Лекция 4.
Раздел 3.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Дисциплина:
Элементы высшей математики

Преподаватель: Трушакова Е.А.

Решение систем линейных уравнений

Требования к знаниям и умениям.
Системы *n* линейных уравнений с *n* переменными. Алгоритмы решения систем линейных уравнений: методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Жордана-Гаусса.

Основные сведения и определения

Определение 1. Системой m **– линейных уравнений с** n **– переменными** $x_1, x_2, ..., x_n$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Определение 2. Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то ее называют **совместной**.

Определение 3. Если система (1) не имеет решений, то ее называют **несовместной**.

Определение 4. Если система (1) имеет бесконечно много решений, то ее называют **неопределенной**.

Основные сведения и определения

Определение 1. Системой m **– линейных уравнений с** n **– переменными** $x_1, x_2, ..., x_n$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 2. Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то ее называют **совместной**.

Определение 3. Если система (1) не имеет решений, то ее называют **несовместной**.

Определение 4. Если система (1) имеет бесконечно много решений, то ее называют **неопределенной**.

Основные сведения и определения

Определение 5. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при переменных системы (1), называется **основной матрицей системы** (1).

Определение 6. Матрица $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ называется **матрицей–столбцом свободных членов.**

Определение 7. Матрица $A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$, полученная из основной матрицы добавлением столбца свободных членов системы (1), называется **расширенной матрицей системы** (1).

Основные сведения и определения

Замечание 1. *Система (1) в матричной форме имеет вид:* $A \cdot X = B$, *где* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *матрица-столбец переменных.*

Определение 8. Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел $(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ \dots,\ x_n = k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы превращается в верное равенство.

Метод Крамера

Теорема: Пусть Δ – определитель основной матрицы A системы (1), а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j – го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}, \;\; j = 1, 2, ..., n$ (1),

т.е. $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \; ..., \; x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$ (2).

Замечание. *Формулы (2) получили название формул Крамера.*

Метод Крамера

Пример. По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. **Вычислим определитель $\triangle$,**

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 18 \neq 0$$

следовательно, по **Теореме Крамера** система имеет единственное решение.

Метод Крамера

2. Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов на столбец свободных членов B:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

3. Теперь по формулам Крамера получаем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2.$$

4. Ответ. $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2$

Метод обратной матрицы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $n = m$.
Тогда основная матрица системы (1) является **квадратной**, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Если $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы определяется:

Методом обратной матрицы по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (2)$$

Метод обратной матрицы

Определение 1. Квадратная **матрица** A называется **обратимой**, если существует такая матрица X, что $A \cdot X = X \cdot A = E \quad (1)$.

Определение 2. Всякую **матрицу** X удовлетворяющую (1) называют **обратной** к матрице A. Матрицу обратную к матрице A обозначают A^{-1}.

Замечание 1. *Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда* $|A| \neq 0$.

Способ нахождения обратной матрицы

Теорема: Если квадратная матрица A обратима, то

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A.

Метод обратной матрицы

Определение 3. **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя $n-$го порядка называется определитель $(n-1)-$го порядка, который получается в результате вычеркивания в определителе $n-$го порядка строки и столбца, содержащих элемент a_{ij}.

Определение 4. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ (3).

Пример. **Найти алгебраическое дополнение элемента a_{21} в матрице** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Решение.

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2.$$

Метод обратной матрицы

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Найдем определитель Δ матрицы A:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 13 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 13 = -1$$

Метод обратной матрицы

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Найдем определитель Δ матрицы A:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 13 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 13 = -1$$

Метод обратной матрицы

2. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ 3 & 13\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot 13-3\cdot 6)=-5$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & 13\end{vmatrix}=-1\cdot(2\cdot 13-3\cdot 6)=-8$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=1\cdot(2\cdot 3-3\cdot 1)=3$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 13\end{vmatrix}=-1\cdot(1\cdot 13-3\cdot 4)=-1$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 13\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot 13-3\cdot 4)=1$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot(1\cdot 3-1\cdot 3)=0$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 6\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot 6-1\cdot 4)=2$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix}=-1\cdot(1\cdot 6-2\cdot 4)=2$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot 1-2\cdot 1)=-1$$

Метод обратной матрицы

3. Составим обратную матрицу используя, ниже указанную формулу:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Метод обратной матрицы

Пример. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме система имеет вид: $A \cdot X = B$

А решение этого уравнения находится по формуле $X = A^{-1} \cdot B$

Метод обратной матрицы

I. Вычислим обратную матрицу:

Вычислим определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$

т.е. обратная матрица существует и равна $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

II. Теперь по формуле $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \\ 8 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + -1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1.$

Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы (1) m – линейных уравнений с n – переменными в общем виде.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad \mathbf{(1)}$$

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного вида), из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Метод Гаусса

Определение 1. **Две системы** линейных уравнений (S1) и (S2) называются **равносильными**, если каждое решение системы (S1) является решением (S2) и наоборот.

Определение 2. **Элементарными преобразованиями** системы линейных уравнений называются следующие преобразования:

1. Умножение какого-нибудь уравнения системы на число не равное нулю.
2. Прибавление к уравнению другого уравнения системы умноженного на любое число.
3. Исключение из системы или присоединение к системе линейного уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом $\left(0 \cdot x_1 + \_0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0\right)$
4. Перемена местами двух уравнений в системе.

Метод Гаусса

Теорема. Если одна система линейных уравнений получается из другой системы линейных уравнений в результате цепочки элементарных преобразований, то эти системы равносильны.

Замечание 1. *Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствует аналогичное преобразование над строчками расширенной матрицы и наоборот. Таким образом, элементарные преобразования над системой сводятся к соответствующим элементарным преобразованиям над строчками расширенной матрицы.*

Замечание 2. *Методом Гаусса можно решить любую систему линейных уравнений.*

Метод Гаусса

Суть метода:

При помощи элементарных преобразований систему (1) приводят к такому виду, из которого все ее решения усматриваются непосредственно. А именно, с помощью этих преобразований стараются привести систему (1) к системе S у которой в основной матрице по главной диагонали стоят отличные от нуля элементы (желательно число 1), а над и под главной диагональю нули.

Сначала нули получают под главной диагональю, а затем над. В процессе этих преобразований возможны следующие случаи:

I. В процессе этих преобразований получили систему, содержащую уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b \neq 0$ (т.е. в матрице будет строка $0 \quad \dots \quad 0|b$; в этом случае **система решений не имеет**).

Метод Гаусса

II. Либо этого не случилось, тогда возможны следующие ситуации:

а. Расширенная матрица системы (1) примет вид:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}' & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & a_{22}' & 0 & \dots & 0 & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}' & b_n' \end{array}\right)$$

где $a_{11}' \neq 0,\ a_{22}' \neq 0,\ \dots, a_{nn}' \neq 0$.

Замечание 3. *Количество уравнений не может быть больше числа переменных.*

Этой матрице соответствует система:

$$\begin{cases} a_{11}' \cdot x_1 = b_1' \\ a_{22}' \cdot x_2 = b_2' \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}' \cdot x_n = b_n' \end{cases}$$

Отсюда получаем **единственное решение**:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1'}{a_{11}'} \\ x_2 = \dfrac{b_2'}{a_{22}'} \\ \dots \\ x_n = \dfrac{b_n'}{a_{nn}'} \end{cases}$$

Метод Гаусса

b. Или расширенная матрица системы (1) примет вид:

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \dots & x_n & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
a_{11}' & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1r+1}' & a_{1\,r+2}' & \dots & a_{1n}' & b_1' \\
0 & a_{22}' & 0 & \dots & 0 & a_{2\,r+1}' & a_{2\,r+2}' & \dots & a_{2n}' & b_2' \\
0 & 0 & a_{33}' & 0 & 0 & a_{3\,r+1}' & a_{3\,r+2}' & \dots & a_{3n}' & b_3' \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{rr}' & a_{r\,r+1}' & a_{r\,r+2}' & \dots & a_{rn}' & b_r'
\end{array}\right) \text{где } a_{ij}' \neq 0
$$

Отсюда выражаем переменные $x_1, \ \dots, x_r$ через переменные $x_{r+1}, \ \dots, x_n$:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1'}{a_{11}'} - \dfrac{a_{1\,r+1}'}{a_{11}'} \cdot x_{r+1}' - \dfrac{a_{1r+2}'}{a_{11}'} \cdot x_{r+2}' - \dots - \dfrac{a_{1n}'}{a_{11}'} \cdot x_n' \\
x_2 = \dfrac{b_2'}{a_{22}'} - \dfrac{a_{2\,r+1}'}{a_{22}'} \cdot x_{r+1}' - \dfrac{a_{2\,r+2}'}{a_{22}'} \cdot x_{r+2}' - \dots - \dfrac{a_{2n}'}{a_{22}'} \cdot x_n' \\
\dots\dots \\
x_r = \dfrac{b_r'}{a_{rr}'} - \dfrac{a_{r\,r+1}'}{a_{r\,r}'} \cdot x_{r+1}' - \dfrac{a_{r\,r+2}'}{a_{r\,r}'} \cdot x_{r+2}' - \dots - \dfrac{a_{r\,n}'}{a_{r\,r}'} \cdot x_n'
\end{cases}
$$

Метод Гаусса

Полученная система дает представление о решении исходной системы. Придавая произвольные значения переменным $x_{r+1}, \dots, x_n$, мы будем получать соответствующие значения для переменных $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, тем самым, получая решение системы (1).

Определение 3. Переменные $x_1, \dots, x_r$, коэффициенты которых стоят по главной диагонали матрицы, называются **зависимыми переменными**, а все остальные переменные, т.е. $x_{r+1}, \dots, x_n$ называются **свободными переменными.**

В рассматриваемом случае система имеет бесконечно много решений.

Метод Гаусса

Пример. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем **расширенную матрицу системы**. Необходимо на первом шаге, чтобы $a_{11} \neq 0$, но удобнее для вычислений, чтобы $a_{11} = 1$. Поэтому поменяем местами первую и четвертую строки, чтобы a_{11} стал равным 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right). \begin{array}{c} (-5)\ (3)\ (-2) \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Метод Гаусса

Шаг 1. Умножим элементы первой строки на -5, 3 и -2 и прибавим их соответственно к элементам второй, третьей и четвертой строке, чтобы под элементом a_{11} в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right). \quad (-5)\ \ (3)\ \ (-2)$$

Для проведения второго шага необходимо, чтобы в новой матрице $a_{22} \neq 0$, но удобнее, чтобы $a_{22} = 1$ или $a_{22} = -1$. Поэтому переставим вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad (4)\ \ (3)$$

Метод Гаусса

Шаг 2. Элементы второй строки умножаем на 4 и 3 и прибавляем соответственно к элементам третьей и четвертой строк, тогда под элементом a_{22} во втором столбце появиться вторая «ступенька» из нулей.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (4)\ (3) \\ + \\ + \end{array}$$

Метод Гаусса

Шаг 3. Так как в полученной матрице $a_{33} = 26 \neq 0$, умножаем элементы третьей строки на $-\frac{24}{26} = -\frac{12}{13}$ и прибавляем к элементам четвертой строки. Получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-12/13) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ \quad -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11, \\ \qquad 26x_3 - 7x_4 = -7, \\ \qquad \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13}. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Шаг 4. Разрешая полученную систему методом подстановки относительно x_1, x_2, x_3, x_4 получаем решение системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2\cdot 1 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4\cdot 1 = -11 \\ 26x_3 - 7\cdot 1 = -7 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4 = -11 \\ 26x_3 - 7 = -7 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4 = -11 \\ 26x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4\cdot 0 - 2 = -4 \\ -x_2 + 11\cdot 0 - 4 = -11 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2 = -4 \\ -x_2 - 4 = -11 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2 = -4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 7 - 2 = -4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 5,\ x_2 = 7,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$