Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций

11 класс

Функция	Область определения D(y)	Множество значений E(y)
y=sin x	R	$-1 \le y \le 1$
y=cos x	R	$-1 \le y \le 1$
y=tg x	$x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	R
y=ctg x	$x \ne \pi n, n \in Z$	R

1. ***Найдите область определения функции:***

$$a)\ y = \cos\frac{1}{x} \qquad D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$$

$$б)\ y = \sin\sqrt{x} \qquad D(y) = [0;+\infty)$$

3. Найдите область определения функции:

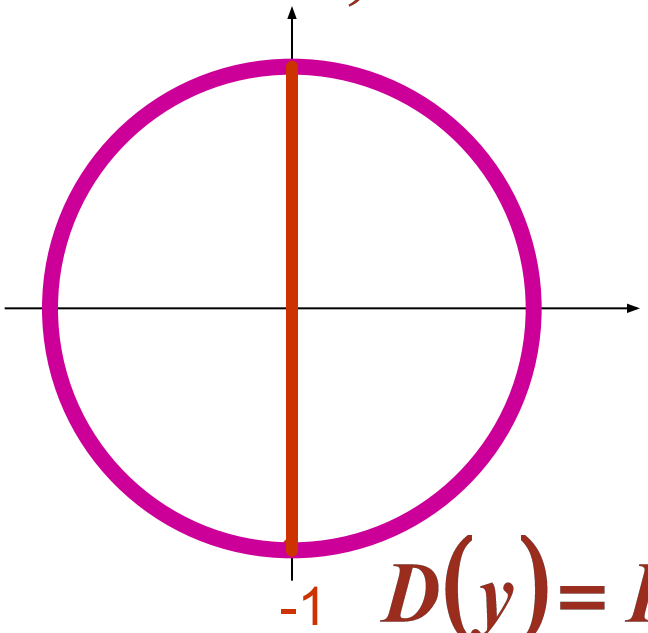
$$а)\ y=\sqrt{\sin x+1}$$

$$б)\ y=\lg \sin x$$

Решение

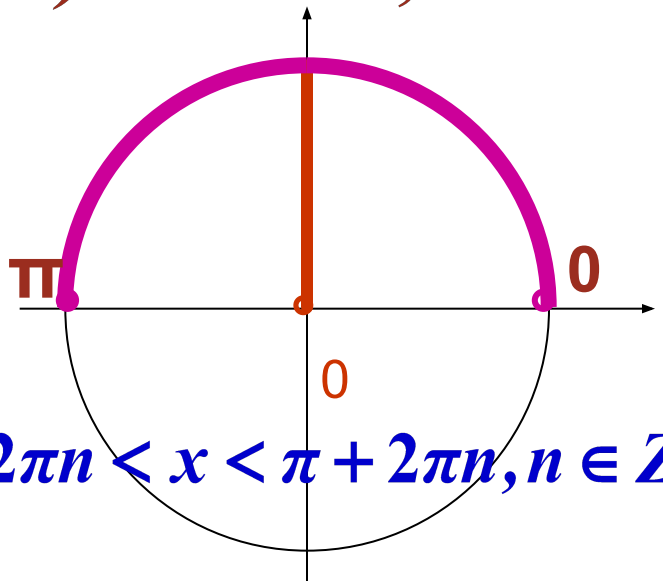
$$а)\ \sin x+1\geq 0;$$

$$\sin x\geq -1;$$



$$D(y)=R;$$

$$б)\ \sin x>0;$$



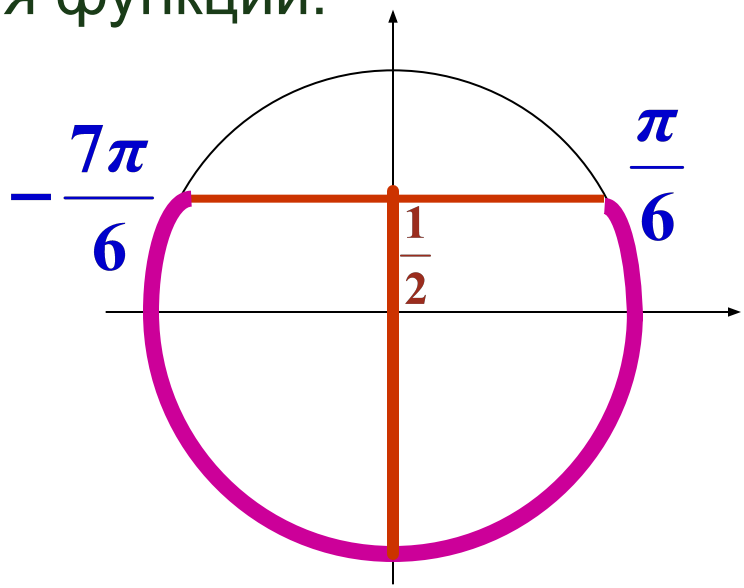
$$2\pi n<x<\pi+2\pi n, n\in Z$$

$$Ответ:\ D(y)=(2\pi n;\pi+2\pi n), n\in Z$$

$$Ответ:\ D(y)=R.$$

3. Найдите область определения функции:

$$в)\ y=\sqrt{1-2\sin x}$$



$$Решение:\ 1-2\sin x\geq 0;$$

$$\sin x\leq\frac{1}{2};$$

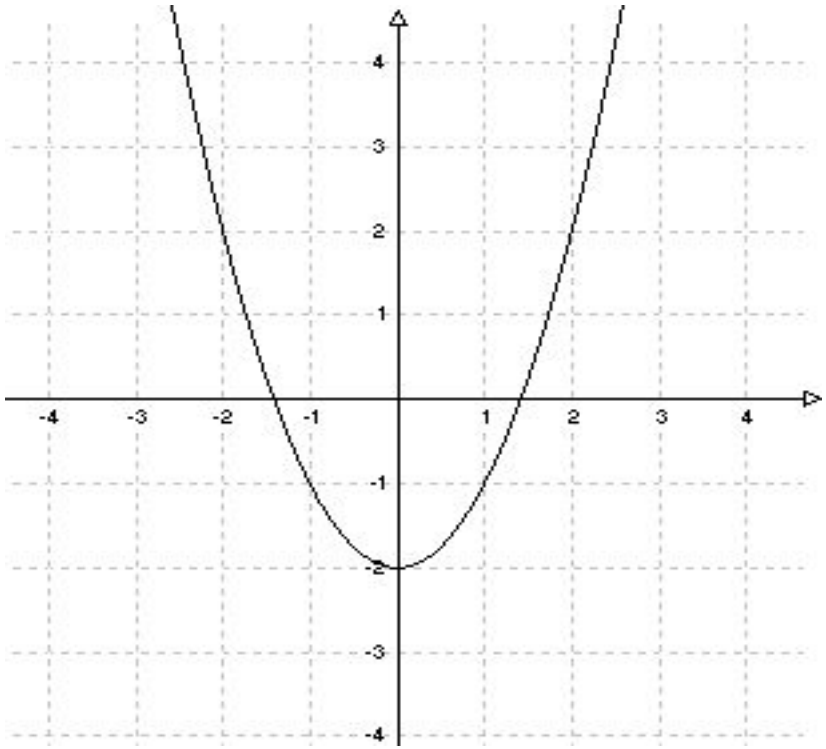
$$-\frac{7\pi}{6}+2\pi n\leq y\leq\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$$

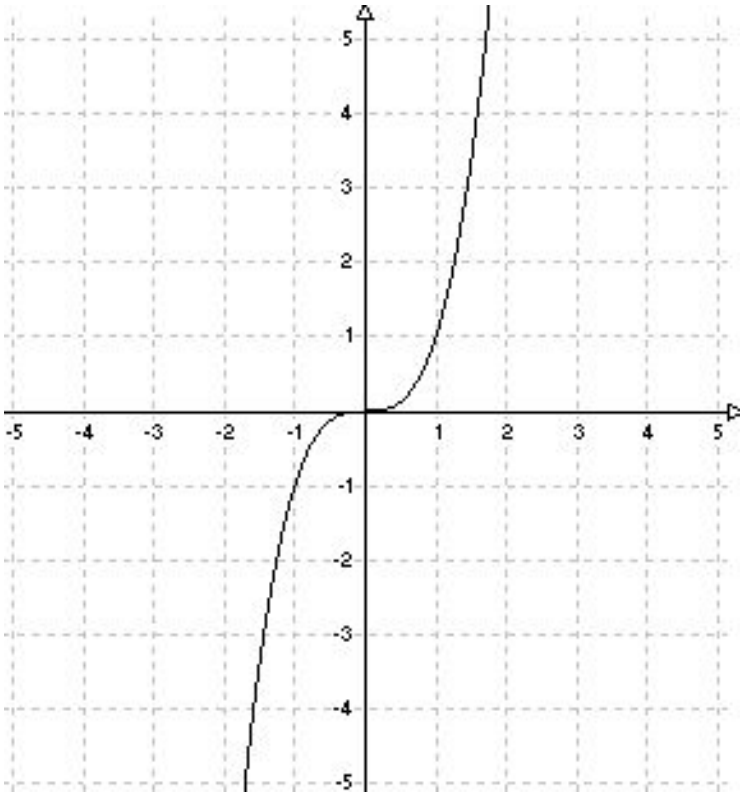
$$Ответ:\ D(y)=\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$$

Четность и нечетность тригонометрических функций

11 класс

Симметрия относительно оси Оу и начала координат





Четные функции

- ***Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого x из области определения функции верно равенство $f(-x) = f(x)$.***
- **Чтобы узнать является ли функция четной нужно в функцию f(x) вместо переменной x поставить переменную(–x).**

Четные функции

- **<u>Например:</u> является ли четной функция $f(x) = 3x^2 + 2$**

- **$f(-x) = 3(-x)^2 + 2 = 3x^2 + 2 = f(x)$ – функция четная**

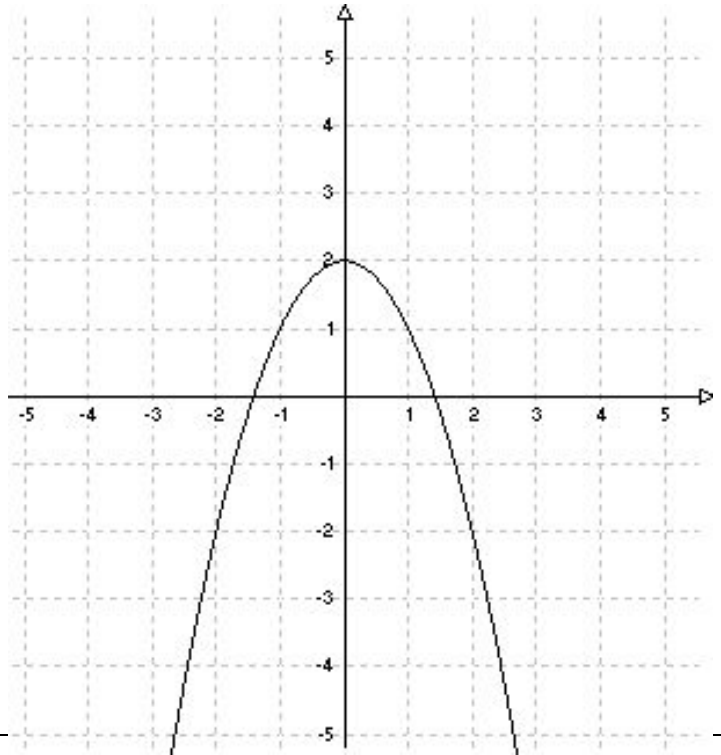
Четные функции

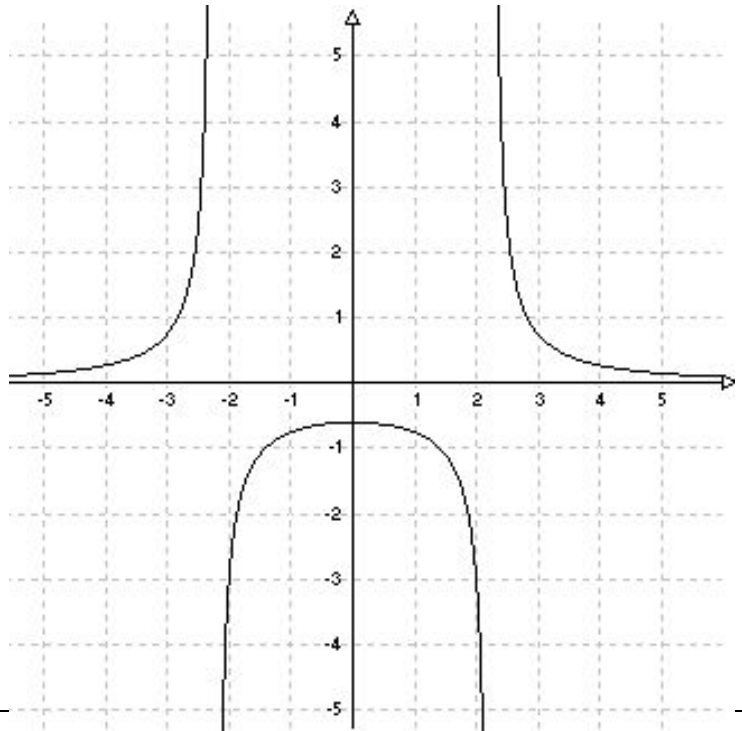
- Проверим являются ли данные функции четными

- $f(x) = 2x^4 - 3x^2$
- $f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^2 = 2x^4 - 3x^2$ - четная
- $f(x) = x^3 - 2x^2$
- $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 = -x^3 - 2x^2$ Не является четной

График четной функции

- *График четной функции симметричен относительно оси ординат (ось ОУ).*





Нечетные функции

- ***Функция y = f(x) называется нечетной, если для любого x из области определения функции верно равенство***
  f(-x) = - f(x).
- **чтобы узнать является ли функция нечетной нужно в функцию f(x) вместо переменной *x* поставить переменную (*–x)* и получить первоначальную функцию *с противоположными знаками*.**

Нечетные функции

- ***<u>Например:</u> является ли нечетной функция***
  $f(x) = 3x^3 + x$

- $f(-x) = 3(-x)^3 + (-x) = -3x^3 - x = -(3x^3 + x) =$
  $= -f(x)$ – ***функция нечетная***

Нечетные функции

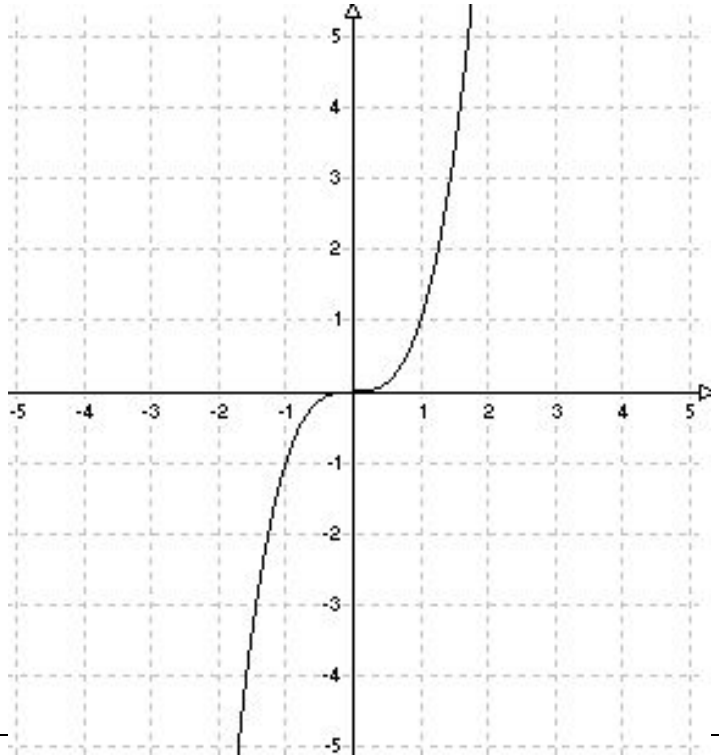
- *Проверим являются ли данные функции нечетными*

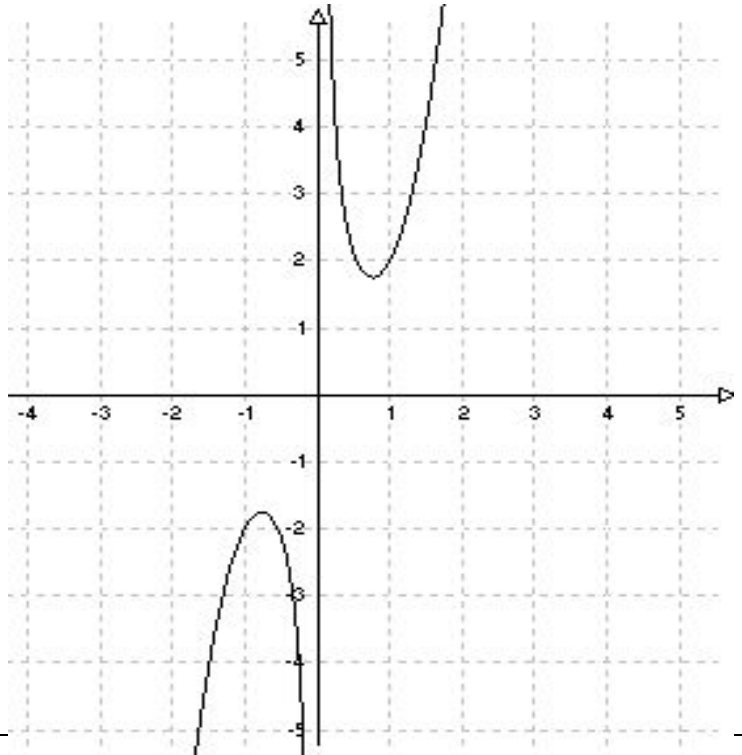
- $f(x) = 2x^4 + 3x$
- $f(x) = x^3 - 2x$

- $f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x) = = 2x^4 - 3x$ - *не является нечетной*
- $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = - x^3 + 2x$ *нечетная*

График нечетной функции

- *График нечетной функции симметричен относительно начала координат.*





Четные и нечетные функции

- *Функции могут быть как четными, нечетными, так и ни четными, ни нечетными.*

Пример: $y(x) = x^2 + 2x$

$y(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x$

Четность и нечетность

Для любого значения x верны равенства:

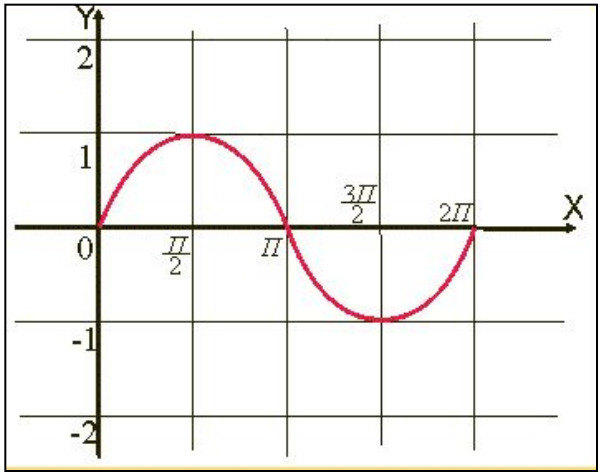
- ✔ **Sin(-x) = -Sin x**
- ✔ **Cos(-x) = Cos x**

Следовательно:

y= Sin x – *нечетная* функция

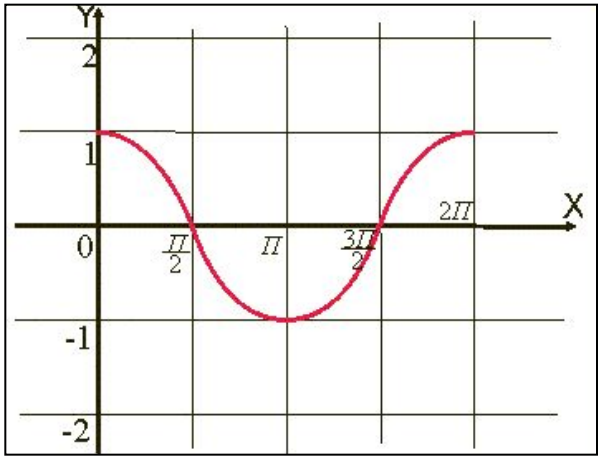
y= Cos x – *четная* функция

т.к. sin(-x)=-sinx



1. y=sinx – нечетная функция,

График функции симметричен относительно начала координат



2. y=cosx – нечетная функция,

т.к. cos(-x)=cosx

График функции симметричен относительно оси Оу

Так как для любого значения x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ верно равенство

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

то $y = \operatorname{tg} x$ – *нечетная* функция.

Пример

Выяснить, является ли функция

$y = 2 + \sin^2 x$ четной или нечетной.

Решение:

$y(-x) = 2 + \sin^2(-x) = 2 + (-\sin x)^2 =$

$= 2 + \sin^2 x = y(x)$ □

□ $y = 2 + \sin^2 x$ – **четная функция.**

Пример: определите, является ли данная функция четной или нечетной $f(x) = x^3 \sin x^2$

Решение:

$$f(x) = x^3 \sin x^2$$

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x)^2 = -x^3 \sin x^2$$

$$-f(x) = -x^3 \sin x^2,$$

так как $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ - нечетная функция.

Работа в тетрадях

Определите, являются ли данные функции четными или нечетными:

1) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

2) $f(x) = \dfrac{\cos 5x + 1}{|x|}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$

4) $f(x) = \dfrac{|x|}{\sin x \cdot \cos x}$

5) $f(x) = \dfrac{x + tgx}{x \cdot \cos x}$

Разбейте функции на три группы:

- *четные*
- *нечетные*
- *не являются ни четными, ни нечетными*

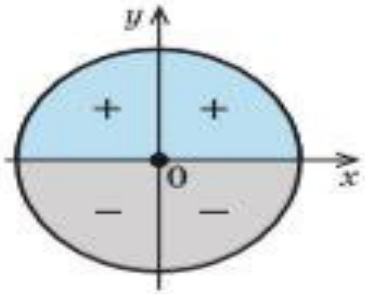
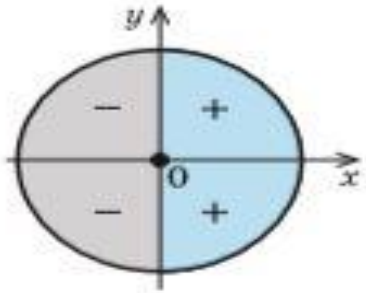
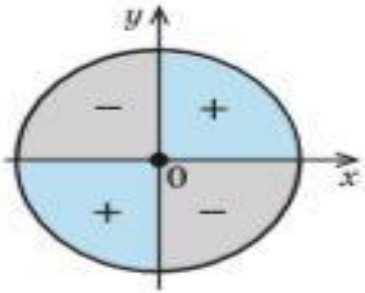
1) $y = \cos 3x$	2) $y = 3\sin 2x$
3) $y = \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x$	4) $y = \frac{1}{x} \cdot tgx$
5) $y = \cos x + x$	6) $y = \sin x - x$
7) $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + 2x$	8) $y = \frac{tgx}{2}$
9) $y = 2^{\cos x}$	10) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
11) $y = \lvert tgx \rvert$	12) $y = \lvert \sin x \rvert$
13) $y = \cos(x - \pi) - x^2$	14) $y = \cos x \cdot \sin \frac{x}{2}$
15) $y = x^2 + tgx$	

Проверяем ответы

четные	нечетные	ни чет., ни нечет.
1	2	5
4	3	7
9	6	15
10	8	
11	14	
12		
13		

Таблица 20

1. Знаки тригонометрических функций

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$
		

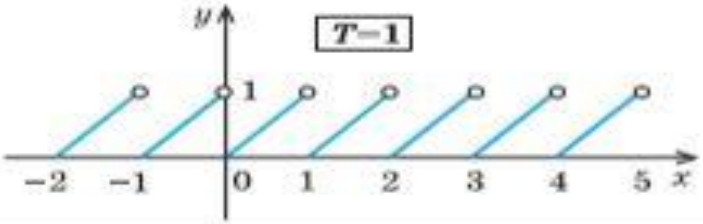
2. Четность и нечетность

Косинус — четная функция	*Синус, тангенс и котангенс — нечетные функции*
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

3. Периодичность

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции числа $(x + T)$ и $(x - T)$ также принадлежат области определения и выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

$y = \{x\}$ — дробная часть числа x	Через промежутки длиной T (на оси Ox) вид графика периодической функции повторяется
	Если T — период функции, то $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm kT$ — также периоды этой функции ($k \in N$)

!Определение!

***Функция f(x) называется* периодической,** *если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство*

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T называется* периодом *функции f(x).

Периодичность

Для любого значения x верны равенства:

- ✔ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- ✔ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Следовательно, значения Sin и Cos периодически повторяются при изменении аргумента на 2π.

Такие функции называются *<u>периодическими</u>* с периодом 2π.

Покажем, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции y = Cos x.

Пусть T › 0 – период косинуса, т.е. для любого x выполняется равенство

Cos (x + T) = Cos x. Положив x = 0, получим Cos T = 1. Отсюда T = 2πk, k є Z. Так как T › 0, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, …, и поэтому период не может быть меньше 2π.

Аналогично можно доказать, что наименьший положительный период функции y = Sin x также равен 2π

Пример:

Доказать, что $f(x) = \sin 3x$ – периодическая функция с периодом $(2\pi)/3$.

Доказательство:

Данная функция определена для всех $x \in R$, поэтому достаточно показать, что для любого x верно равенство $f(x + T) = f(x)$.

$\underline{f(x + (2\pi)/3)} = \sin 3(x + (2\pi)/3) =$

$= \sin (3x + 2\pi) = \sin 3x = \underline{f(x)}$

Покажем, что функция y= tg x является периодической с периодом π.

Если x принадлежит области определения этой функции, т.е. $x \neq -\pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, то по формулам приведения получаем

$$tg(x - \pi) = -tg(\pi - x) = -(-tg\ x) = tg\ x$$

$$tg(x + \pi) = tg\ x$$

Таким обтазом, $tg(x - \pi) = tg\ x = tg(x + \pi)$.

Следовательно, π – период функции y = tg x.

Покажем, что π – наименьший положительный период функции y = tg x.

Пусть T – период тангенса, тогда $tg(x + T) = tg\ x$, откуда при $x = 0$ получаем $tg\ T = 0$, $T = k\pi$, $k \in Z$. Так как наименьшее целое положительное k равно 1, то <u>π – наименьший положительный период функции $y = tg\ x$.</u>

Доказать, что $y = tg\,(x/3)$ – периодическая функция с периодом 3π.

<u>Доказательство:</u>

Так как $tg((x + 3\pi)/3) = tg\,(x/3 + \pi) = tg\,(x/3)$

и

$tg((x - 3\pi)/3) = tg(x/3 - \pi) = tg\,(x/3)$, то $tg(x/3)$–

периодическая функция с периодом 3π.