

Функция нескольких переменных

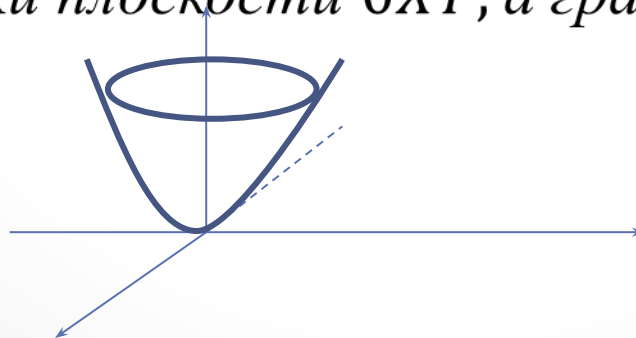
Лекция 16

Функция нескольких переменных. Определение

Функция нескольких переменных — это закон, по которому группе упорядоченных действительных чисел ставится в соответствие одно число : $U = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

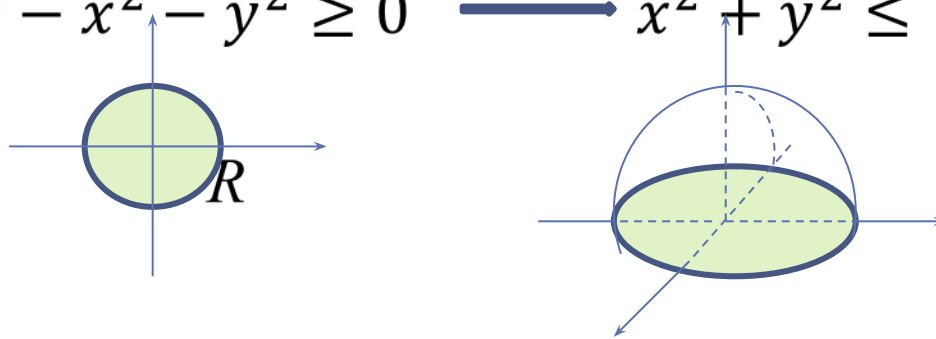
В случае функции двух переменных каждой паре упорядоченных действительных чисел $\{x, y\}$ по определенному правилу ставится в соответствие число: $z = f(x, y)$. При этом областью определения называют множество точек плоскости, для которых вычисления по формуле имеют смысл. Графиком функции является поверхность в пространстве.

Примеры: 1) для функции $z = x^2 + y^2$ областью определения являются все точки плоскости OXY , а графиком является параболоид



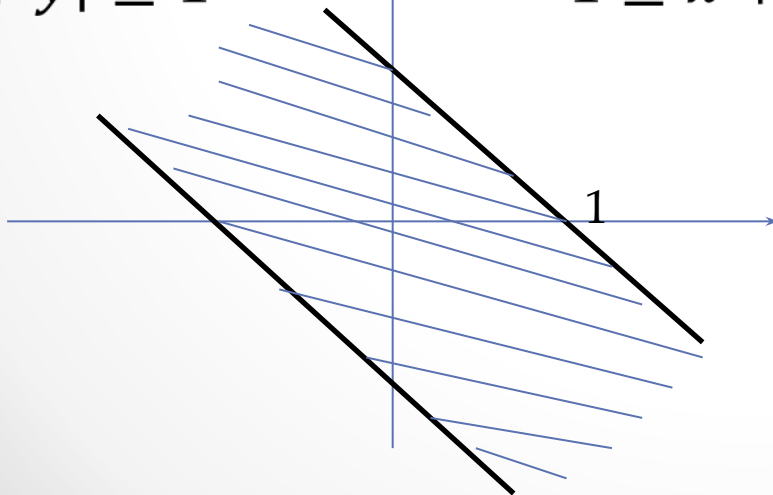
Область определения

- 2) для функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ областью определения является множество точек плоскости, удовлетворяющих условию $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 + y^2 \leq R^2$. График – полусфера :



- 3) для функции $z = \arcsin(x + y)$ областью определения является множество точек плоскости, удовлетворяющих условию:

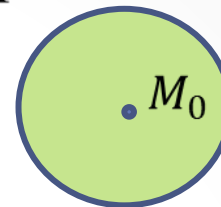
$$|x + y| \leq 1 \longrightarrow -1 \leq x + y \leq 1 \longrightarrow \begin{aligned} y &\geq -x - 1 \\ y &\leq -x + 1 \end{aligned}$$



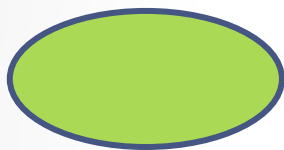
Виды множеств точек

δ - окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ задается неравенством

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \longleftrightarrow$$

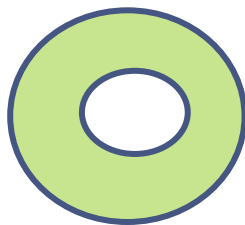


Все точки **связного** множества можно соединить линией из точек того же множества



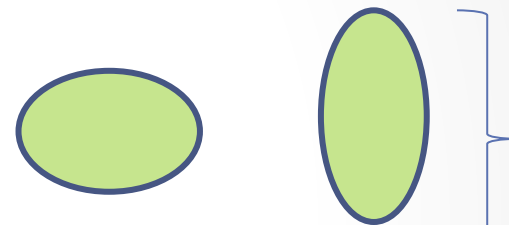
односвязное:

любую замкнутую кривую можно стянуть в точку, принадлежащую тому же множеству



двусвязное

δ - окрестность внутренних точек содержит только точки того же множества. Множество из внутренних точек называют **открытым**



несвязное

Область – связное открытое множество. **Замкнутая** область включает точки границы. **Ограниченную** область можно вписать в круг конечного радиуса.

Замкнутая ограниченная область – аналог понятия **отрезок** для функции одной переменной.

Понятия линии уровня, предела, непрерывности

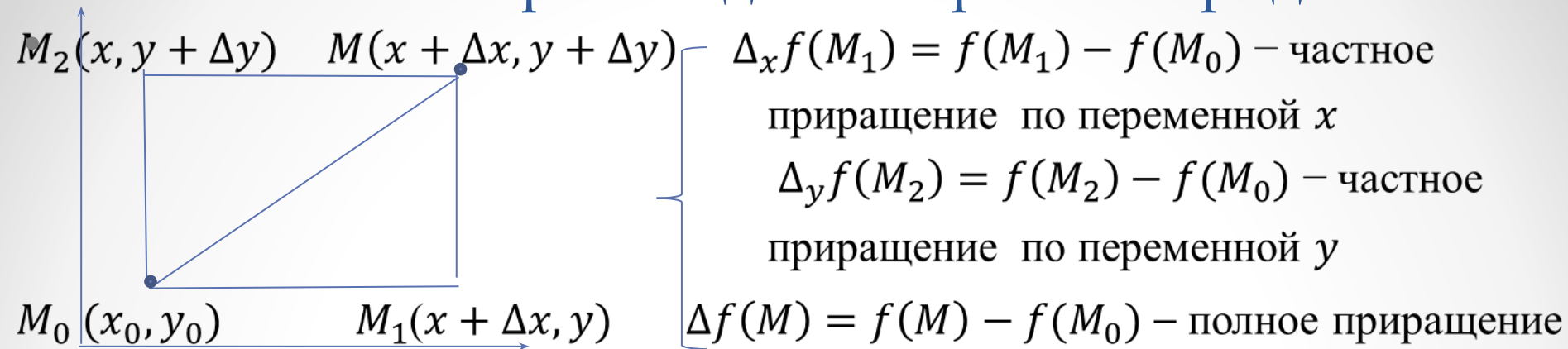
Линия (поверхность) уровня – множество точек, принадлежащих области определения, для которых сохраняется постоянное значение функции.

Пример. Для функции $z = x^2 + y^2$ линиями уровня являются окружности с центром в начале координат, радиус которых задается постоянным значением z . При $z = 9$ – это окружность радиуса $R = 3$.

Определение предела: число A называют пределом функции $f(x, y)$ при условии $M \rightarrow M_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех значений x из δ – окрестности точки M_0 выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Предел существует, если он единственный и не зависит от того, по какой линии $M \rightarrow M_0$. **Пример:** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x+y} = \langle y = kx \rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+kx}$
 $= \frac{1}{1+k}$ зависит от углового коэффициента прямой, по которой идет приближение к началу координат, то есть предел не существует

Частные производные первого порядка



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(M_1)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{— частная производная по } x \text{ при условии } y = \text{const}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(M_2)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{— частная производная по } y \text{ при условии } x = \text{const}$$

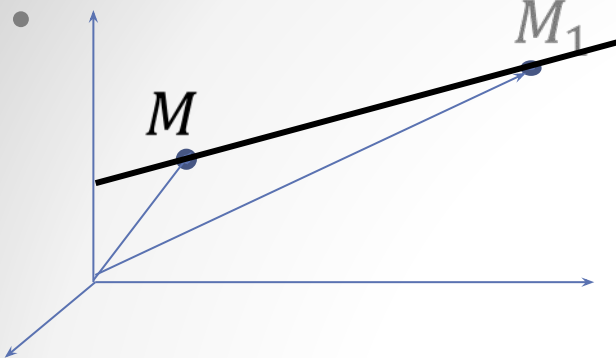
Функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке, если в окрестности этой точки полное приращение функции имеет вид:

$$\Delta f(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

Дифференциал функции – главная, линейная по Δx , Δy часть приращения

$$df(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy, \quad \Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$$

Производная по направлению.



Точки M , M_1 принадлежат области определения. Направление MM_1 задается вектором: $MM_1 = \Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

длина которого $l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Единичный вектор направления $\mathbf{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

$\Delta f = f(M_1) - f(M)$ — приращение функции по направлению \mathbf{e} .

Производная по направлению или скорость изменения функции в данном направлении:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = \frac{\partial f(M)}{\partial l} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \cos \gamma$$

Пример: $z = x^2 y + x y^3$. Найти скорость изменения функции в точке $M(1, 1)$ в направлении $\mathbf{a} = (3, 4)$.

$$|a| = 5, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5}, \quad \mathbf{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^3,$$

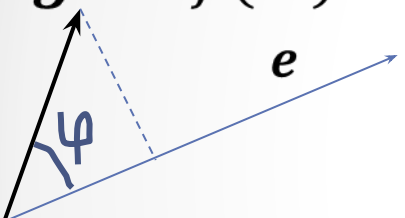
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3xy^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = 5$$

Градиент

Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ называется **вектор**, координаты которого равны частным производным, взятым в точке. Обозначают $\mathit{grad}f(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \mathbf{k}$

Взаимосвязь градиента и производной по направлению:

$\mathit{grad}f(M)$ Выражение для производной по направлению можно представить как скалярное произведение вектора градиента и единичного вектора направления \mathbf{e} или как проекцию градиента на это направление:



$$\frac{\partial f(M)}{\partial \mathbf{e}} = (\mathit{grad}f(M), \mathbf{e}) = |\mathit{grad}f(M)| \cos \varphi = \text{Pr}_{\mathbf{e}} \mathit{grad}f(M)$$

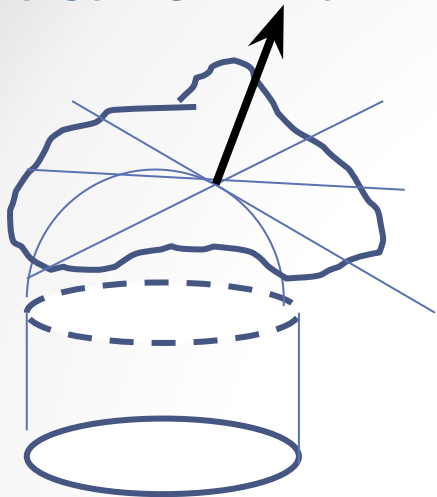
Скорость изменения функции максимальна в направлении градиента: $\varphi = 0$

$$\cos \varphi = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f(M)}{\partial \mathit{grad}f(M)} = |\mathit{grad}f(M)|$$

Пример: градиент $z = x^2y + xy^3$ в точке $M(1,1)$ равен $\mathit{grad}f(M) = (3, 4)$.

Скорость изменения функции в направлении градиента $|\mathit{grad}f(M)| = 5$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности



Касательная плоскость содержит касательные ко всем кривым, проходящим через данную точку поверхности. Поверхность называется гладкой, если в каждой ее точке можно провести касательную плоскость. С учетом того, что вектор градиента всегда направлен по

нормали к линии (поверхности) уровня, нормаль (нормальный вектор) в каждой точке поверхности $F(x, y, z) = 0$ совпадает с направлением градиента:

$$\mathbf{N} = \mathbf{grad}F(M) = \left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial F(M_0)}{\partial z} \right) = (A, B, C)$$

$$\text{Уравнение плоскости } \frac{\partial F(M_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z} (z - z_0) = 0$$

Для случая, когда уравнение поверхности $z = f(x, y) \rightarrow F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$

$$\mathbf{N} = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, -1 \right) \rightarrow \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} (y - y_0) - (z - z_0) = 0$$