

Алгоритмы и структуры данных

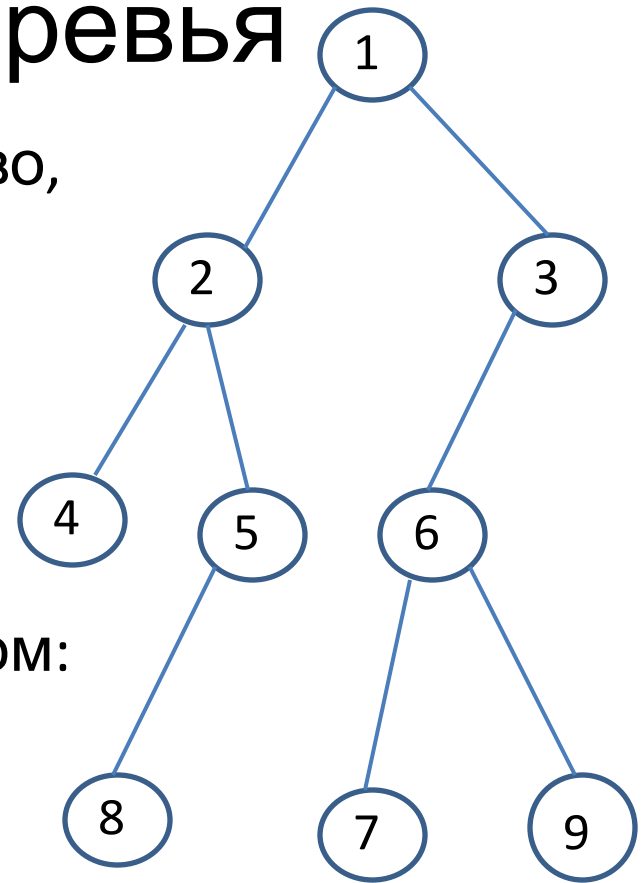
Лекция 7
Деревья поиска

Бинарные деревья

Упорядоченное дерево – это дерево, в котором множество сыновей каждой вершины упорядочено слева направо.

Бинарное дерево – это упорядоченное дерево, в котором:

- 1) любой сын – либо левый либо правый,
- 2) любой узел имеет не более одного левого и не более одного правого сына.



Обходы деревьев в глубину

Пусть T – дерево, r – корень, v_1, v_2, \dots, v_n – сыновья вершины r .

1. Прямой (префиксный) обход:

- посетить корень r ;
- посетить в прямом порядке поддеревья с корнями v_1, v_2, \dots, v_n .

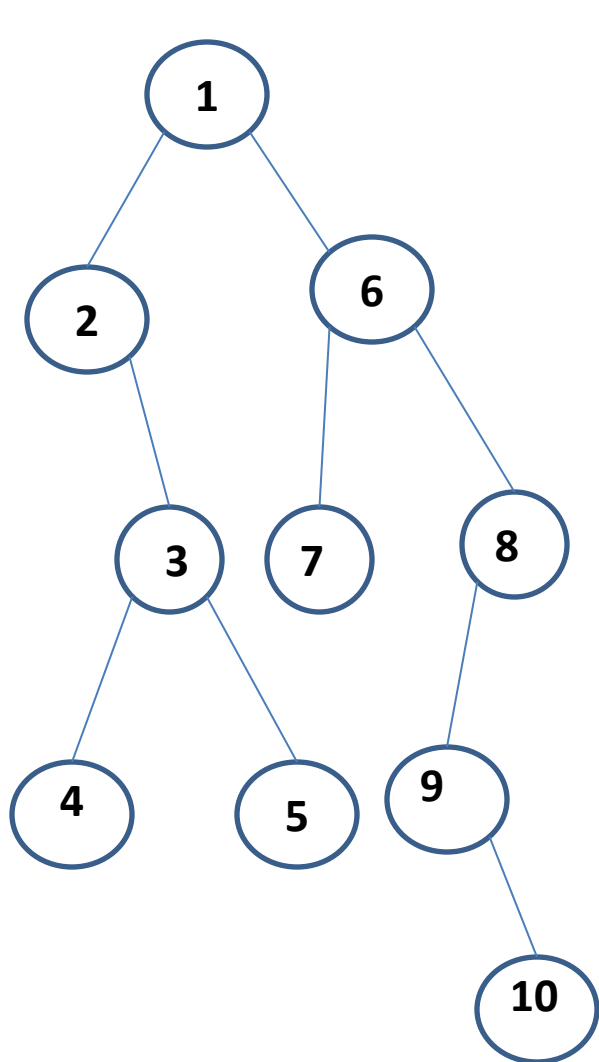
2. Обратный (постфиксный) обход:

- посетить в обратном порядке поддеревья с корнями v_1, v_2, \dots, v_n ;
- посетить корень r .

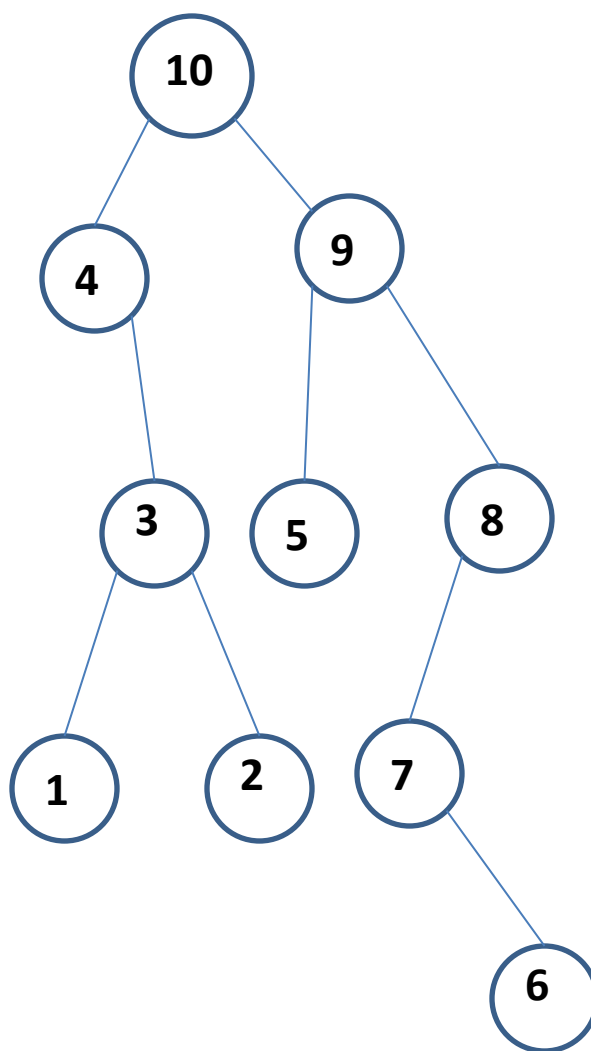
3. Внутренний (инфиксный) обход для бинарных деревьев:

- посетить во внутреннем порядке левое поддерево корня r (если существует);
- посетить корень r ;
- посетить во внутреннем порядке правое поддерево корня r (если существует).

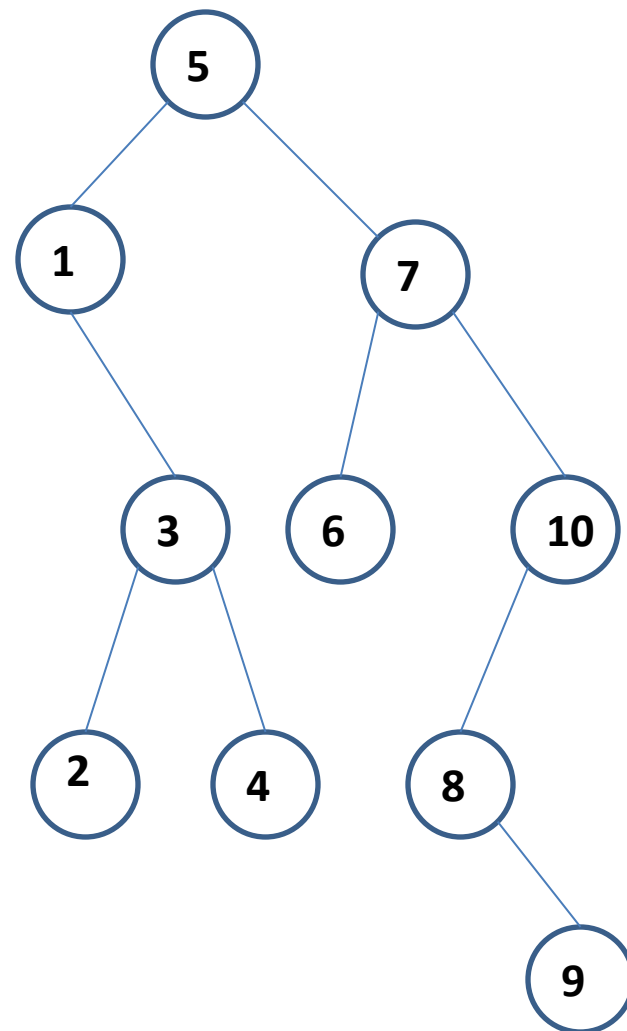
Обходы деревьев в глубину. Пример 1.



Прямой

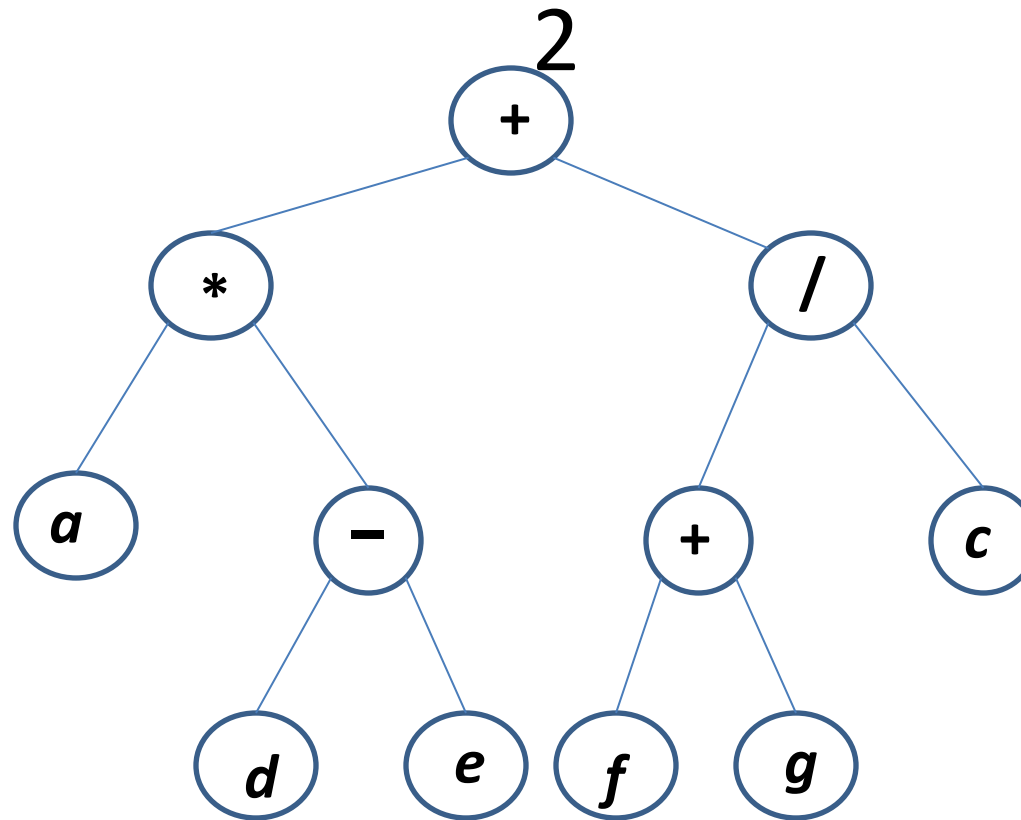


Обратный



Внутренний

Обходы деревьев в глубину. Пример



$+ * a - d e / + f g c$ - префиксный обход

$a d e - * f g + c / +$ - постфиксный обход

$a * (d - e) + (f + g) / c$ - инфиксный обход

Реализация обхода

```
typedef struct node {  
    char * word;  
    struct node * left;  
    struct node * right;  
} tree;
```

```
void print_tree ( tree * t )  
{  
    if ( !t )  
        return;  
    print_tree( t->left );  
    printf ( "%s\n", t->word );  
    print_tree( t->right );  
}
```

Обход дерева в ширину

- это обход вершин дерева по уровням, начиная от корня, слева *направо* (или справа *налево*).

Алгоритм обхода дерева в ширину

Шаг 0:

Поместить в очередь корень дерева.

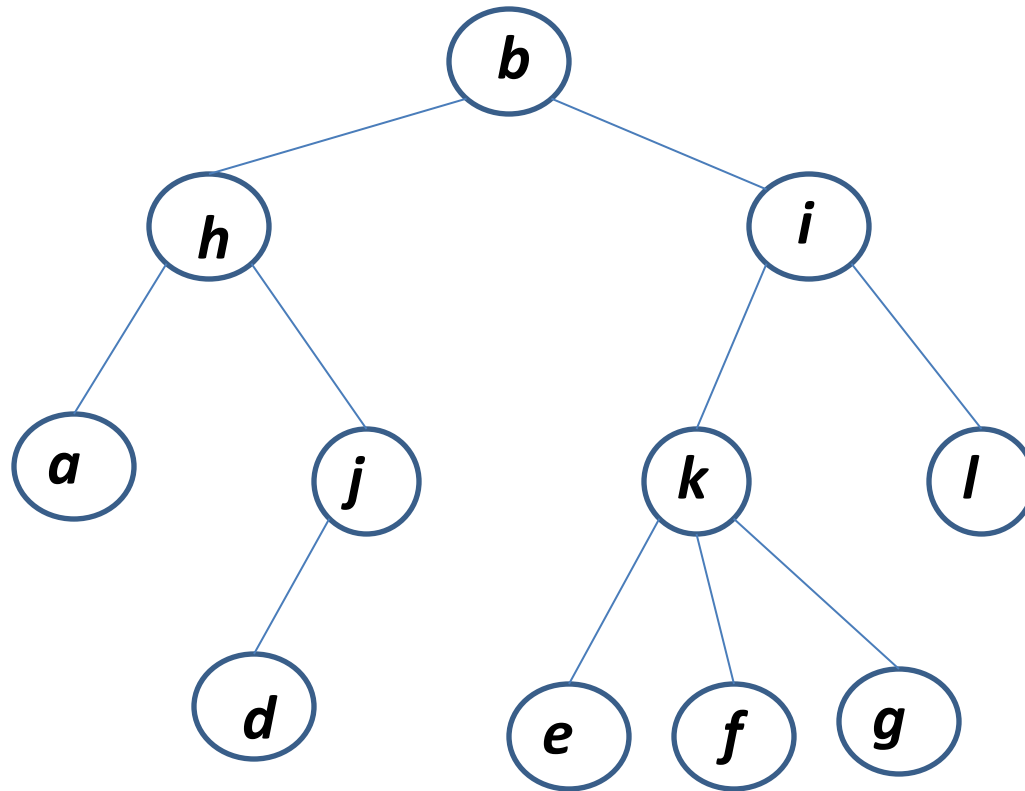
Шаг 1:

Взять из очереди очередную вершину.
Поместить в очередь всех ее сыновей по порядку слева направо (справа налево).

Шаг 2:

Если очередь пуста, то конец обхода, иначе перейти на Шаг 1.

Обход дерева в ширину. Пример



<i>b</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Представления деревьев

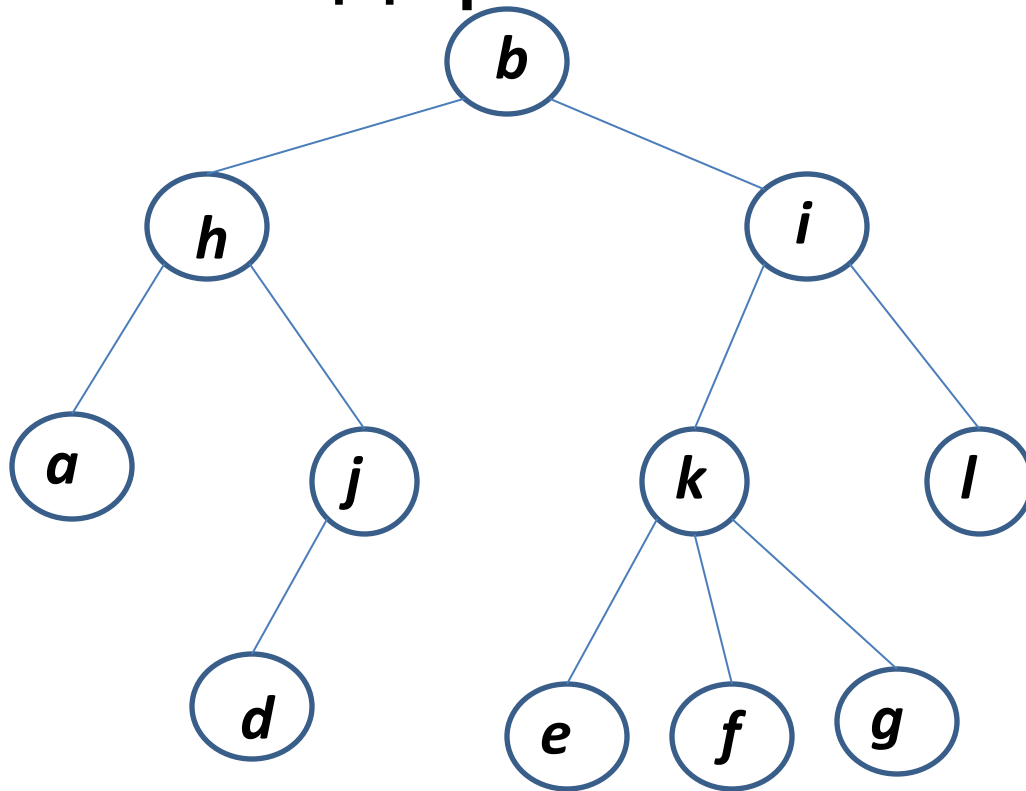
Определение. *Левое скобочное представление* дерева T (обозначается $Lrep(T)$) можно получить, применяя к нему следующие рекурсивные правила:

- (1) Если корнем дерева T служит вершина a с поддеревьями T_1, T_2, \dots, T_n , расположенными в этом порядке (их корни — прямые потомки вершины a), то
$$Lrep(T) = a (Lrep(T_1), Lrep(T_2), \dots, Lrep(T_n))$$
- (2) Если корнем дерева T служит вершина a , не имеющая прямых потомков, то $Lrep(T) = a$.

Определение. *Правое скобочное представление* $Rrep(T)$ дерева T :

- (1) Если корнем дерева T служит вершина a с поддеревьями T_1, T_2, \dots, T_n , то
$$Rrep(T) = (Rrep(T_1), Rrep(T_2), \dots, Rrep(T_n))a.$$
- (2) Если корнем дерева T служит вершина a , не имеющая прямых потомков, то $Rrep(T) = a$.

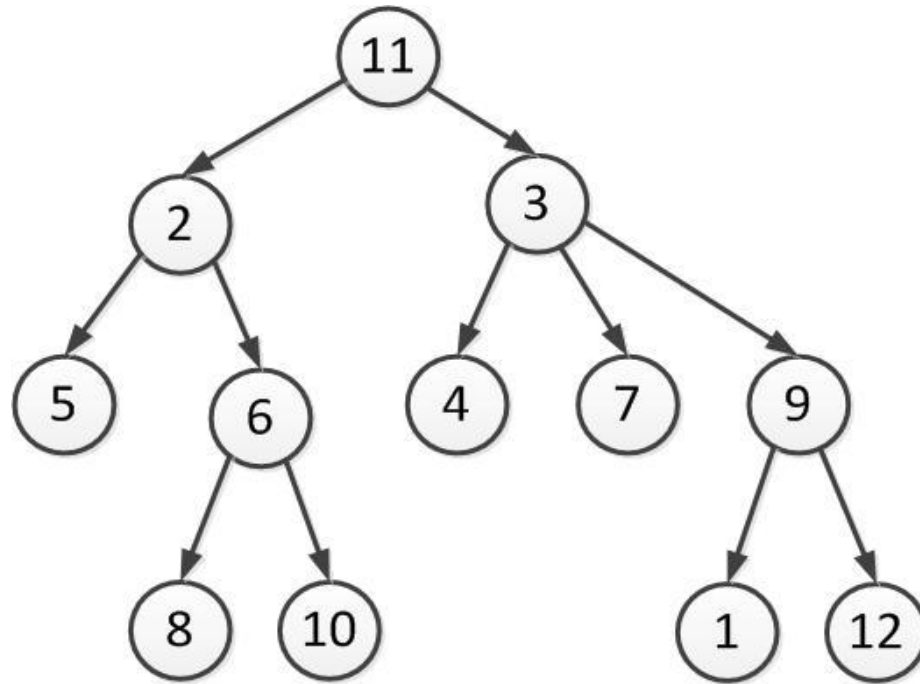
Скобочные представления деревьев



- $Lrep(T) = b (h (a, j (d)), i (k (e, f, g), l))$
- $Rrep(T) = ((a, (d) j) h, ((e, f, g) k, l) i) b$

Представление дерева списком прямых предков

Составляется список прямых предков для вершин дерева с номерами 1, 2, ..., n (именно в этом порядке). Чтобы опознать корень, будем считать, что его предок—это 0.



9	11	11	3	2	2	3	6	3	6	0	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

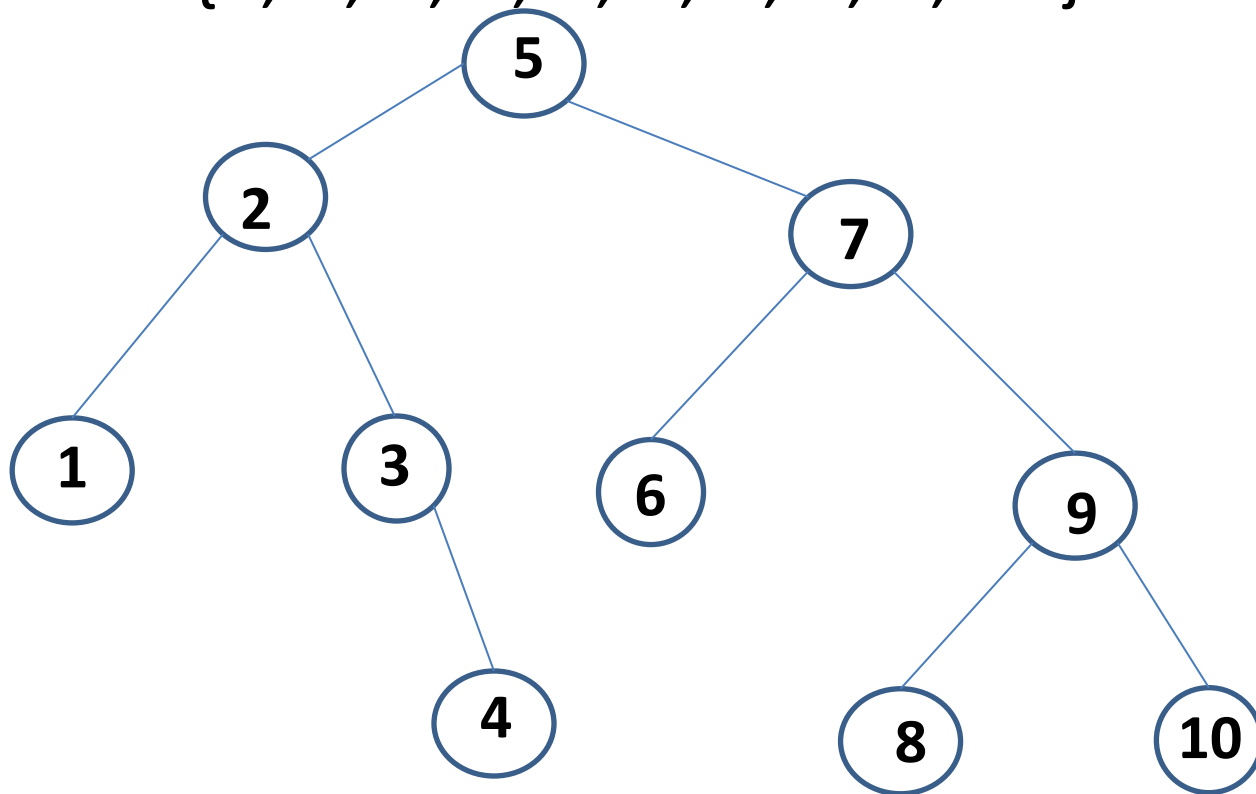
Дерево двоичного поиска

Определение. Деревом двоичного поиска для множества S называется помеченное двоичное дерево, каждый узел v которого помечен элементом $I(v) \in S$ так, что

- 1) $I(u) < I(v)$ для каждого узла u из левого поддерева узла v ,
- 2) $I(w) > I(v)$ для каждого узла w из правого поддерева узла v ,
- 3) для любого элемента $a \in S$ существует единственный узел v , такой что $I(v) = a$.

Дерево двоичного поиска. Пример

Пусть $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



Алгоритм просмотра дерева двоичного поиска

Вход: Дерево T двоичного поиска для множества S , элемент a .

Выход: *true* если $a \in S$, *false* - в противном случае.

Метод: Если $T = \emptyset$, то выдать *false*, иначе выдать ПОИСК (a, r), где r – корень дерева T .

функция ПОИСК (a, v) : *boolean*

{

 если $a = l(v)$ то выдать *true*

 иначе

 если $a < l(v)$ то

 если v имеет левого сына w

 то выдать ПОИСК (a, w)

 иначе выдать *false*;

 иначе

 если v имеет правого сына w

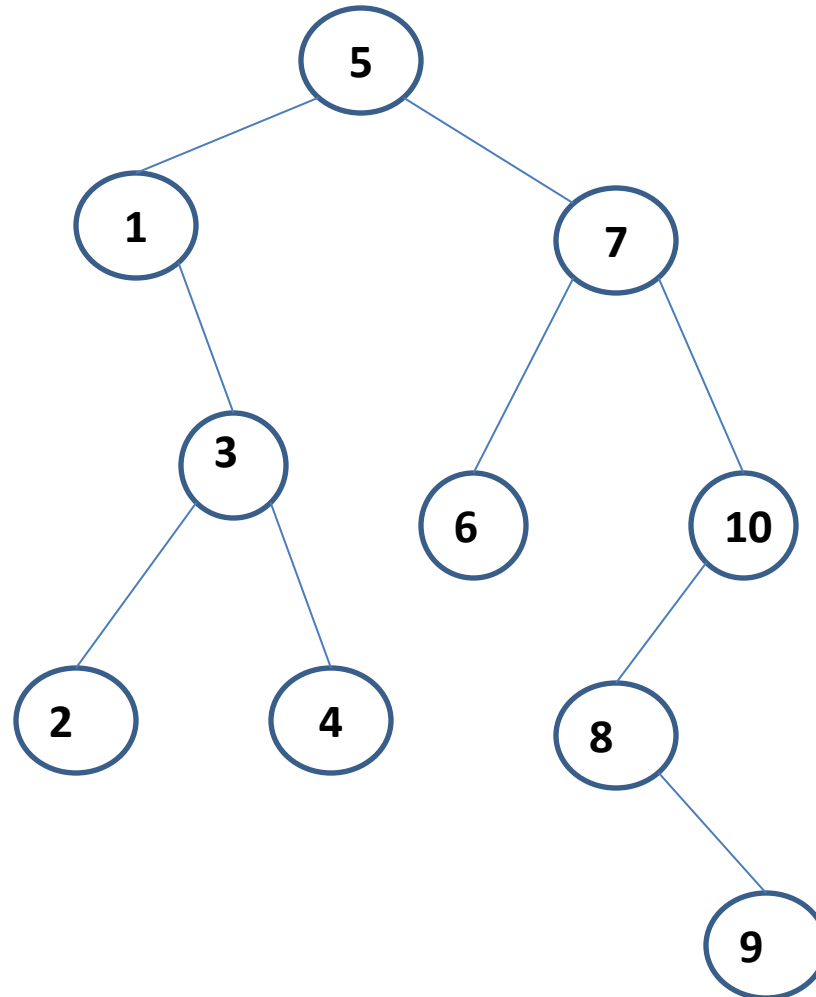
 то выдать ПОИСК (a, w)

 иначе выдать *false*;

}

Пример построения дерева двоичного поиска

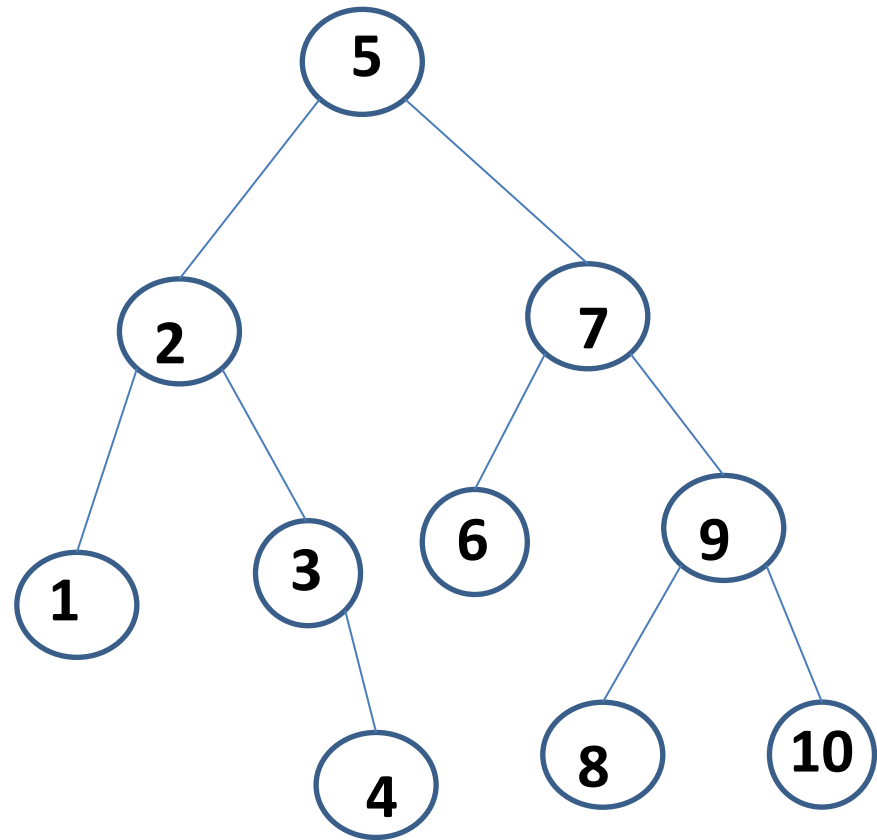
Пусть на вход подаются числа в следующем порядке:
5, 1, 7, 6, 3, 2, 10, 8, 4, 9



Операции нахождения минимума и максимума

```
min ( v )  
  v ← root( T );  
  while left(v) ≠ NIL  
    v ← left(v)  
  return v
```

```
max ( v )  
  v ← root(T);  
  while right(v) ≠ NIL  
    v ← right(v)  
  return v
```



Операция поиска следующего

`successor (x)`

`if right[x] \neq NIL then`

`return min (right [x])`

`y \leftarrow p[x]`

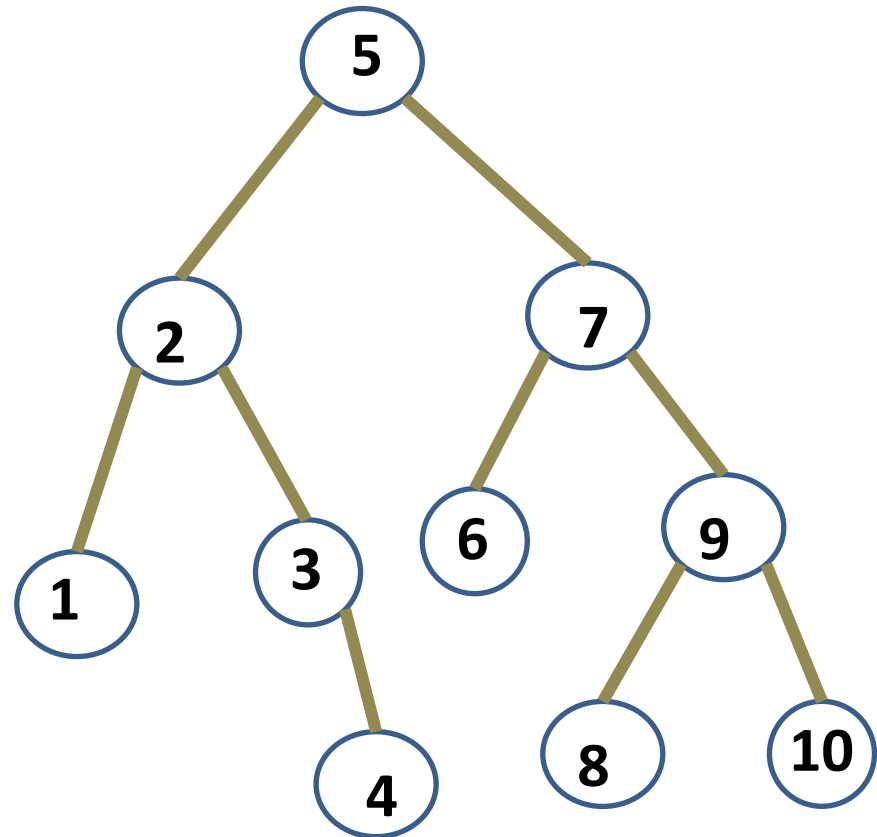
`while y \neq NIL and x = right [y]`

`do`

`x \leftarrow y`

`y \leftarrow p[y]`

`return y`



Операция удаления элемента из дерева

ПОИСКА

Delete(T, z)

if left[z] = NIL or right[z] = NIL

then $y \leftarrow z$

else $y \leftarrow \text{successor}(z)$

if left[y] \neq NIL

then $x \leftarrow \text{left}[y]$

else $x \leftarrow \text{right}[y]$

if $x \neq \text{NIL}$

$p[x] \leftarrow p[y]$

if $p[y] = \text{NIL}$

then $\text{root}[T] \leftarrow x$

else if $y = \text{left}[p[y]]$

then $\text{left}[p[y]] \leftarrow x$

else $\text{right}[p[y]] \leftarrow x$

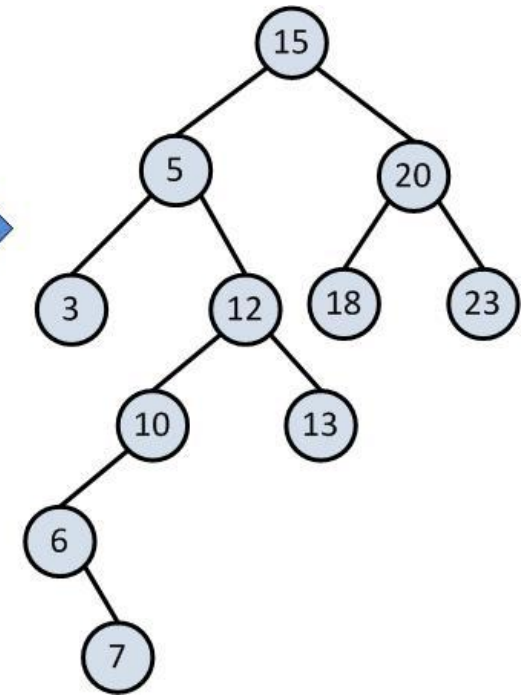
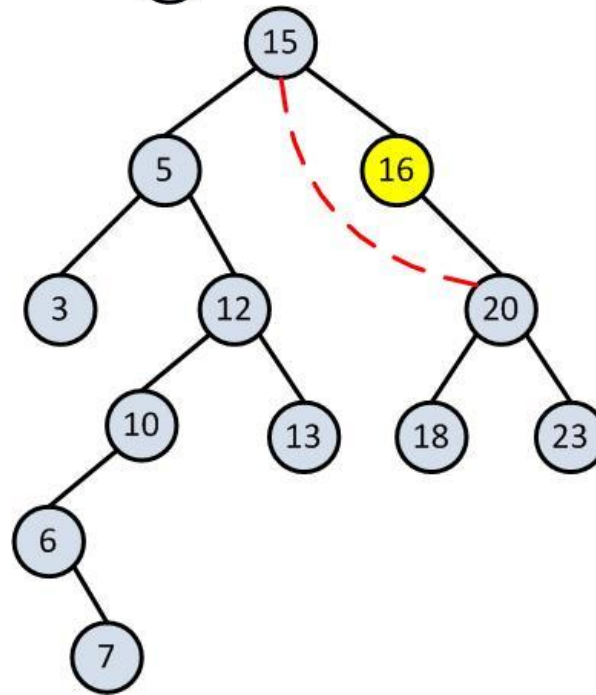
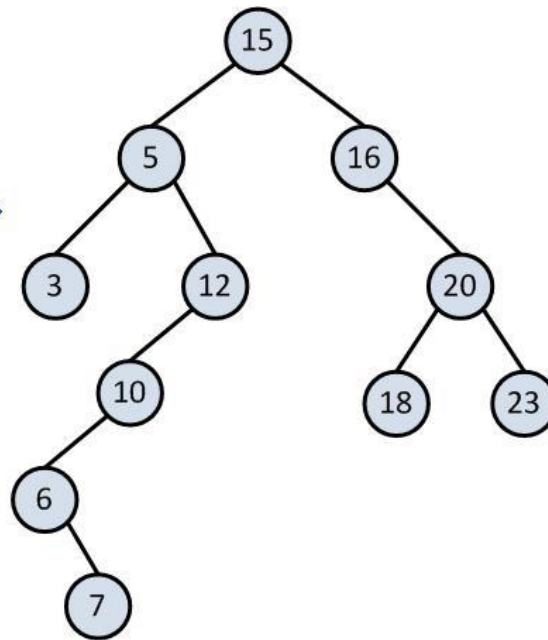
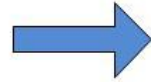
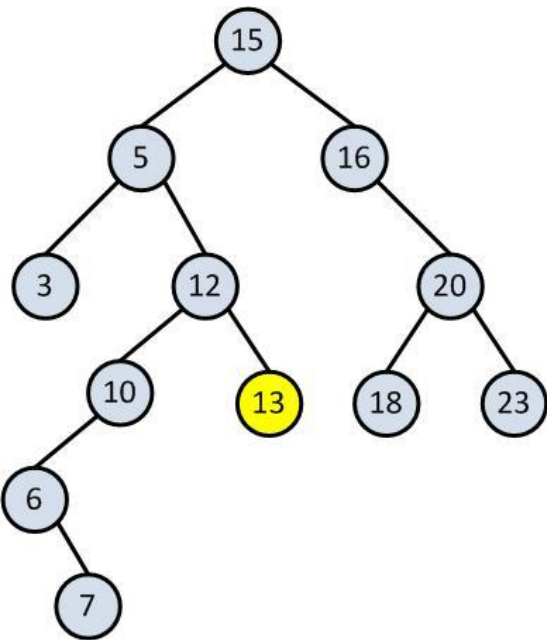
if $y \neq z$

then $\text{key}[z] \leftarrow \text{key}[y]$

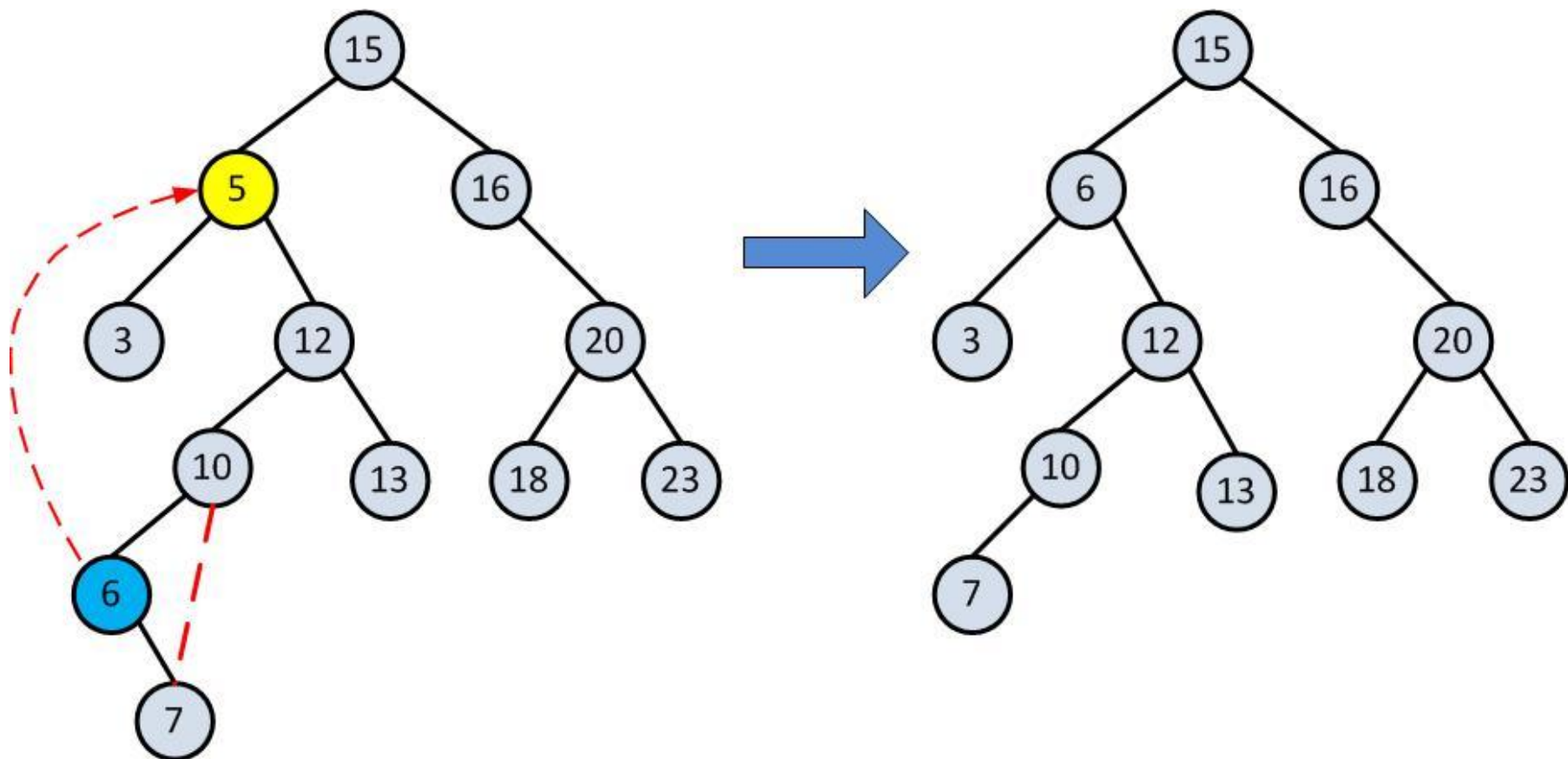
Копирование сопутствующих данных в z

return y

Пример удаления элемента из дерева поиска



Пример удаления элемента из дерева поиска (окончание)



Теорема (*Т. Кормен и др.*)

Математическое ожидание высоты
случайного бинарного дерева поиска с n
ключами равно $O(\log_2 n)$

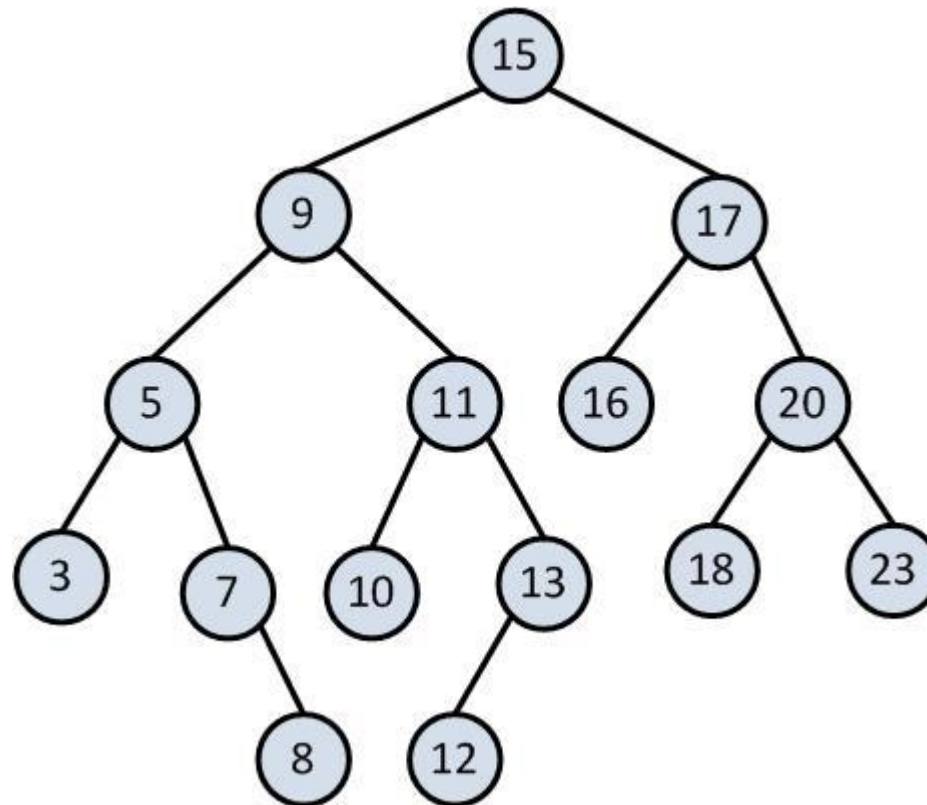
Сбалансированные деревья

Определение

Дерево называется **сбалансированным** тогда и только тогда, когда высоты двух поддеревьев каждой из его вершин отличаются не более чем на единицу.

АВЛ-деревья

(1964 г. - Г.М.Адельсон-Вельский, Е.М. Ландис)

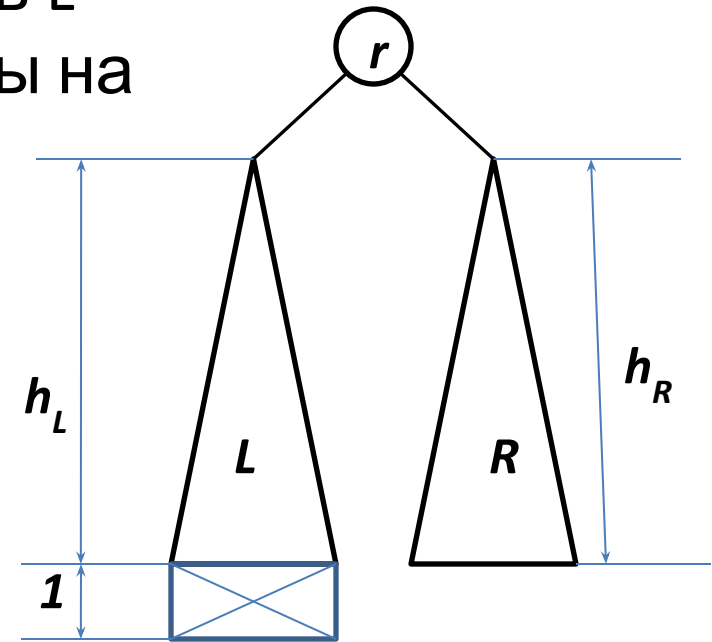


Вставка элемента в сбалансированное дерево

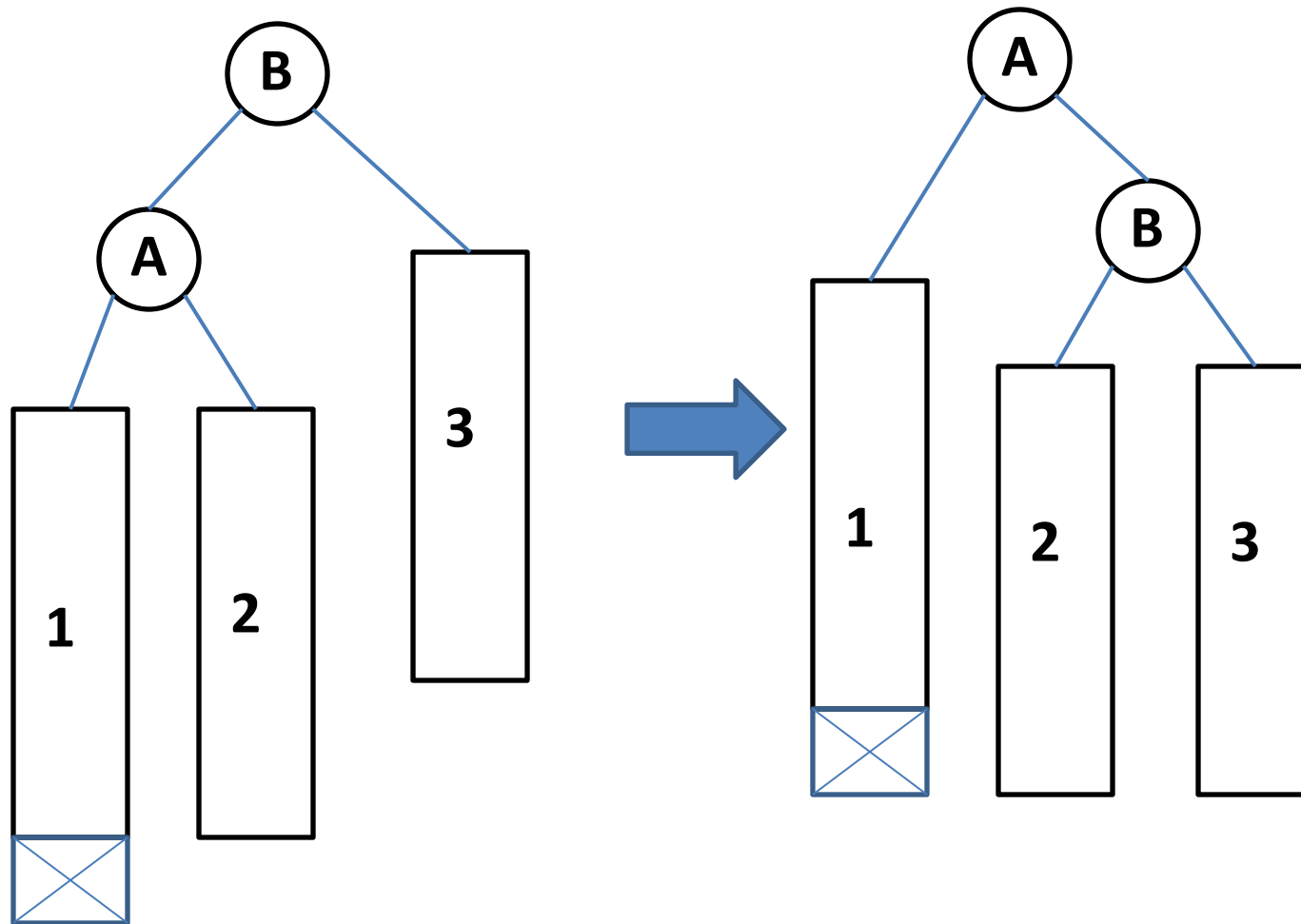
Пусть r – корень, L – левое поддерево, R – правое поддерево.
Предположим, что включение в L приведет к увеличению высоты на 1.

Возможны три случая:

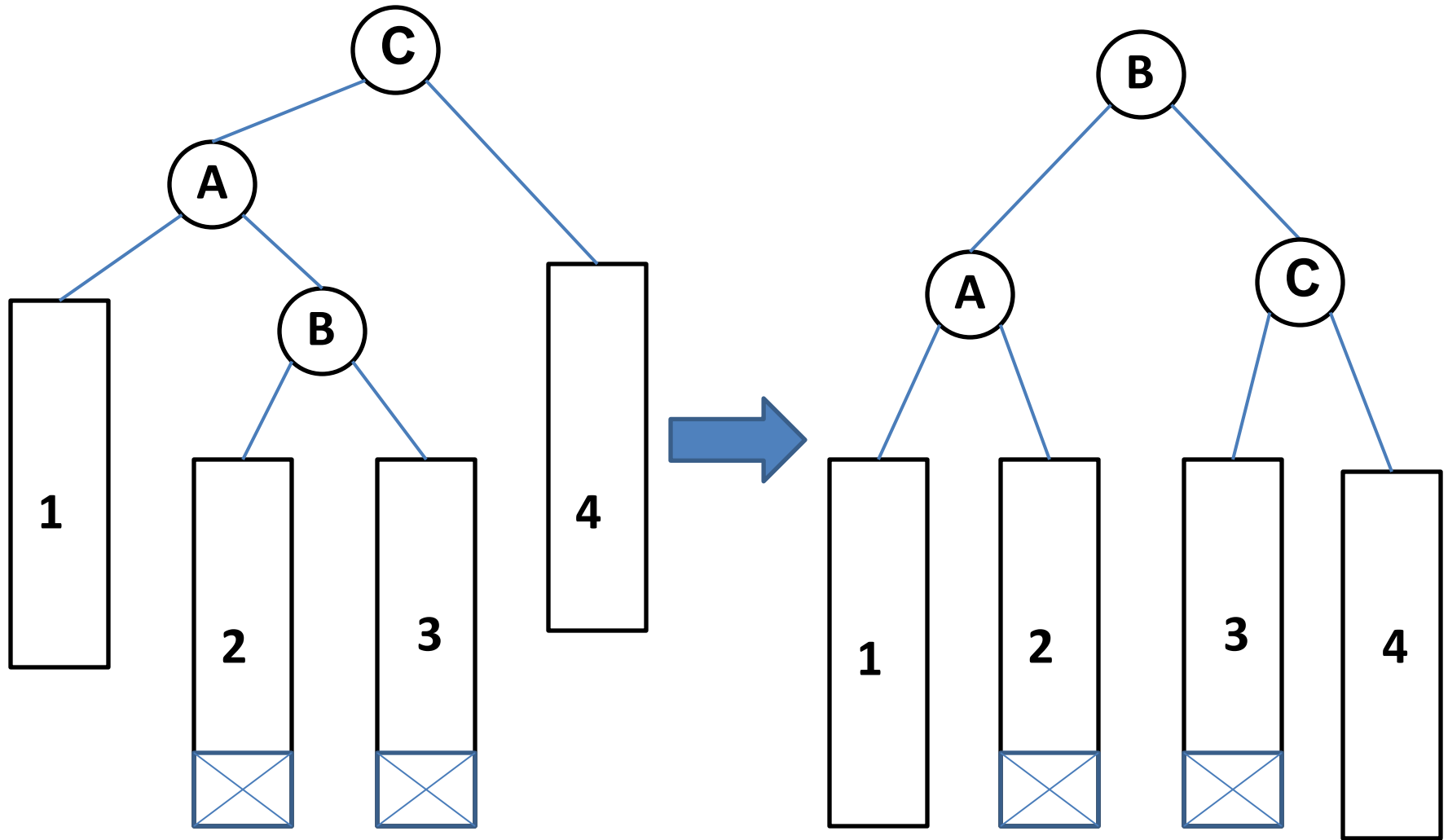
1. $h_L = h_R$
2. $h_L < h_R$
3. $h_L > h_R \rightarrow$ *нарушен принцип сбалансированности, дерево нужно перестраивать*



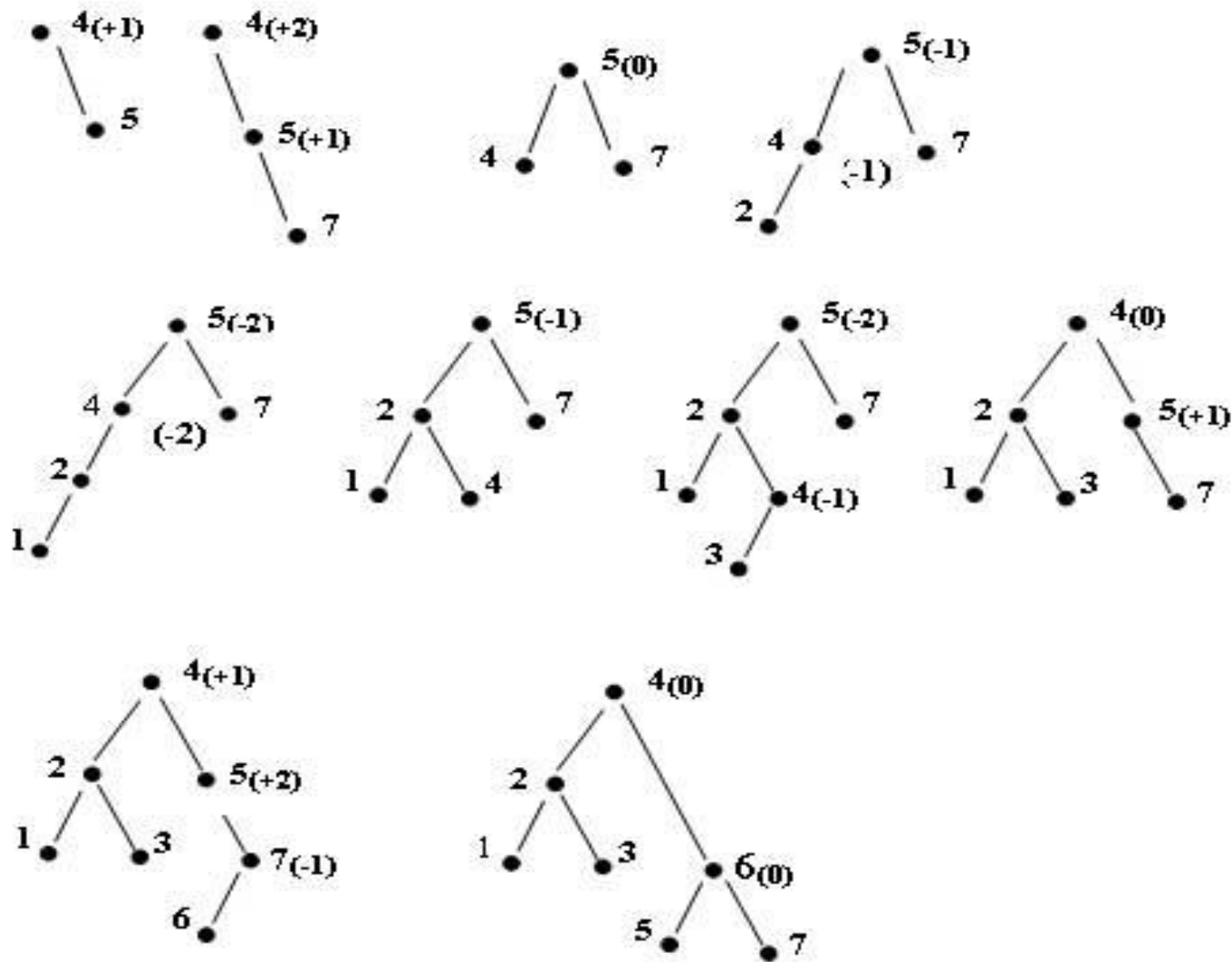
Вставка в левое поддереве



Вставка в правое поддерево



Пример построения AVL-дерева



Красно-чёрное дерево (Red-Black-Tree, RB-Tree)

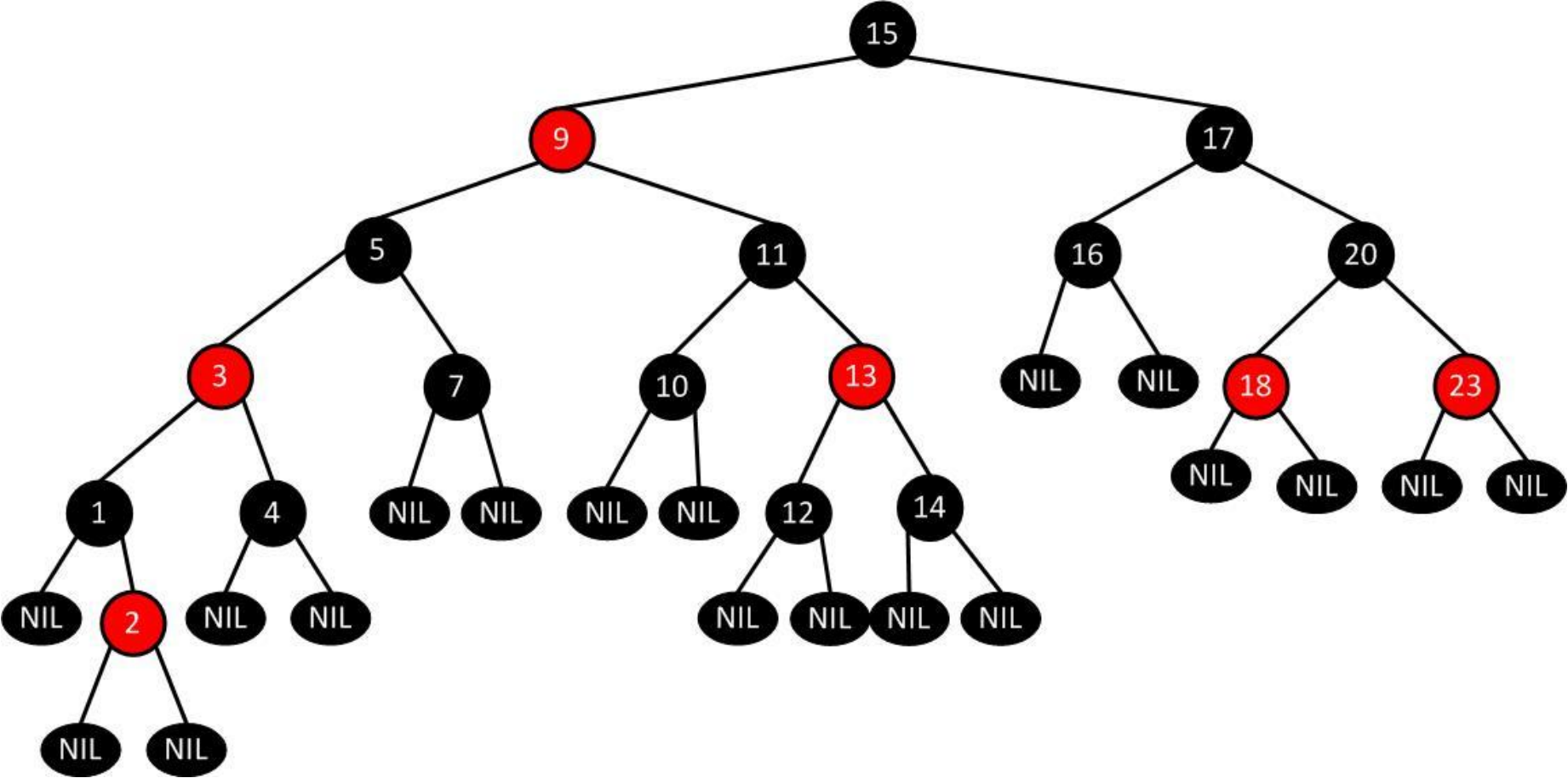
Красно-чёрное дерево обладает следующими свойствами.

1. Каждый узел либо красный либо чёрный
2. Все листья черны.
3. Корень дерева – чёрный
4. Все сыновья красных узлов черны.
5. Для каждого узла все пути от него до листьев, являющихся его потомками, содержат одно и то же количество черных узлов.

Для корня число чёрных узлов до листьев называется **чёрной высотой** дерева.

Для удобства листьями красно-чёрного дерева считаются фиктивные «нулевые» узлы, не содержащие данных (NIL).

Пример



Свойства красно-чёрного дерева

1. Если h - чёрная высота дерева, то количество листьев не менее 2^{h-1} .
2. Если h - высота дерева, то количество листьев не менее $2^{(h-1)/2}$.
3. Если количество листьев N , высота дерева не больше $2\log_2(N + 1)$

Повороты

Left_Rotate(T, x)

$y \leftarrow \text{right}[x]$

$\text{right}[x] \leftarrow \text{left}[y]$

if $\text{left}[y] \neq \text{nil}[T]$

 then $p[\text{left}[y]] \leftarrow x$

$p[y] \leftarrow p[x]$

if $p[x] = \text{nil}[T]$

 then $\text{root}[T] \leftarrow y$

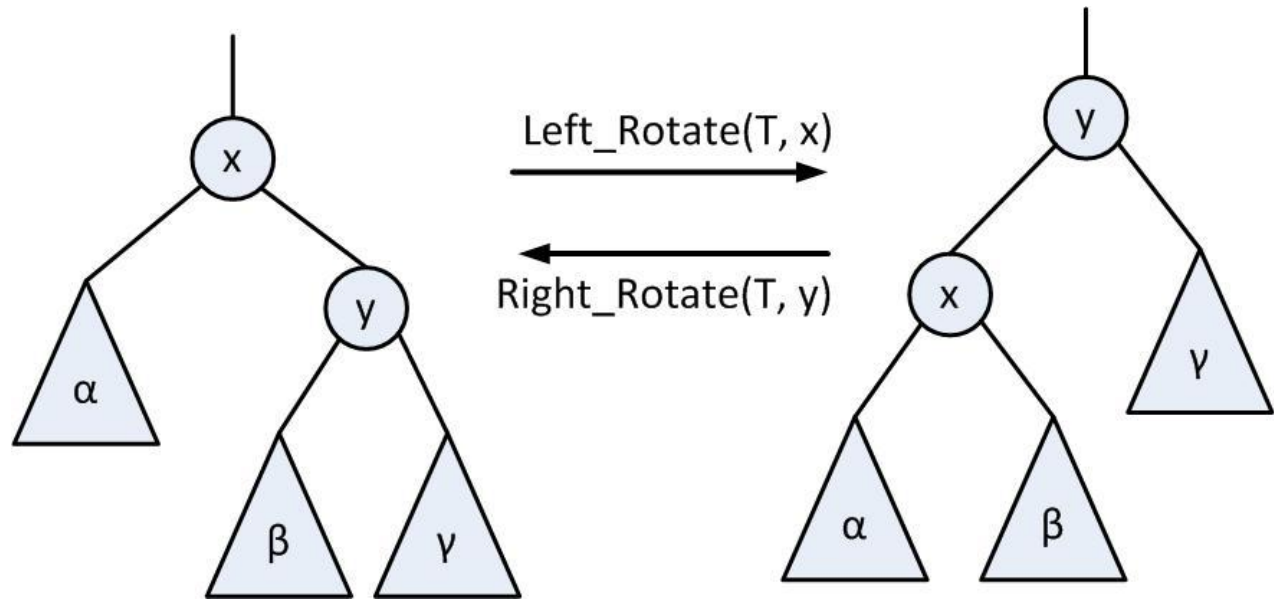
 else if $x = \text{left}[p[x]]$

 then $\text{left}[p[x]] \leftarrow y$

 else $\text{right}[p[x]] \leftarrow y$

$\text{left}[y] \leftarrow x$

$p[x] \leftarrow y$



Операция вставки

Чтобы вставить узел, мы сначала

- ищем в дереве место, куда его следует добавить.
- Новый узел всегда добавляется как лист, поэтому оба его потомка являются **NULL**-узлами и предполагаются черными.
- После вставки красим узел в красный цвет.
- После этого применяем процедуру Fixup:

Fixup (T, z)

```
  while color[p[x]] = RED
```

```
    do if p[z] = left[p[p[z]]]
```

```
       then y ← right[p[p[z]]]
```

```
         if color [y] = RED
```

```
           then [p[z]] ← BLACK
```

```
             color [p[p[z]]] ← RED
```

```
             z ← p[p[z]]
```

```
         else if z = right[p[z]]
```

```
           then z ← p[z]
```

```
             Left_Rotate (T, z)
```

```
             color[p[z]] ← BLACK
```

```
             color [p[p[z]]] ← RED
```

```
             Right_Rotate(T, p[p[z]])
```

```
         else (симметрично с then)
```

```
  color[root[T]] ← BLACK
```

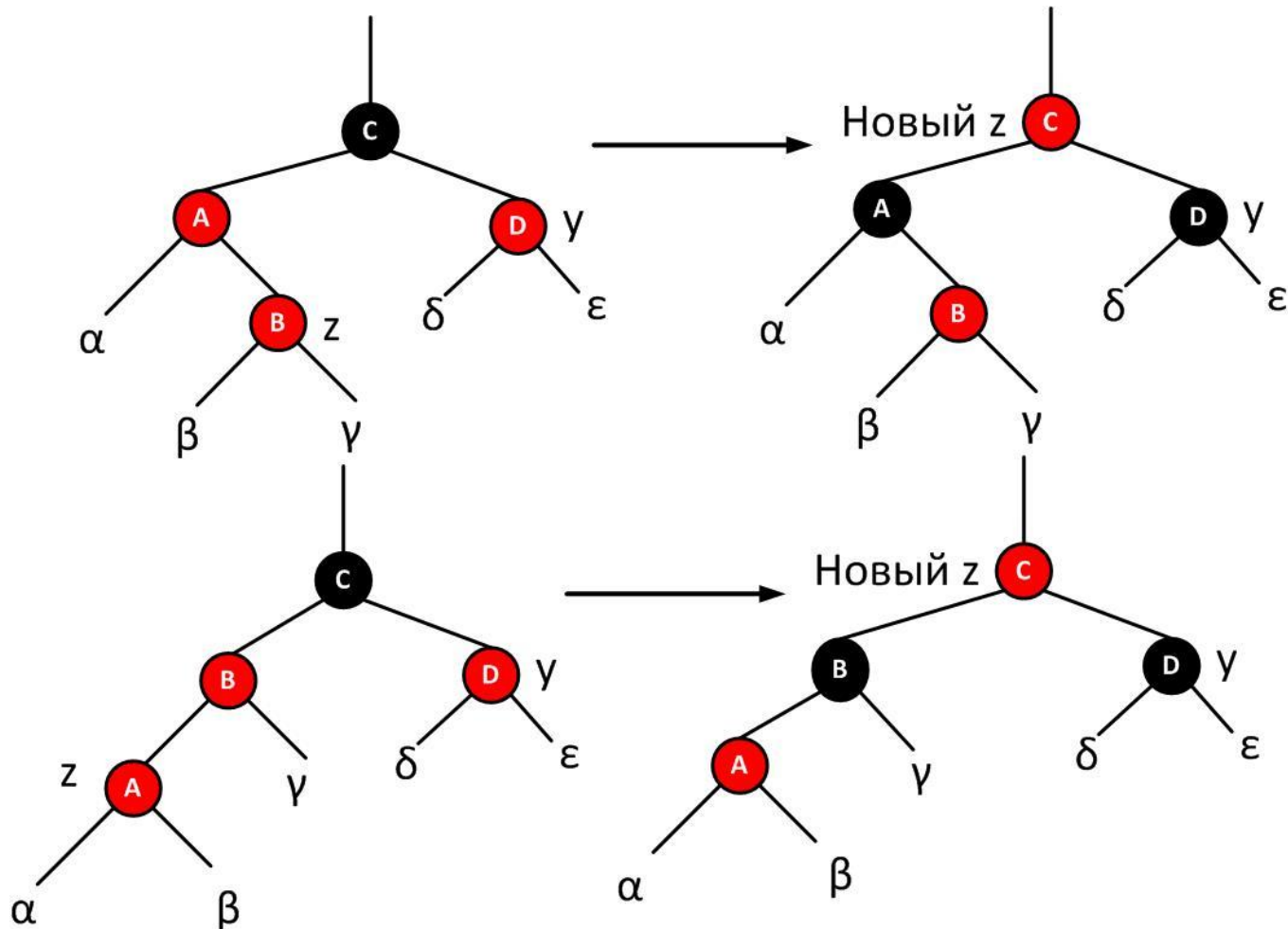
//Случай 1

// Случай 2

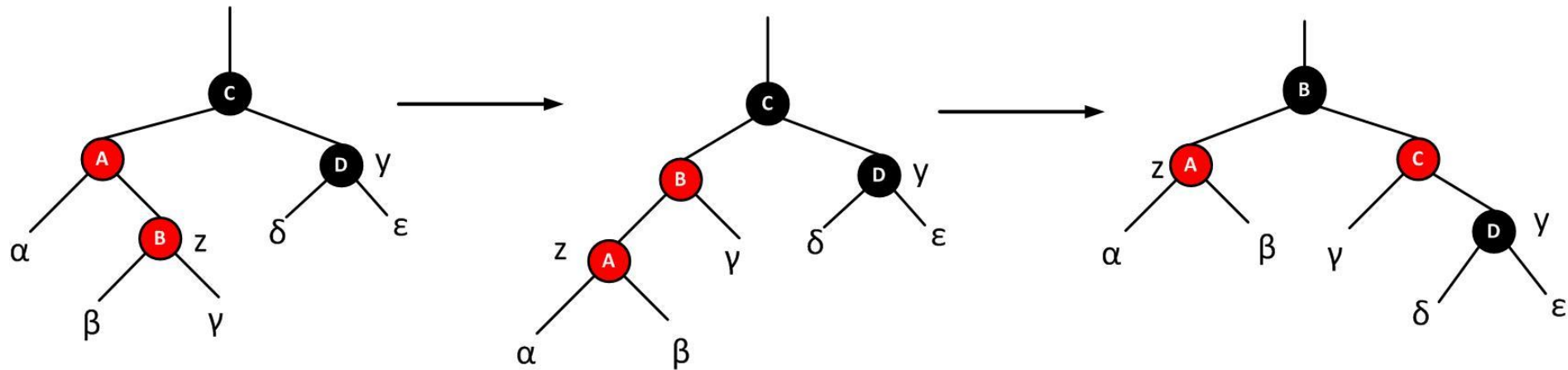
// Случай 3

Красный предок, красный «дядя» – случай 1

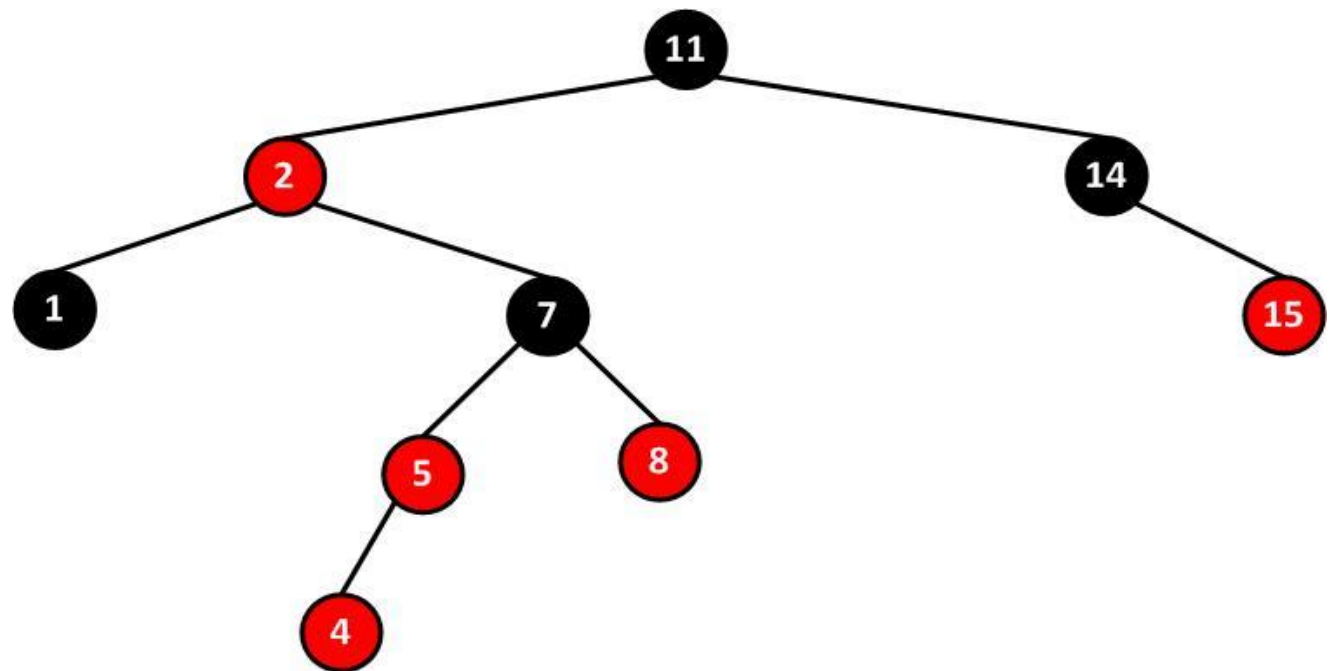
Простое перекрашивание избавляет нас от красно-красного нарушения. После перекраски нужно проверить "дедушку" нового узла (узел C), поскольку он может оказаться красным.



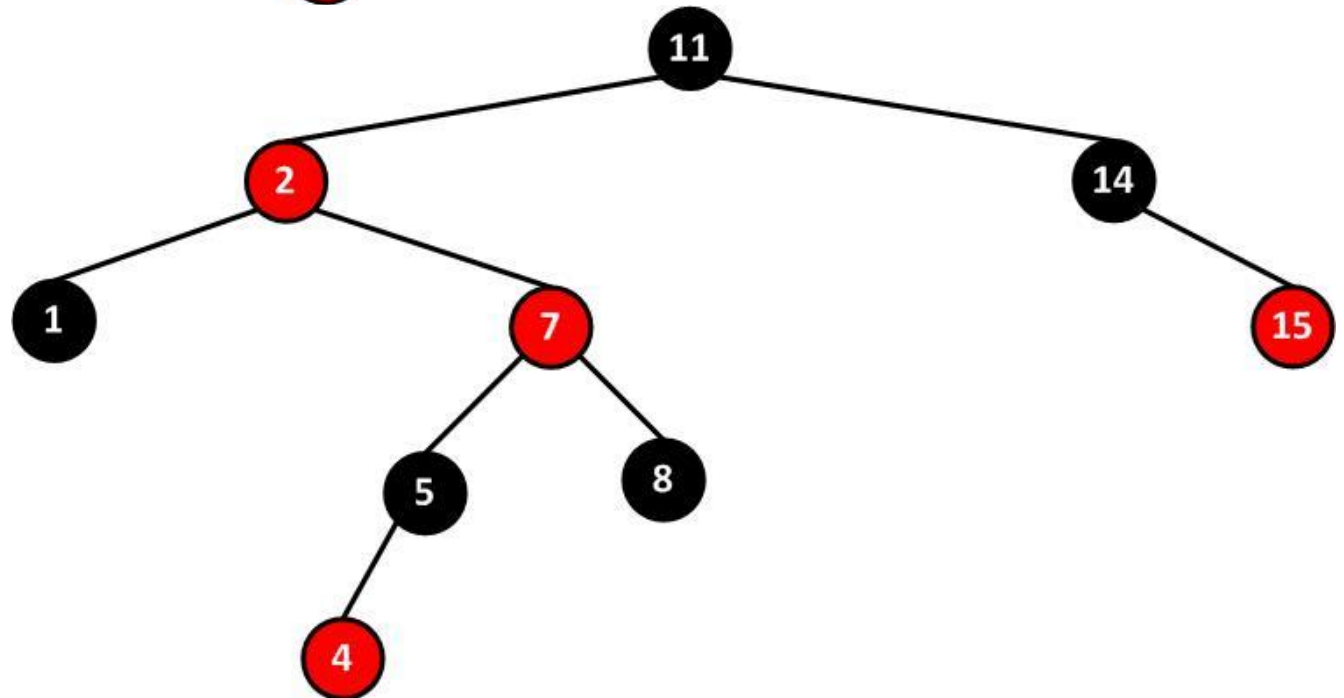
Красный предок, черный «дядя» - случаи 2 и 3



Пример



Случай 1

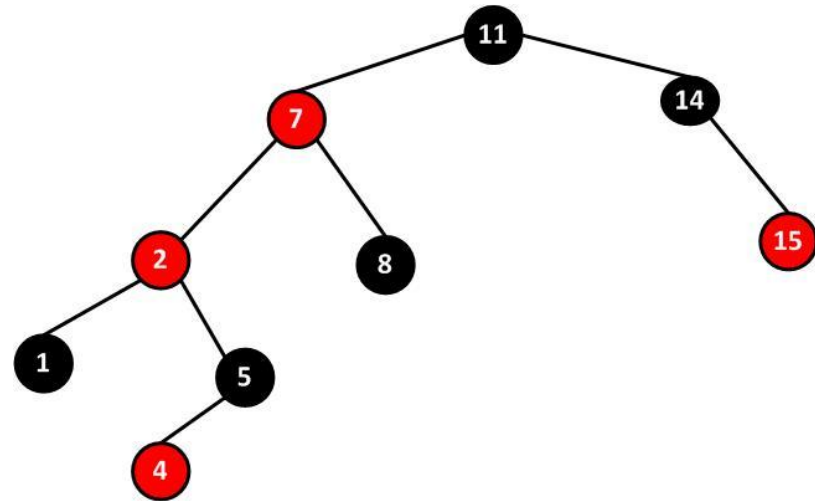
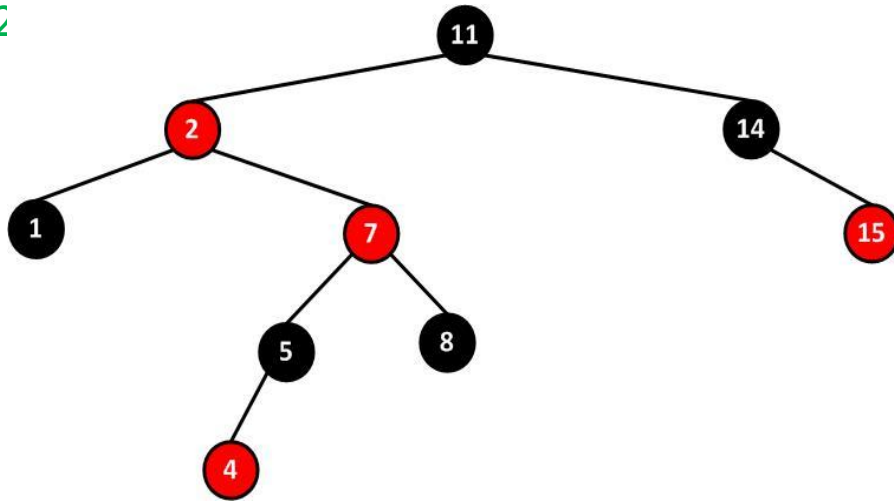


Случай
2

Пример, окончание

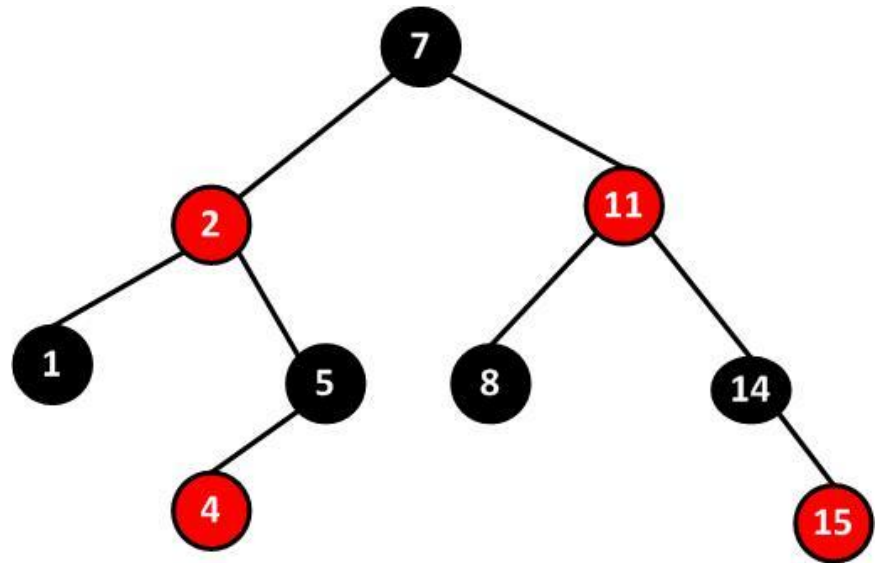
Случай

2



Случай

3



Удаление узла

Если удаляемый узел красный все правила сохраняются и все прекрасно.

Если же удаляемый узел черный, требуется значительное количество кода, для поддержания дерева частично сбалансированным.

Как и в случае вставки в красно-черное дерево, здесь также существует несколько различных случаев.

Сравнение с AVL-деревом

Пусть высота дерева h , минимальное количество листьев N .
Тогда:

- для AVL-дерева $N(h) = N(h - 1) + N(h - 2)$.

Поскольку $N(0) = 1$, $N(1) = 1$, $N(h)$ растёт как последовательность Фибоначчи, следовательно, $N(h) = \Theta(\lambda^h)$, где

$$\lambda = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,62$$

$$N(h) \geq 2^{(h-1)/2} = \Theta(\sqrt{2}^h)$$

- для красно-чёрного дерева

Следовательно, при том же количестве листьев красно-чёрное

дерево может быть выше AVL-дерева, но не более чем раз.

Поиск, вставка, удаление

Поиск. Поскольку красно-чёрное дерево, в худшем случае, выше, поиск в нём медленнее, но проигрыш по времени не превышает 40%.

Вставка. Вставка требует до 2 поворотов в обоих видах деревьев. Однако из-за большей высоты красно-чёрного дерева вставка может занимать больше времени.

Удаление. Удаление из красно-черного дерева требует до 3 поворотов, в AVL-дереве оно может потребовать числа поворотов до корня. Поэтому удаление из красно-чёрного дерева быстрее, чем из AVL-деревя.

Память. AVL-дерево в каждом узле хранит высоту (целое число). Красно-чёрное дерево в каждом узле хранит цвет (1 бит). Таким образом, красно-чёрное дерево может быть экономичнее.

Splay деревья

Сплей-дерево (Splay-tree) — это двоичное дерево поиска.

Оно позволяет находить быстрее те данные, которые использовались недавно.

Относится к разряду сливаемых и самобалансирующихся деревьев.

Сплей-дерево было придумано Робертом Тарьяном и Даниелем Слейтером в 1983 году.

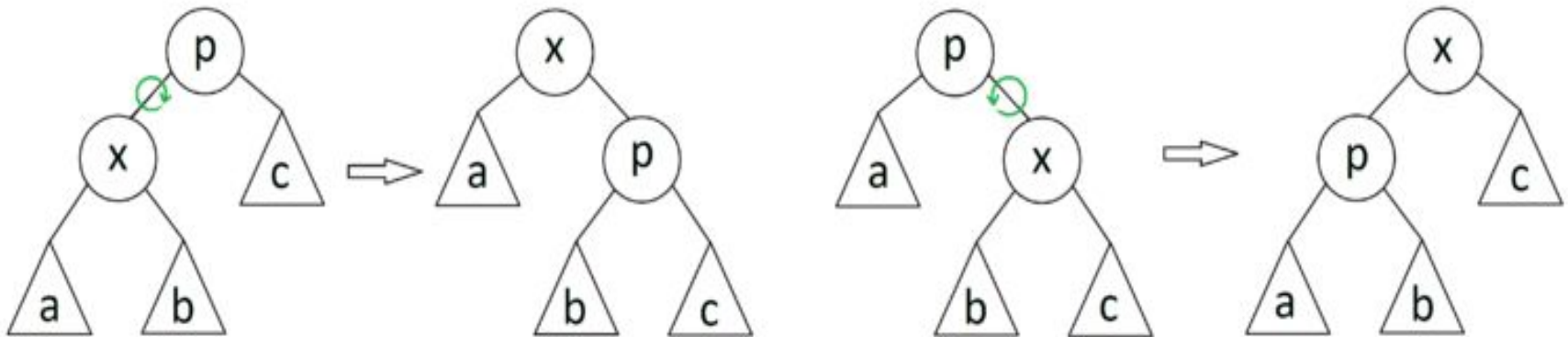
Основная операция $\text{Splay}(\text{Tree}, x)$:

1. x становится корнем
2. $T_{\text{real}} = \Theta(\text{depth}(x))$
3. $T_{\text{amort}} = O(\log(n))$

Splay(Tree, x)

Zig

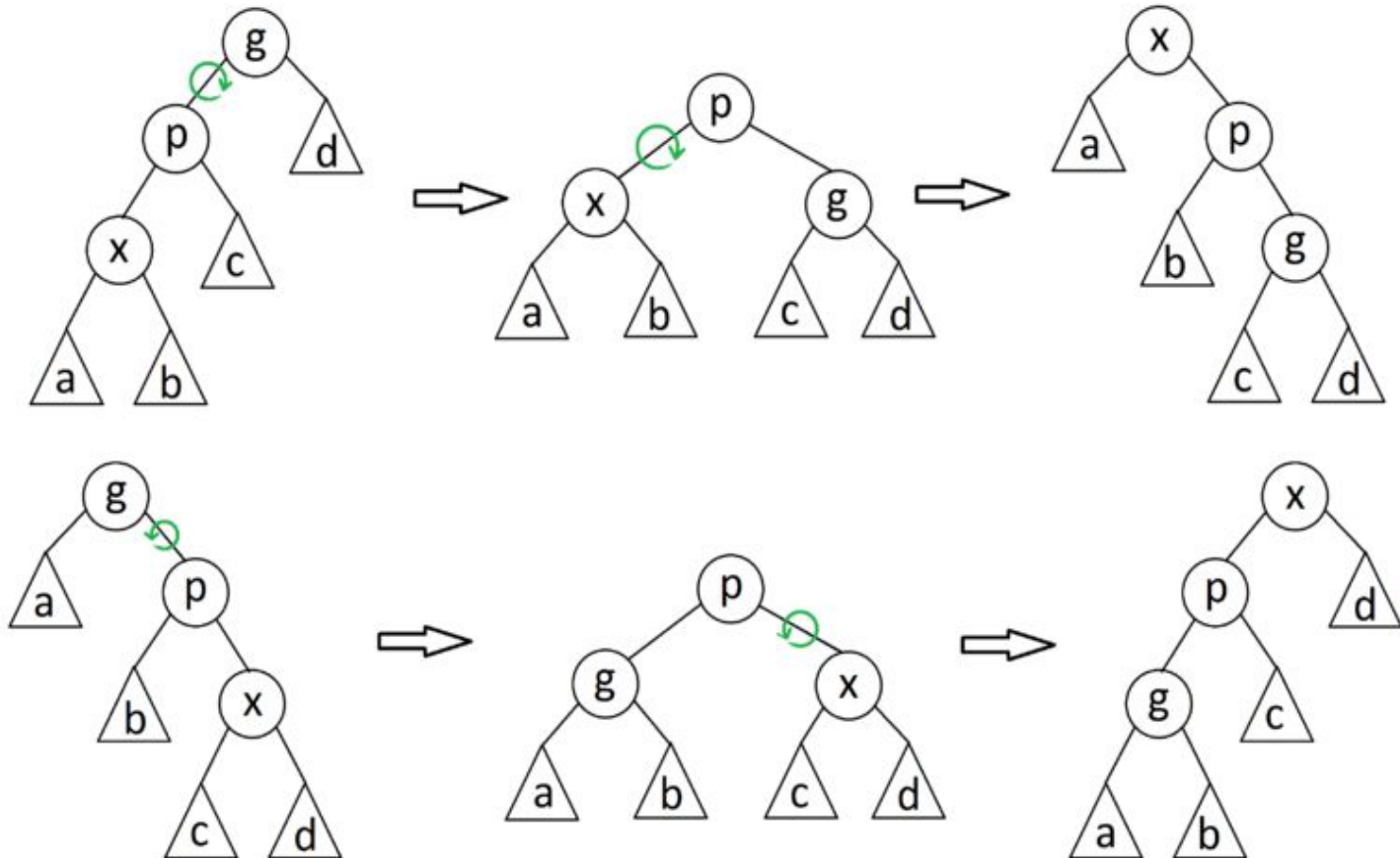
Если p — корень дерева с сыном x , то совершаем один поворот вокруг ребра (x, p) , делая x корнем дерева. Данный случай является крайним и выполняется только один раз в конце, если изначальная глубина x была нечетной.



Splay(Tree, x)

Zig-Zig

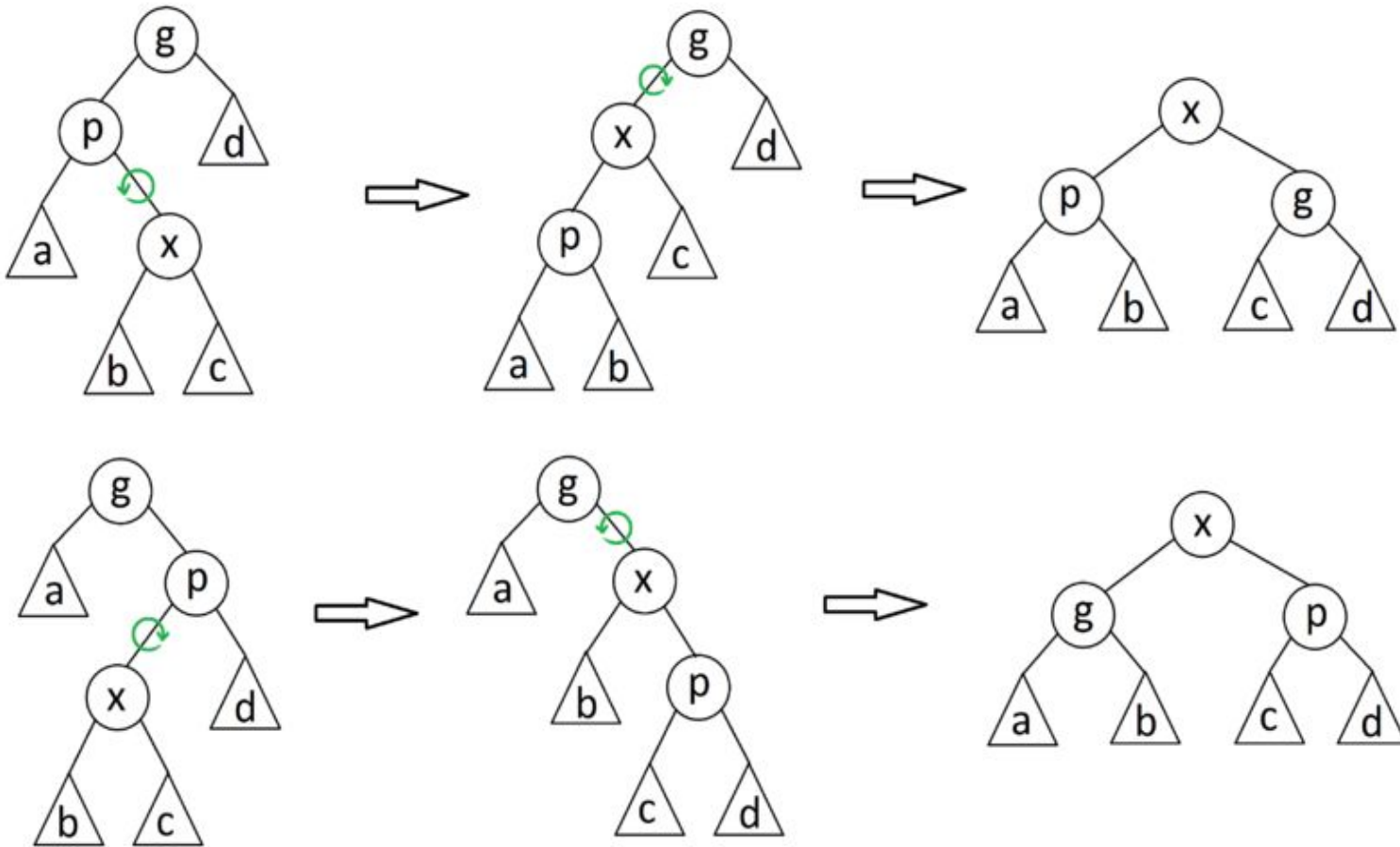
Если p — не корень дерева, а x и p — оба левые или оба правые дети, то делаем поворот ребра (p, g) , где g отец p , а затем поворот ребра (x, p) .



Splay(Tree, x)

Zig-Zag

Если p — не корень дерева и x — левый ребенок, а p — правый, или наоборот, то делаем поворот вокруг ребра (x, p) , а затем поворот нового ребра (x, g) , где g — бывший



Операции

Find (Tree, x)

Эта операция выполняется как для обычного бинарного дерева, только после нее запускается операция Splay.

Merge (Tree1, Tree2)

У нас есть два дерева $Tree1$ и $Tree2$, причём подразумевается, что все элементы первого дерева меньше элементов второго.

Запускаем Splay от самого большого элемента в дереве $Tree1$ (пусть это элемент i). После этого корень $Tree1$ содержит элемент i , при этом у него нет правого ребёнка. Делаем $Tree2$ правым поддеревом i и возвращаем полученное дерево.

Split (Tree, x)

Запускаем Splay от элемента x и возвращаем два дерева, полученные отсечением правого или левого поддерева от корня, в зависимости от того, содержит корень элемент больше или не больше, чем x .

Add (Tree, x)

Запускаем Split(Tree, x), который нам возвращает деревья $Tree1$ и $Tree2$, их подвешиваем к x как левое и правое поддерева соответственно.

Remove(Tree, x)

Запускаем Splay от x элемента и возвращаем Merge от его детей.

Анализ Splay

Амортизационный анализ сплей-дерева проводится с помощью метода потенциалов.

Потенциалом рассматриваемого дерева назовём сумму рангов его вершин.

Ранг вершины — $r(x) = \log_2 w(x)$,

$w(x)$ — количество вершин в поддереве с корнем x .

Лемма

Амортизированное время операции Splay вершины x в дереве с корнем t не превосходит

$$3r(t) - 3r(x) + 1$$

Доказательство леммы

Пусть r' и r — ранги вершин после шага и до него соответственно, p — предок вершины x , а g — предок p , если есть.

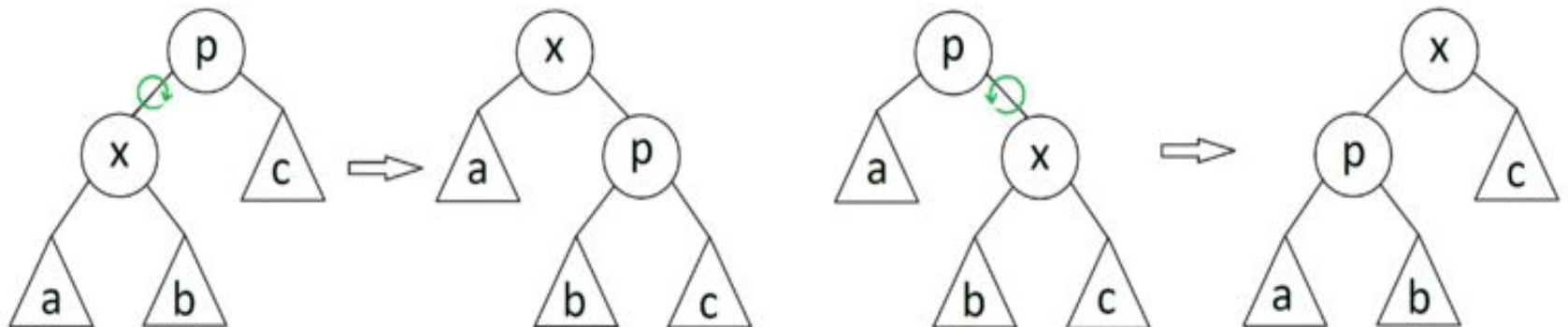
Zig. Выполнен один поворот \Rightarrow

$$T_{amort} = 1 + r'(x) + r'(p) - r(x) - r(p)$$

Ранг p уменьшился $\Rightarrow T_{amort} \leq 1 + r'(x) - r(x)$.

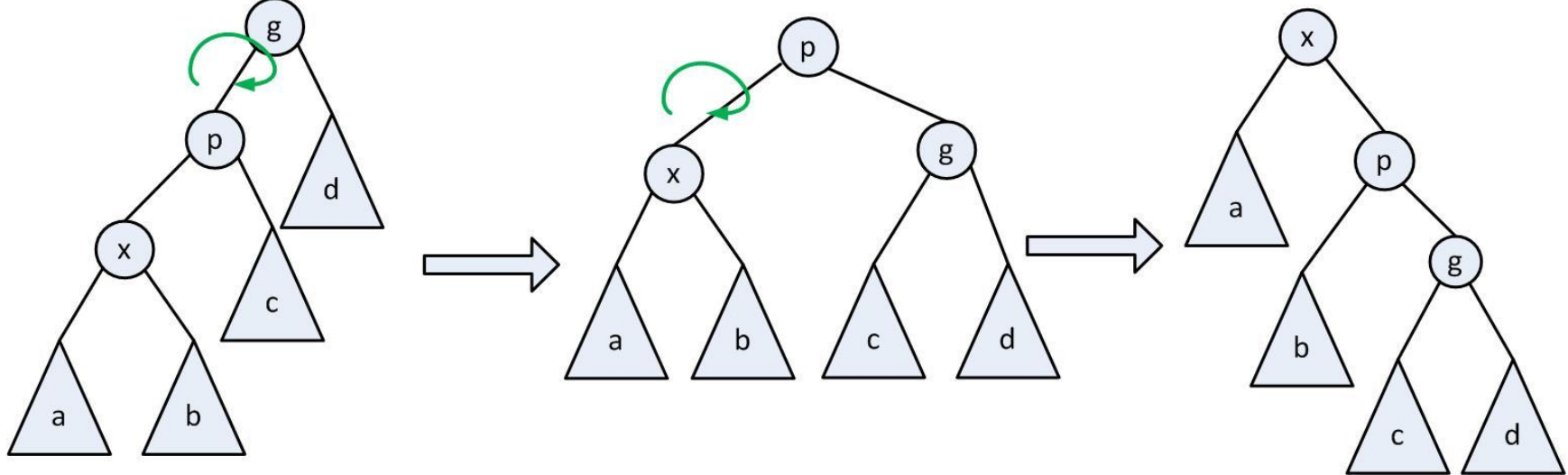
Ранг x увеличился $\Rightarrow r'(x) - r(x) \geq 0 \Rightarrow$

$$T_{amort} \leq 1 + 3r'(x) - 3r(x).$$



Доказательство Леммы -

7is-7is



Выполнено два поворота $\Rightarrow T_{amort} = 2 + r'(x) + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p) - r(g)$

$$r'(x) = r(g) \Rightarrow T_{amort} = 2 + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p)$$

$$r(x) \leq r(p) \Rightarrow T_{amort} \leq 2 + r'(p) + r'(g) - 2r(x)$$

$$r'(p) \leq r'(x) \Rightarrow T_{amort} \leq 2 + r'(x) + r'(g) - 2r(x)$$

Докажем, что эта сумма не превосходит $3(r'(x) - r(x))$, т.е., что $r(x) + r'(g) - 2r'(x) \leq -2$.

$$(r(x) - r'(x)) + (r'(g) - r'(x)) = \log_2 \frac{w(x)}{w'(x)} + \log_2 \frac{w'(g)}{w'(x)}$$

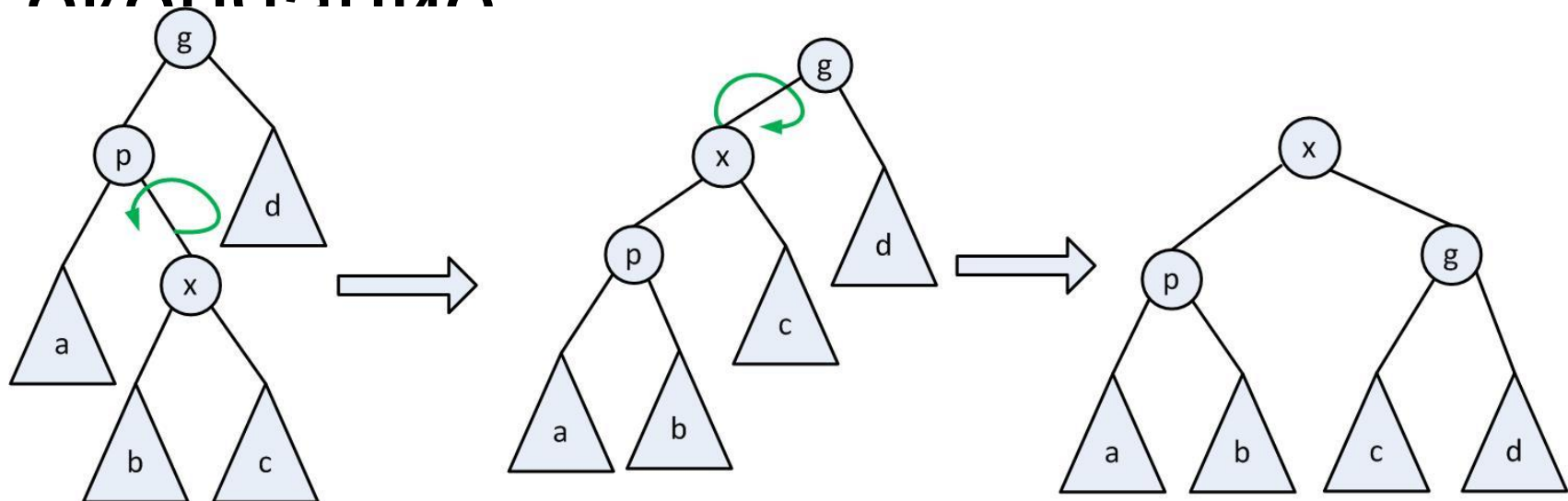
Из рисунка видно, что $w'(g) + w(x) \leq w'(x)$, значит, сумма выражений под логарифмами не превосходит единицы.

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab$, $a+b \leq 1$, логарифм — функция возрастающая $\Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\log_2 ab \leq -2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ -

ОКРУЖЕНИЕ



Zig-zag. Выполнено два поворота $\Rightarrow T_{amort} = 2 + r'(x) + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p) - r(g)$

$$r'(x) = r(g) \Rightarrow T_{amort} = 2 + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p)$$

$$r(x) \leq r(p) \Rightarrow T_{amort} \leq 2 + r'(p) + r'(g) - 2r(x) \leq 2(r'(x) - r(x)), \text{ — надо доказать}$$

т.е. $r'(p) + r'(g) - 2r'(x) \leq -2$.

$$(r(p) + r'(g)) - 2r'(x) = \log_2 \frac{w(p)}{w'(x)} + \log_2 \frac{w'(g)}{w'(x)} \leq -2$$

$$T_{amort} \leq 2(r'(x) - r(x)) \leq 3(r'(x) - r(x))$$

$$T_{splay} \leq 3r(t) - 3r(x) + 1$$

$$T_{splay} \leq 3 \log_2 N - 3 \log_2 w(x) + 1 = O(\log_2 N)$$