого умножим обе части уравнения $4x - 3y + 12 = 0$ на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$, т. е. $\lambda = -\frac{1}{5}$. Перед корнем взят знак «минус», т. к. свободный член ($C = 12$) имеет знак «плюс». Получим $-\frac{1}{5}(4x - 3y + 12) = 0$, т. е. $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0$; здесь $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1\right)$, $p = \frac{12}{5}$, т. е. расстояние от $O(0;0)$ до прямой равно 2,4. ●

Пример

Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $A(0;2)$, $B(-3;7)$;

б) $A(2;1)$, $B(4;1)$.



а) Используем уравнение .

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Полагая в нем $x_1=0$, $y_1=2$, $x_2=-3$, $y_2=7$, получим $\frac{y-2}{7-2}=\frac{x-0}{-3-0}$, или $\frac{y-2}{5}=\frac{x}{-3}$, т. е. $-3y+6=5x$ или $5x+3y-6=0$.

б) Решаем аналогично: $\frac{y-1}{1-1}=\frac{x-2}{4-2}$. Так как $y_1=y_2$, заключаем, что $y-1=0$, $y=1$ есть уравнение прямой, проходящей через точки A и B. (Для наглядности построим точки и прямую в системе Oxy) ●

Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, пересечение прямых, расстояние от данной точки до данной прямой

Под *углом между прямыми в плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Условие параллельности прямых l_1 *и* l_2 имеет вид

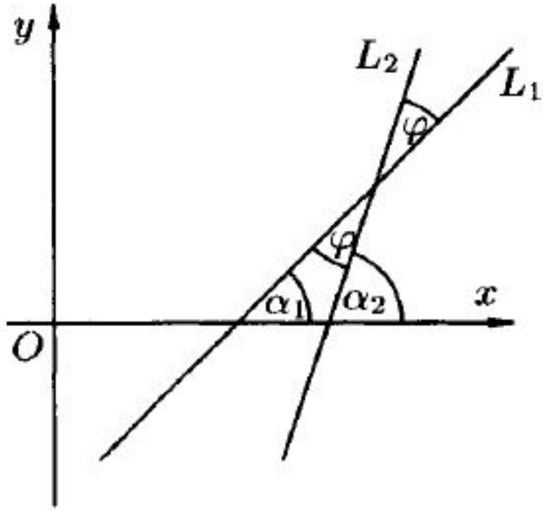
$$k_1 = k_2,$$

а *условие их перпендикулярности*

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис).

Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую L_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой L_2.



❍ Решение: Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},}$$

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая — второй, то правая часть формулы . берется по модулю, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

(или $k_1 k_2 = -1$).

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}\right|,$$

условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (\text{или } A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0),$$

условие их перпендикулярности

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис. 47). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1)$ — произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B)$. Следовательно,

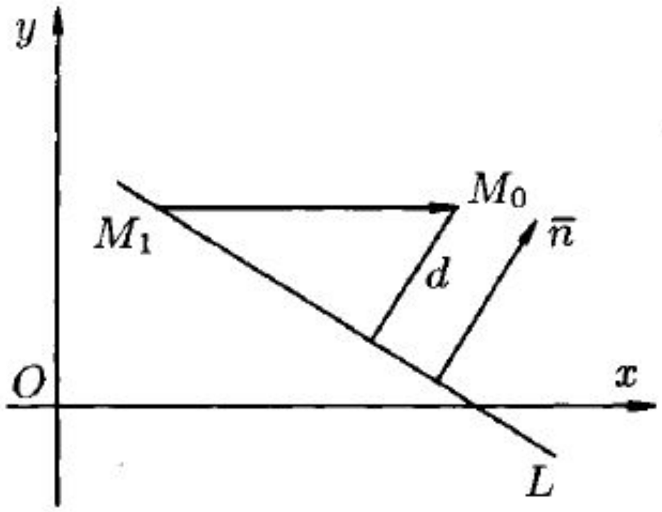


Рис. 47

$$d = |\text{пр}_{\bar{n}}\, \overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right| =$$

$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}},$$

что и требовалось получить.

Решение: По формуле получаем

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$