# Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций

*11* класс

| Функция | Область определения D(y) | Множество значений E(y) |
|---|---|---|
| y=sin x | **R** | $-1 \le y \le 1$ |
| y=cos x | **R** | $-1 \le y \le 1$ |
| y=tg x | $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ | **R** |
| y=ctg x | $x \ne \pi n, n \in Z$ | **R** |

1. ***Найдите область определения функции:***

$$а)\ y = \cos\frac{1}{x} \qquad D(y) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$$

$$б)\ y = \sin\sqrt{x} \qquad D(y) = [0;+\infty)$$

3. Найдите область определения функции:

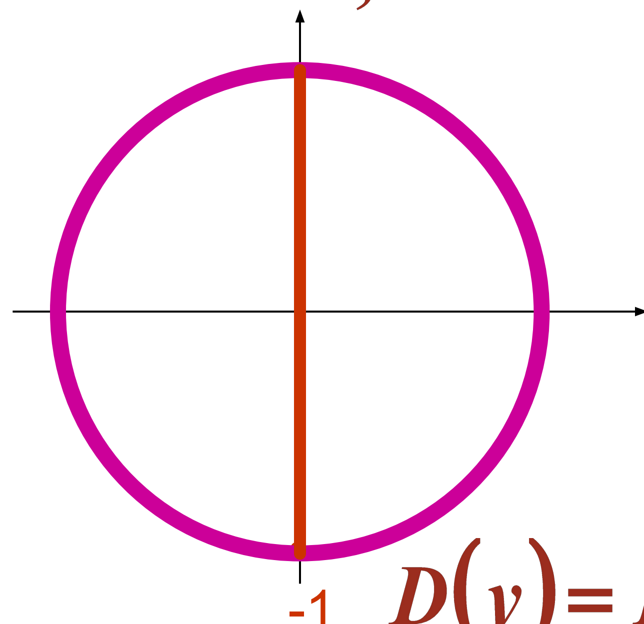
$$a)\; y=\sqrt{\sin x+1}$$

$$б)\; y=\lg \sin x$$

Решение

$$a)\; \sin x+1\geq 0;$$

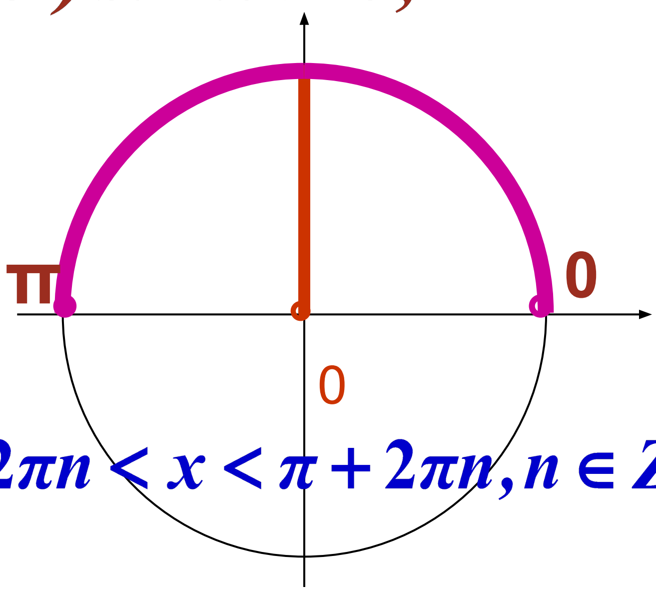
$$\sin x\geq -1;$$




$$D(y)=R;$$

$$Ответ: D(y)=R.$$

$$б)\; \sin x>0;$$

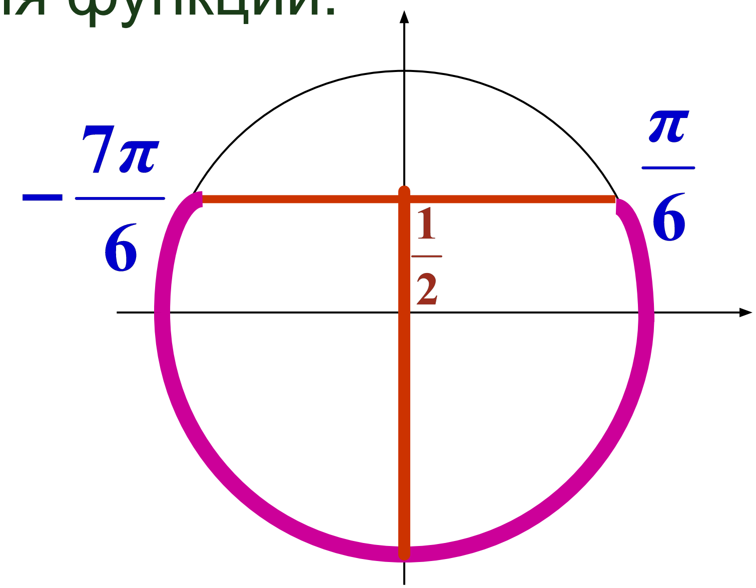



$$2\pi n<x<\pi+2\pi n,\; n\in Z$$

$$Ответ: D(y)=(2\pi n;\pi+2\pi n),\; n\in Z$$

3. Найдите область определения функции:

$$в\,)\, y = \sqrt{1 - 2\sin x}$$




$$Решение: 1 - 2\sin x \geq 0;$$

$$\sin x \leq \frac{1}{2};$$

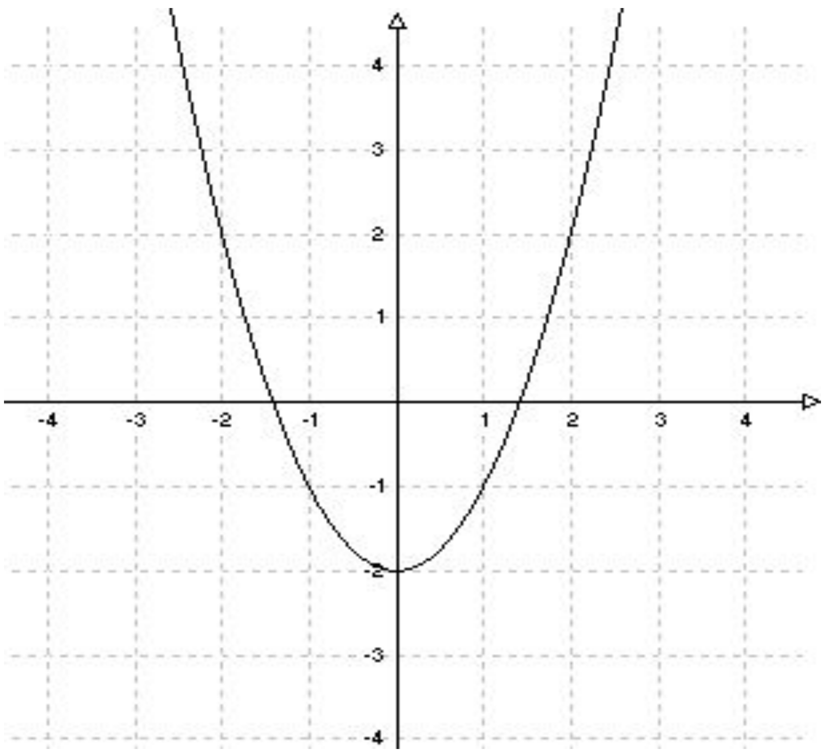
$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq y \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

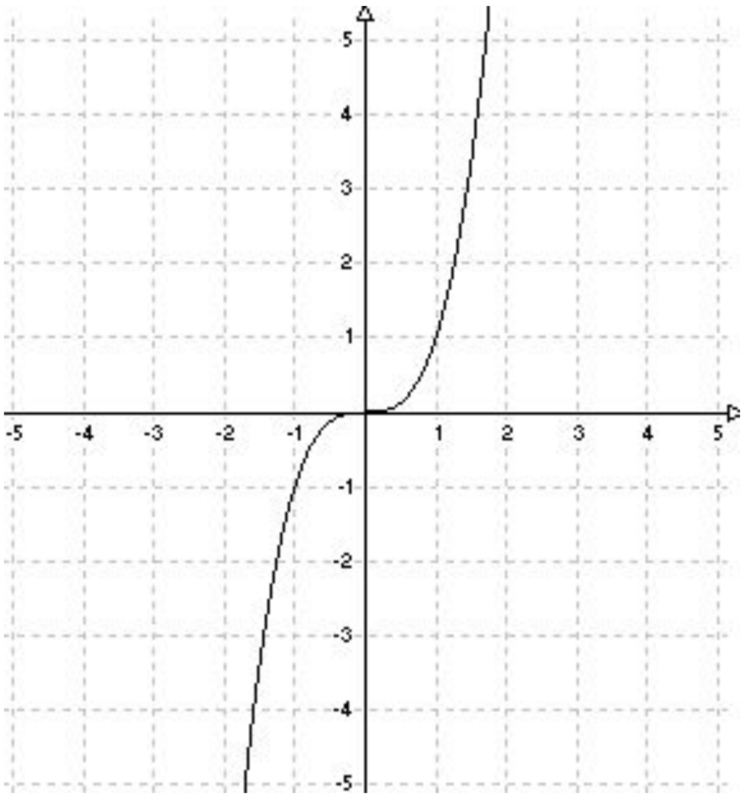
$$Ответ:\ D(y) = \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$$

# Четность и нечетность тригонометрических функций

*11* класс

# Симметрия относительно оси Оу и начала координат



# Четные функции

- ***Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любого х из области определения функции верно равенство $f(-x) = f(x)$.***
- **Чтобы узнать является ли функция четной нужно в функцию f(x) вместо переменной x поставить переменную(–x).**

# Четные функции

- **<u>Например:</u> является ли четной функция $f(x) = 3x^2 + 2$**
- **$f(-x) = 3(-x)^2 + 2 = 3x^2 + 2 = f(x)$ – функция четная**

# Четные функции

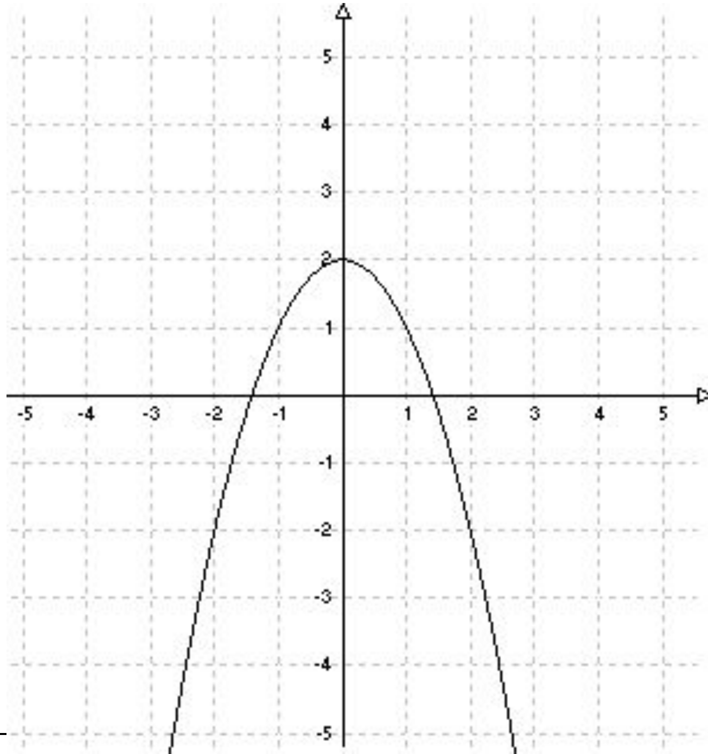
- Проверим являются ли данные функции четными

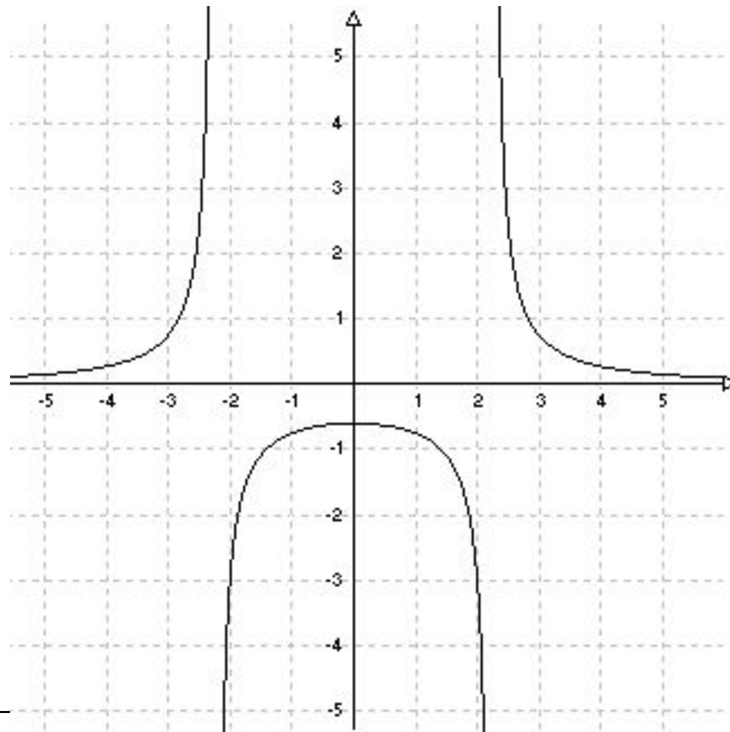
- $f(x) = 2x^4 - 3x^2$
- $f(x) = x^3 - 2x^2$

- $f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^2 = 2x^4 - 3x^2$ - *четная*
- $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 = -x^3 - 2x^2$ *Не является четной*

# График четной функции

- *График четной функции симметричен относительно оси ординат (ось ОУ).*



# Нечетные функции

- ***Функция* $y = f(x)$ *называется нечетной, если для любого x из области определения функции верно равенство***

  $f(-x) = - f(x).$
- **чтобы узнать является ли функция нечетной нужно в функцию f(x) вместо переменной *x* поставить переменную (*–x)* и получить первоначальную функцию *с противоположными знаками*.**

# Нечетные функции

- ***<u>Например:</u>*** *является ли нечетной функция* $f(x) = 3x^3 + x$

- $f(-x) = 3(-x)^3 + (-x) = -3x^3 - x = -(3x^3 + x) =$

$= - f(x)$ – ***функция нечетная***

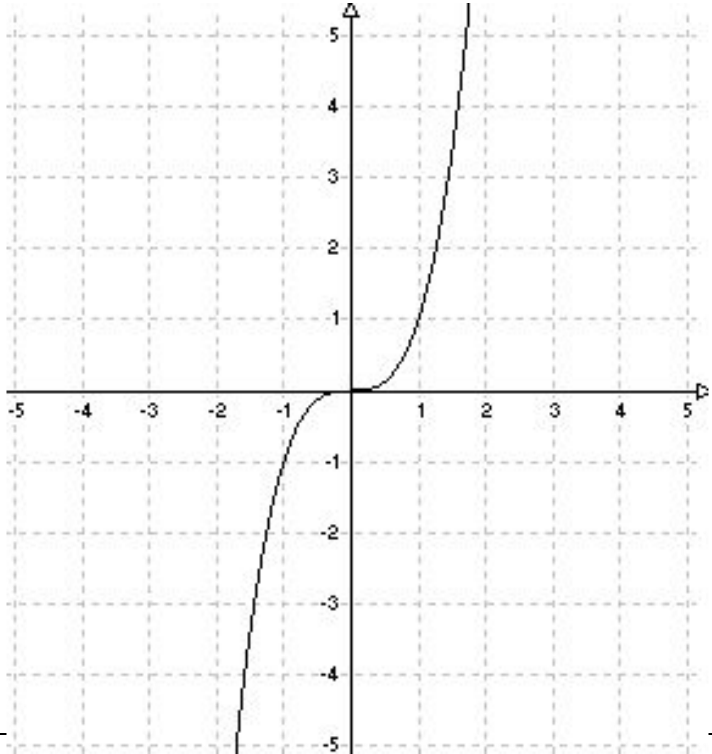
# Нечетные функции

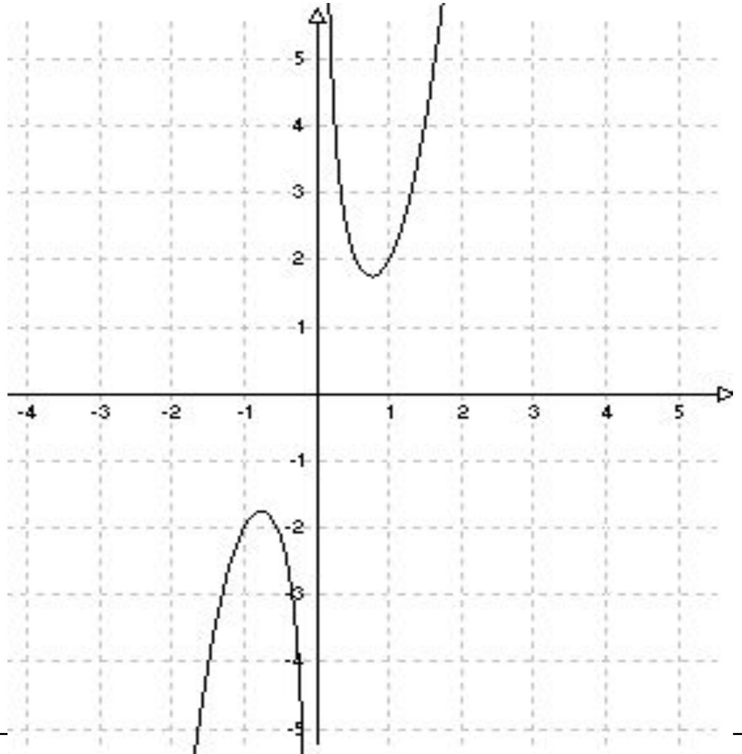
- *Проверим являются ли данные функции нечетными*

- $f(x) = 2x^4 + 3x$
- $f(x) = x^3 - 2x$
- $\mathrm{f}(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x) = = 2x^4 - 3x$ - *не является нечетной*
- $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = - x^3 + 2x$ *нечетная*

# График нечетной функции

- *График нечетной функции симметричен относительно начала координат.*



# Четные и нечетные функции

- *Функции могут быть как четными, нечетными, так и ни четными, ни нечетными*.

*Пример:* $y(x) = x^2 + 2x$

$y(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x$

# Четность и нечетность

**Для любого значения x верны равенства:**

- **Sin(-x) = -Sin x**
- **Cos(-x) = Cos x**

**Следовательно:**

**y= Sin x – *нечетная* функция**

**y= Cos x – *четная* функция**

т.к. sin(-x)=-sinx

1. y=sinx – нечетная функция,

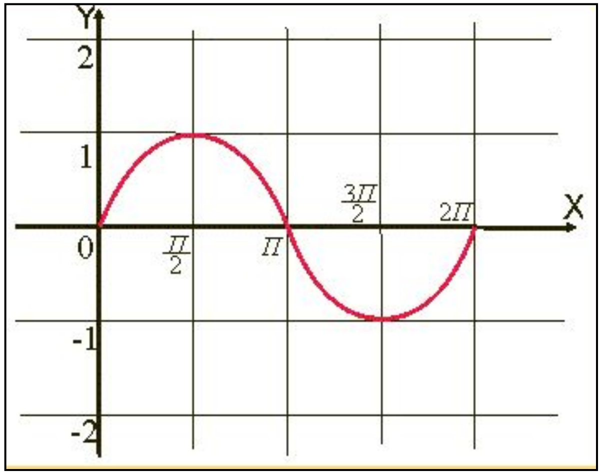



График функции симметричен относительно начала координат

2. y=cosx – нечетная функция,

т.к. cos(-x)=cosx

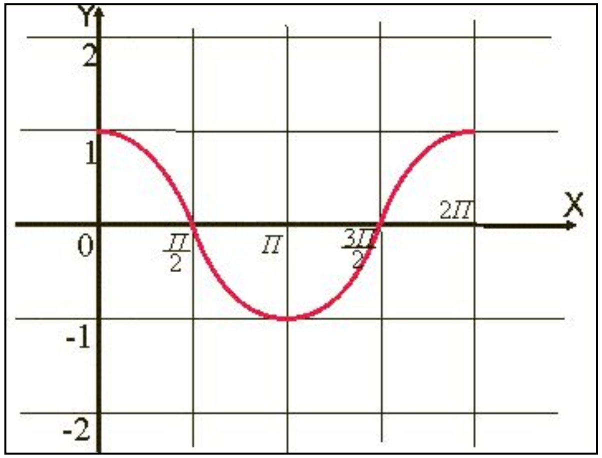



График функции симметричен относительно оси Oy

Так как для любого значения x из области определения функции

$y = \text{tg}\, x$ верно равенство

$$\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x,$$

то $y = \text{tg}\, x$ – *нечетная* **функция.**

# Пример

**Выяснить, является ли функция**

**$y = 2 + \mathrm{Sin}^2\, x$ четной или нечетной.**

***Решение:***

$y(-x) = 2 + \mathrm{Sin}^2(-x) = 2 + (-\mathrm{Sin}\, x)^2 =$

$= 2 + \mathrm{Sin}^2 x = y(x)$ □

□ $y = 2 + \mathrm{Sin}^2 x$ **– четная функция.**

**Пример: определите, является ли данная функция четной или нечетной** $f(x) = x^3 \sin x^2$

Решение:

$$f(x) = x^3 \sin x^2$$

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x)^2 = -x^3 \sin x^2$$

$$-f(x) = -x^3 \sin x^2,$$

так как $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ - нечетная функция.

Работа в тетрадях

*Определите, являются ли данные функции четными или нечетными:*

$$1)\ f(x) = x^2 \cdot \cos x$$

$$2)\ f(x) = \frac{\cos 5x + 1}{|x|}$$

$$3)\ f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$$

$$4)\ f(x) = \frac{|x|}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$5)\ f(x) = \frac{x + tgx}{x \cdot \cos x}$$

## Разбейте функции на три группы:

- *четные*
- *нечетные*
- *не являются ни четными, ни нечетными*

| | |
|---|---|
| 1) $y = \cos 3x$ | 2) $y = 3\sin 2x$ |
| 3) $y = \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x$ | 4) $y = \frac{1}{x} \cdot tgx$ |
| 5) $y = \cos x + x$ | 6) $y = \sin x - x$ |
| 7) $y = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + 2x$ | 8) $y = \frac{tgx}{2}$ |
| 9) $y = 2^{\cos x}$ | 10) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ |
| 11) $y = \lvert tgx \rvert$ | 12) $y = \lvert \sin x \rvert$ |
| 13) $y = \cos(x - \pi) - x^2$ | 14) $y = \cos x \cdot \sin \frac{x}{2}$ |
| 15) $y = x^2 + tgx$ | |

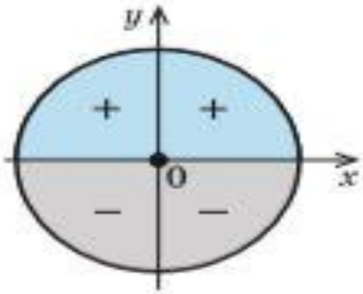
# Проверяем ответы

| четные | нечетные | ни чет., ни нечет. |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 |
| 4 | 3 | 7 |
| 9 | 6 | 15 |
| 10 | 8 | |
| 11 | 14 | |
| 12 | | |
| 13 | | |

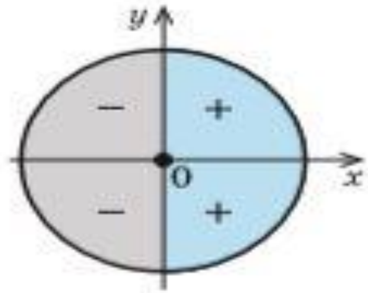
Таблица 20

## 1. Знаки тригонометрических функций

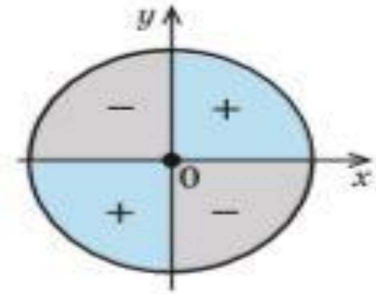
**sin α**




**cos α**




**tg α, ctg α**




## 2. Четность и нечетность

*Косинус — четная функция*

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

*Синус, тангенс и котангенс — нечетные функции*

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

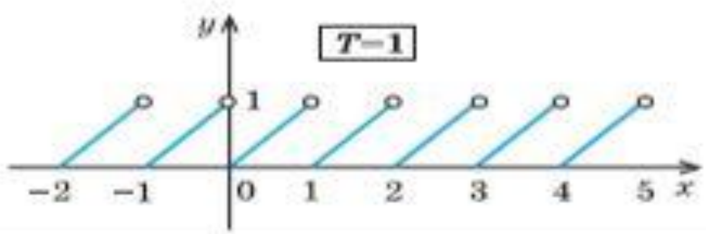
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

## 3. Периодичность

**Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любых $x$ из области определения функции числа $(x + T)$ и $(x - T)$ также принадлежат области определения и выполняется равенство**

$$f(x + T) = f(x).$$

$y = \{x\}$ — дробная часть числа $x$




**Через промежутки длиной $T$ (на оси $Ox$) вид графика периодической функции повторяется**

**Если $T$ — период функции, то $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm kT$ — также периоды этой функции ($k \in N$)**

# !Определение!

***Функция*** $f(x)$ ***называется периодической,*** ***если существует такое число*** $T \neq 0$***, что для любого*** $x$ ***из области определения этой функции выполняется равенство***

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

***Число*** $T$ ***называется периодом функции*** $f(x)$***.***

# Периодичность

Для любого значения x верны равенства:

- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Следовательно, значения Sin и Cos периодически повторяются при изменении аргумента на $2\pi$.

Такие функции называются ***периодическими*** с периодом $2\pi$.

# Покажем, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции y = Cos x.

Пусть $T > 0$ – период косинуса, т.е. для любого $x$ выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получим $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi k$, $k \in Z$. Так как $T > 0$, то $T$ может принимать значения $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$, …, и поэтому период не может быть меньше $2\pi$.

Аналогично можно доказать, что наименьший положительный период функции y = Sin x также равен 2π

***Пример:***

Доказать, что f(x) = Sin 3x – периодическая функция с периодом (2π)/3.

***Доказательство:***

Данная функция определена для всех x є R, поэтому достаточно показать, что для любого x верно равенство f(x + T) = f(x).

$\underline{f(x + (2\pi)/3)} = \text{Sin } 3(x + (2\pi)/3) =$

$= \text{Sin } (3x + 2\pi) = \text{Sin } 3x = \underline{f(x)}$

# Покажем, что функция y= tg x является периодической с периодом π.

Если x принадлежит области определения этой функции, т.е. $x \neq -\pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, то по формулам приведения получаем

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - x) = -(-\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$$

Таким обтазом, $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$. Следовательно, π – период функции y = tg x.

# Покажем, что π – наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$.

Пусть T – период тангенса, тогда $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, откуда при $x = 0$ получаем $\operatorname{tg} T = 0$, $T = k\pi$, $k \in Z$. Так как наименьшее целое положительное $k$ равно 1, то <u>π – наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$.</u>

# Доказать, что $y = tg(x/3)$ – периодическая функция с периодом $3\pi$.

***<u>Доказательство:</u>***

**Так как** $tg((x + 3\pi)/3) = tg(x/3 + \pi) = tg(x/3)$

**и**

$tg((x - 3\pi)/3) = tg(x/3 - \pi) = tg(x/3)$, **то**
$tg(x/3)$ –

**периодическая функция с периодом** $3\pi$.