Лекция 4.
Раздел 3.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С
ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ
ГЕОМЕТРИИ

Дисциплина:

Элементы высшей математики

Преподаватель: Трушакова Е.А.

Решение систем линейных уравнений

Требования к знаниям и умениям.

Системы n линейных уравнений с n переменными. Алгоритмы решения систем линейных уравнений: методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Жордана-Гаусса.

Основные сведения и определения

Определение 5. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при переменных системы (1), называется **основной матрицей системы (1)**.

Определение 6. Матрица $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ называется **матрицей–столбцом свободных членов**.

Определение 7. Матрица $A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$, полученная из основной матрицы добавлением столбца свободных членов системы (1), называется **расширенной матрицей системы (1)**.

Основные сведения и определения

Замечание 1. Система (1) в матричной форме имеет вид: $A \cdot X = B$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец переменных.

Определение 8. Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы превращается в верное равенство.

Метод Крамера

Теорема: Пусть Δ – определитель основной матрицы A системы (1), а Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1, 2, \dots, n$ (1),

т.е. $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ (2).

Замечание. Формулы (2) получили название формул Крамера.

Метод Крамера

Пример. По формулам Крамера решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Вычислим определитель Δ ,

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 18 \neq 0$$

следовательно, по **Теореме Крамера** система имеет единственное решение.

Метод Крамера

2. Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ получаются из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов на столбец свободных членов B :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

3. Теперь по формулам Крамера получаем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2.$$

4. Ответ. $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -2$

Метод обратной матрицы

Определение 1. Квадратная матрица A называется **обратимой**, если существует такая матрица X , что $A \cdot X = X \cdot A = E$ (1).

Определение 2. Всякую матрицу X удовлетворяющую (1) называют **обратной** к матрице A . Матрицу обратную к матрице A обозначают A^{-1} .

Замечание 1. Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$.

Способ нахождения обратной матрицы

Теорема: Если квадратная матрица A обратима, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы A , A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A .

Метод обратной матрицы

Определение 3. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, который получается в результате вычеркивания в определителе n -го порядка строки и столбца, содержащих элемент a_{ij} .

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (3).

Пример. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{21} в матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Метод обратной матрицы

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Найдем определитель Δ матрицы A :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 13 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 13 = -1$$

Метод обратной матрицы

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Найдем определитель Δ матрицы A :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 13 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 13 = -1$$

Метод обратной матрицы

2. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 13 - 3 \cdot 6) = -5$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 13 - 3 \cdot 6) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 1) = 3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 13 - 3 \cdot 4) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 13 - 3 \cdot 4) = 1$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 3) = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 6 - 1 \cdot 4) = 2$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 4) = 2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -1$$

Метод обратной матрицы

3. Составим обратную матрицу используя, ниже указанную формулу:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Метод обратной матрицы

Пример. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме система имеет вид: $A \cdot X = B$

А решение этого уравнения находится по формуле $X = A^{-1} \cdot B$

Метод обратной матрицы

I. Вычислим обратную матрицу:

Вычислим определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$

т.е. обратная матрица существует и равна $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

II. Теперь по формуле $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \\ 8 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ. $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -1.$

Метод Гаусса

Определение 1. **Две системы** линейных уравнений (S1) и (S2) называются **равносильными**, если каждое решение системы (S1) является решением (S2) и наоборот.

Определение 2. **Элементарными преобразованиями** системы линейных уравнений называются следующие преобразования:

1. Умножение какого-нибудь уравнения системы на число не равное нулю.
2. Прибавление к уравнению другого уравнения системы умноженного на любое число.
3. Исключение из системы или присоединение к системе линейного уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом
($0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$)
4. Перемена местами двух уравнений в системе.

Метод Гаусса

Теорема. Если одна система линейных уравнений получается из другой системы линейных уравнений в результате цепочки элементарных преобразований, то эти системы равносильны.

Замечание 1. Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствует аналогичное преобразование над строчками расширенной матрицы и наоборот. Таким образом, элементарные преобразования над системой сводятся к соответствующим элементарным преобразованиям над строчками расширенной матрицы.

Замечание 2. Методом Гаусса можно решить любую систему линейных уравнений.

Метод Гаусса

Суть метода:

При помощи элементарных преобразований систему (1) приводят к такому виду, из которого все ее решения усматриваются непосредственно. А именно, с помощью этих преобразований стараются привести систему (1) к системе S у которой в основной матрице по главной диагонали стоят отличные от нуля элементы (желательно число 1), а над и под главной диагональю нули.

Сначала нули получают под главной диагональю, а затем над. В процессе этих преобразований возможны следующие случаи:

- I.** В процессе этих преобразований получили систему, содержащую уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b \neq 0$ (т.е. в матрице будет строка $0 \dots 0|b$; в этом случае **система решений не имеет**).

Метод Гаусса

II. Либо этого не случилось, тогда возможны следующие ситуации:

а. Расширенная матрица системы (1) примет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}' & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & a_{22}' & 0 & \dots & 0 & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}' & b_n' \end{array} \right)$$

где $a_{11}' \neq 0, a_{22}' \neq 0, \dots, a_{nn}' \neq 0$.

Замечание 3. Количество уравнений не может быть больше числа переменных.

Этой матрице соответствует система:

$$\begin{cases} a_{11}' \cdot x_1 = b_1' \\ a_{22}' \cdot x_2 = b_2' \\ \dots \\ a_{nn}' \cdot x_n = b_n' \end{cases} \text{ Отсюда получаем **единственное решение**: } \begin{cases} x_1 = \frac{b_1'}{a_{11}'} \\ x_2 = \frac{b_2'}{a_{22}'} \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n'}{a_{nn}'} \end{cases}$$

Метод Гаусса

б. Или расширенная матрица системы (1) примет вид:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \dots & x_n & \\ \hline a_{11}' & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1r+1}' & a_{1r+2}' & \dots & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & a_{22}' & 0 & \dots & 0 & a_{2r+1}' & a_{2r+2}' & \dots & a_{2n}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}' & 0 & 0 & a_{3r+1}' & a_{3r+2}' & \dots & a_{3n}' & b_3' \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rr}' & a_{rr+1}' & a_{rr+2}' & \dots & a_{rn}' & b_r' \end{array} \right) \text{ где } a_{ij}' \neq 0$$

Отсюда выражаем переменные $x_1, \dots, x_r$ через переменные $x_{r+1}, \dots, x_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1'}{a_{11}'} - \frac{a_{1r+1}'}{a_{11}'} \cdot x_{r+1} - \frac{a_{1r+2}'}{a_{11}'} \cdot x_{r+2} - \dots - \frac{a_{1n}'}{a_{11}'} \cdot x_n \\ x_2 = \frac{b_2'}{a_{22}'} - \frac{a_{2r+1}'}{a_{22}'} \cdot x_{r+1} - \frac{a_{2r+2}'}{a_{22}'} \cdot x_{r+2} - \dots - \frac{a_{2n}'}{a_{22}'} \cdot x_n \\ \dots \\ x_r = \frac{b_r'}{a_{rr}'} - \frac{a_{rr+1}'}{a_{rr}'} \cdot x_{r+1} - \frac{a_{rr+2}'}{a_{rr}'} \cdot x_{r+2} - \dots - \frac{a_{rn}'}{a_{rr}'} \cdot x_n \end{array} \right.$$

Метод Гаусса

Полученная система дает представление о решении исходной системы. Придавая произвольные значения переменным $x_{r+1}, \dots, x_n$, мы будем получать соответствующие значения для переменных $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$, тем самым, получая решение системы (1).

Определение 3. Переменные $x_1, \dots, x_r$, коэффициенты которых стоят по главной диагонали матрицы, называются **зависимыми переменными**, а все остальные переменные, т.е. $x_{r+1}, \dots, x_n$ называются **свободными переменными**.

В рассматриваемом случае система имеет бесконечно много решений.

Метод Гаусса

Пример. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем **расширенную матрицу системы**. Необходимо на первом шаге, чтобы $a_{11} \neq 0$, но удобнее для вычислений, чтобы $a_{11} = 1$. Поэтому поменяем местами первую и четвертую строки, чтобы a_{11} стал равным 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array} \right).$$

Annotations:
 -5 (with '+') above the arrow from row 2 to row 1.
 3 (with '+') above the arrow from row 4 to row 1.
 -2 (with '+') above the arrow from row 3 to row 1.

Метод Гаусса

Шаг 1. Умножим элементы первой строки на -5 , 3 и -2 и прибавим их соответственно к элементам второй, третьей и четвертой строке, чтобы под элементом a_{11} в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array} \right)$$

Annotations: A vertical double-headed arrow on the left indicates row swapping. On the right, three arrows point from the first row to the second, third, and fourth rows, labeled with (-5) , (3) , and (-2) respectively, with a plus sign below each arrow.

Для проведения второго шага необходимо, чтобы в новой матрице $a_{22} \neq 0$, но удобнее, чтобы $a_{22} = 1$ или $a_{22} = -1$. Поэтому переставим вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array} \right)$$

Annotations: A vertical double-headed arrow on the left indicates row swapping. On the right, two arrows point from the second row to the third and fourth rows, labeled with (4) and (3) respectively, with a plus sign below each arrow.

Метод Гаусса

Шаг 2. Элементы второй строки умножаем на 4 и 3 и прибавляем соответственно к элементам третьей и четвертой строк, тогда под элементом a_{22} во втором столбце появится вторая «ступенька» из нулей.

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} (4) \\ \xleftarrow{+} (3) \end{array} \end{array}$$

Метод Гаусса

Шаг 3. Так как в полученной матрице $a_{33} = 26 \neq 0$, умножаем элементы третьей строки на $-\frac{24}{26} = -\frac{12}{13}$ и прибавляем к элементам четвертой строки. Получим:

$$\begin{array}{c} (-12/13) \\ \swarrow + \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array} \right).$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11, \\ 26x_3 - 7x_4 = -7, \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13}. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Шаг 4. Разрешая полученную систему методом подстановки относительно x_4 , x_2 , x_3 , x_1 получаем решение системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 \cdot 1 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4 \cdot 1 = -11 \\ 26x_3 - 7 \cdot 1 = -7 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4 = -11 \\ 26x_3 - 7 = -7 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = -4 \\ -x_2 + 11x_3 - 4 = -11 \\ 26x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 4 \cdot 0 - 2 = -4 \\ -x_2 + 11 \cdot 0 - 4 = -11 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2 = -4 \\ -x_2 - 4 = -11 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2 = -4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 7 - 2 = -4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$