Лекция №5

МЕТОД ГАУССА.

Пусть задана система из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим для нее расширенную матрицу, отделив столбец правых частей вертикальной чертой:

$$P = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Каждая строка расширенной матрицы является образом одного уравнения :

элементы a_{ij} изображают коэффициенты при неизвестных;

элемент b_i изображает правую часть уравнения;

вертикальная черта изображает знак равенства.

Вспомним элементарные преобразования, не изменяющие решение системы:

Для расширенной матрицы системы P допустимы:

- перестановка любых двух строк;
- перестановка любых двух столбцов, КРОМЕ СТОЛБЦА ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ (СТОЛБЕЦ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ПЕРЕСТАВЛЯТЬ НЕЛЬЗЯ);
- умножение элементов любой строки на число $\alpha \neq 0$;
- сложение любых двух строк.

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Вычисления проводятся в два этапа, называемых ПРЯМЫМ и ОБРАТНЫМ ХОДОМ.

Преобразования коэффициентов при неизвестных и правых частей системы удобно выполнять в матричной форме.

ЗАМЕЧАНИЕ: рекомендуется нумеровать столбцы или проставлять под столбцами соответствующие неизвестные:

$$P = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}$$

Прямой ход

Приведем расширенную матрицу системы Р к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований :

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2\,r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} & & b_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b_{r+1} \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b_m
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n
\end{array}
\end{array}
$$

Возможны две ситуации:

I) среди чисел $b_{r+1}, \dots, b_m$ есть хотя бы одно, не равное нулю, например: $b_{r+1} \neq 0$

II) все числа $b_{r+1}, \dots, b_m$ равны нулю:
$b_{r+1} = 0; \dots, b_m = 0$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2\,r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} & & b_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b_{r+1} \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b_m
\end{array}\right)
$$

$$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_r \quad x_{r+1} \ldots \quad x_n$$

I) Если среди чисел $b_{r+1}, \ldots, b_m$ есть хотя бы одно, не равное нулю, например: $b_{r+1} \neq 0$, то это означает, что в системе есть уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_{r+1} \neq 0,$$

которое не имеет решений.

Если сравнить ранги матриц, то rang $A = r$, а rang $P = r + 1$; по теореме Кронекера-Капелли система **несовместна**.

Решение закончено, обратный ход метода Гаусса не нужен.

Какой ответ следует дать ?

II) Если все числа $b_{r+1}, \dots, b_m$ равны нулю: $b_{r+1} = 0; \dots, b_m = 0$,

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2\,r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n
\end{array}
\end{array}$$

это значит, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\ P = r$, и система уравнений совместна.

Выделим базисный минор и отбросим нулевые строки:

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2\,r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & & 1 & a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n
\end{array}
\end{array}$$

Останется укороченная система из r уравнений.

Обратный ход

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
\multicolumn{9}{c}{\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2\,r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & 1 & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} & & b_r
\end{array}\right)} \\
\hline
x_1 & x_2 & \ldots & x_r & x_{r+1} & \ldots & x_n & &
\end{array}
$$

В укороченной системе из r уравнений возможны два случая:

Случай 1

Число неизвестных n равно рангу системы r:

$$n = r$$

Случай 2

Число неизвестных n больше ранга системы r :

$$n > r$$

Почему невозможен случай $n < r$?

Случай 1

Число неизвестных n равно рангу системы r: $n = r$

то есть матрица системы стала треугольной :

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1\,n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2\,n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \end{array}$$

Если вернуться к уравнениям, то получим

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_n = b_n \end{cases}$$

Решая последовательно уравнения системы снизу вверх, каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

Набор значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ определяется однозначно, то есть система имеет ЕДИНСТВЕННОЕ решение.

(называется определенной)

Случай 2

Число неизвестных n больше ранга системы r : $n > r$

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2\,r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & 1 & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} & & b_r
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & \ldots & x_r & x_{r+1} & \ldots & x_n &
\end{array}
\end{array}$$

БАЗИСН
ЫЕ

СВОБОДН
ЫЕ

В базисный минор вошли коэффициенты при неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$;

назовем их БАЗИСНЫМИ.

Неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, не вошедшие в базисный минор, назовем СВОБОДНЫМИ

ВОПРОС: сколько свободных неизвестных?

ОТВЕТ: свободных неизвестных $k = n - r$

Перейдем от матричной формы записи к уравнениям:

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & a_{2\,r} & a_{2\,r+1} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & 1 & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} & & b_r
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n
\end{array}
\end{array}
$$

БАЗИСН
ЫЕ

СВОБОДН
ЫЕ

$$
\begin{cases}
x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2\,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r
\end{cases}
$$

БАЗИСН
ЫЕ

СВОБОДН
ЫЕ

Придадим свободным переменным любые значения и подставим их в уравнения:

$$x_{r+1} = C_1$$
$$x_{r+2} = C_2$$
$$\dots$$
$$x_n = C_{n-r}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1\,r+1}C_1 + \cdots + a_{1n}C_{n-r} = b_1 \\ \qquad x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2\,r+1}C_1 + \cdots + a_{2n}C_{n-r} = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_r + a_{r\,r+1}C_1 + \cdots + a_{rn}C_{n-r} = b_r \end{cases}$$

БАЗИСНЫЕ СВОБОДНЫЕ

Выразим базисные переменные через свободные. Для этого перенесем в правую часть уравнений слагаемые со свободными переменными (изменив знак на противоположный!!!):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}C_1 - \cdots - a_{1n}C_{n-r} \\ \qquad x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}C_1 - \cdots - a_{2n}C_{n-r} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_r = b_r - a_{r\,r+1}C_1 - \cdots - a_{rn}C_{n-r} \end{cases}$$

Вычислим базисные переменные(как в случае 1), решая последовательно уравнения системы снизу вверх.

Придавая свободным переменным другие значения, получим другие значения базисных. Система будет иметь БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО решений.

(называется неопределенной)

Пример 1

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: ***Прямой ход***

$$P = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \times(-2) \quad \times(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1\cdot(-2)+2 & 2\cdot(-2)-1 & 3\cdot(-2)+1 & (-1)\cdot(-2)-2 \\ 1\cdot(-1)+1 & 2\cdot(-1)-3 & 3\cdot(-1)-2 & (-1)\cdot(-1)+3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} :(-5) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 5 \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{array}\right)$$

I) $b_3 = \quad \neq 0$; система **несовместна**

ОТВЕТ : нет решений