ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Практическое занятие № 1

Лингвистам — специалистам по живым и мертвым языкам, часто приходится разгадывать надписи, сделанные на незнакомых языках. Предположим, что им попался текст, написанный при помощи 26 незнакомых знаков. Эти знаки являются буквами, изображающими каждый один из 26 звуков.

Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма?

Виленкин Н. Я. Комбинаторика,М.,1969г.

Расположим знаки письма в некотором порядке. Тогда каждый способ сопоставления даст некоторую перестановку звуков. Но из 26 звуков можно составить $P_{26} = 26!$ перестановок. А это число приблизительно равно $4 \cdot 10^{26}$. Разумеется, проверить все эти возможности непосильная работа не только для человека, но и для электронной вычислительной машины.

Расположим знаки письма в некотором порядке. Тогда каждый способ сопоставления даст некоторую перестановку звуков. Но из 26 звуков можно составить $P_{26} = 26!$ перестановок. А это число приблизительно равно $4 \cdot 10^{26}$. Разумеется, проверить все эти возможности непосильная работа не только для человека, но и для электронной вычислительной машины.

Поэтому стараются уменьшить число возможностей. Часто удается отделить знаки, обозначающие гласные, от знаков, обо значающих согласные (гласные чаще стоят рядом с согласными, чем гласные рядом с гласными или согласные рядом с согласными; наблюдая, какие сочетания знаков чаще всего встречаются, можно отделить знаки для гласных от знаков для согласных).

Предположим, что удалось найти 7 знаков для гласных и 19 знаков для согласных. Подсчитаем, *во сколько раз уменьшилось число возможностей?*

7 знаков для гласных можно переставлять друг с другом 7! способами, а 19 знаков для согласных 19! способами. Общее число комбинаций равно 7! • 19!. Значит, работа уменьшилась в 26!/7! • 19!≈650 000 раз. Конечно, стало легче, но и 7! • 19! — гигантское число.

Далее подсчитывают частоту появления отдельных знаков. Сравнивая эту частоту с частотой появления букв в близких к данному языках, можно примерно угадать значения некоторых знаков. Другие знаки удается найти, сравнив данный текст с тем же текстом на ином языке (древние цари любили вещать о своих «подвигах» на нескольких языках).

Предположим, что в результате этой работы опознано 4 гласных и 13 согласных букв. Сколько еще остается возможностей?

Ясно, что $3! \cdot 6! = 4320$. А такое число комбинаций уже можно по порядку проверить, используя электронные вычислительные машины.

С аналогичными трудностями встречаются и криптологи — специалисты по расшифровке кодов.

Задача 1.

В группе 30 студентов. Сколькими способами могут быть выбраны профорг и староста, если каждый студент может быть избран на одну из этих должностей?

Решение:

Из условия задачи ясно, что, если два студента избраны на должности профорга и старосты, то, поменяв порядок избрания, мы получим другую комбинацию выборов. Следовательно, нам необходимо найти число способов, равное числу размещений из 30 элементов по 2:

$$A_{30}^{2}=\frac{30!}{(30-2)!}=30*29=870$$

<u>Задача 2.</u>

У ребенка остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 2 и 6. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги шестизначные номера – составить каталог. Сколько различных шестизначных номеров может составить ребенок?

Решение:

Можно считать, что опыт состоит в 6-кратном выборе с возращением одной из 3 цифр {1, 2, 6}.

Таким образом, число шестизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 6:

$$\bar{A}_3^6 = 3^6 = 729$$

Задача 3.

Сколькими способами можно упорядочить множество {1, 2, ... ,2n} так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение:

Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n) $n!$ способами; каждому способу размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами.

Поэтому общее число перестановок указанного типа равно $n! \cdot n! = (n!)^2$.

Задача 4:

Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «комбинаторика»?

Решение:

В слове «комбинаторика» 2 буквы «и», 2 буквы «о», 2 буквы «к», 2 буквы «а», поэтому число перестановок всех букв разделим на число перестановок повторяющихся букв:

$$P(2,2,2,2,1,1,1,1,1)=\frac{13!}{2!2!2!2!1!1!1!1!1!}=389188800$$

Задача 5.

Сколькими способами читатель может выбрать три книжки из 5?

Решение:

Так по условию задачи имеется множество, состоящее из 5 книг. Читателю неважно, в каком порядке их брать, важно только их количество – 3. Следовательно, нам необходимо найти число сочетаний из 5 элементов по три элемента.

Так как число сочетаний находится по формуле $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

Задача 6.

В библиотеке имеются книги по истории, географии, биологии и т.д.; всего по 21-му разделу науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Сколько существует вариантов такого заказа?

<u>Решение:</u>

Так 4 заказанные книги могут быть из одного раздела науки, и из разных, при этом порядок выбора разделов не важен, то число вариантов заказа определяется числом сочетаний с повторениями из 21 элемента по 4:

$$\bar{C}_{21}^{4} = C_{24}^{4} = \frac{24!}{4!\,(20)!} = 10626$$