Функция нескольких переменных

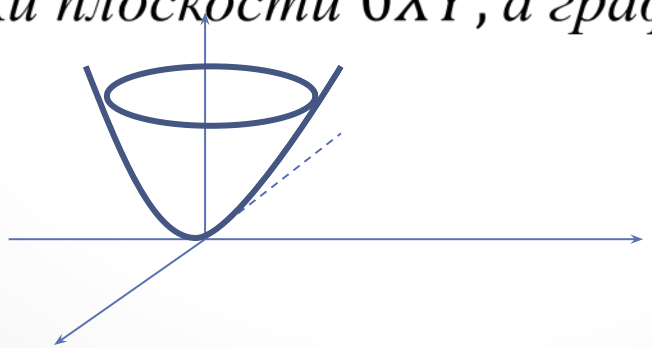
Лекция 16

Функция нескольких переменных. Определение

Функция нескольких переменных – это закон, по которому группе упорядоченных действительных чисел ставится в соответствие одно число : $U = \ f(x_1, \quad x_2, \quad x_3, \dots x_n)$.

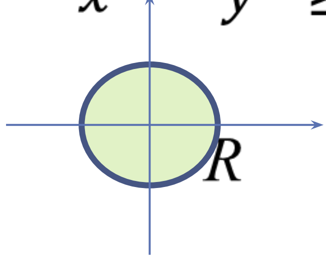
В случае функции двух переменных каждой паре упорядоченных действительных чисел $\{x, \ y\}$ по определенному правилу ставится в соответствие число: $z = f(x, \ y)$. При этом областью определения называют множество точек плоскости, для которых вычисления по формуле имеют смысл. Графиком функции является поверхность в пространстве.

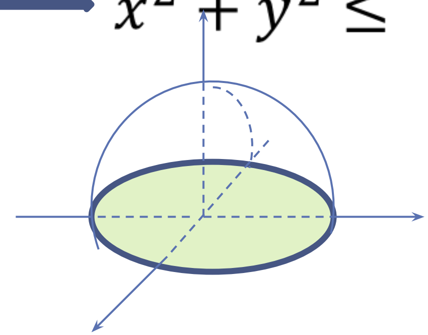
Примеры:1) *для функции* $z = x^2 + y^2$ *областью определения являются все точки плоскости* $0XY$*, а графиком является параболоид*



Область определения

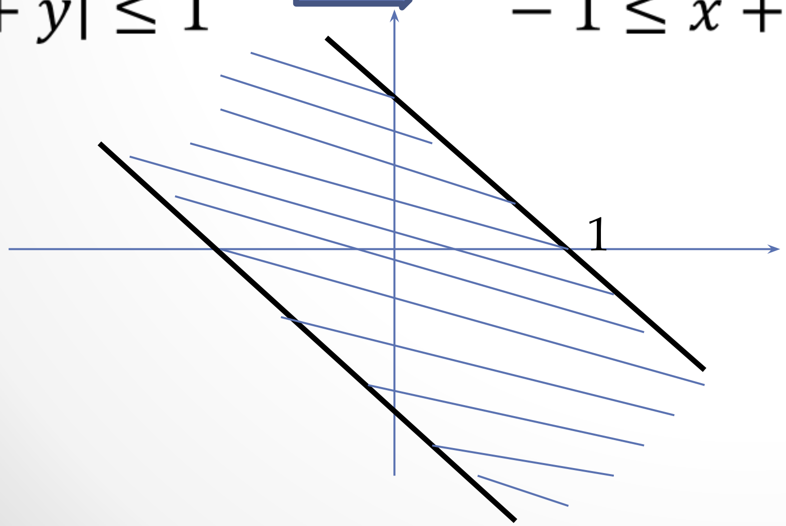
2) для функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ областью определения является множество точек плоскости, удовлетворяющих условию $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 + y^2 \leq R^2$. График – полусфера :





3) для функции $z = \arcsin(x + y)$ областью определения является множество точек плоскости, удовлетворяющих условию:

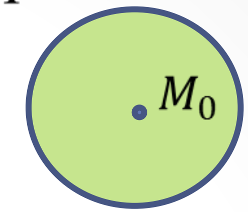
$$|x + y| \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq x + y \leq 1 \longrightarrow \begin{matrix} y \geq -x - 1 \\ y \leq -x + 1 \end{matrix}$$



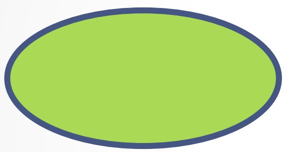
Виды множеств точек

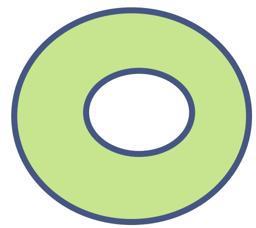
δ- окрестность точки $M_0(x_0,\ y_0)$ задается неравенством

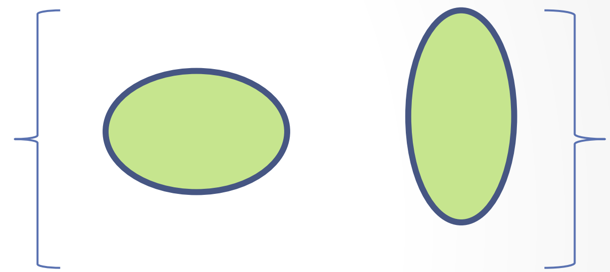
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \quad \Longleftrightarrow$$



Все точки **связного** множества можно соединить линией из точек того же множества







односвязное: **двусвязное** **несвязное**

любую замкнутую кривую можно стянуть в точку , принадлежащую тому же множеству

δ- окрестность внутренних точек содержит только точки того же множества. Множество из внутренних точек называют **открытым**

Область – связное открытое множество. Замкнутая область включает точки границы. **Ограниченную** область можно вписать в круг конечного радиуса.

Замкнутая ограниченная область – аналог понятия отрезок для функции одной переменной.

Понятия линии уровня, предела, непрерывности

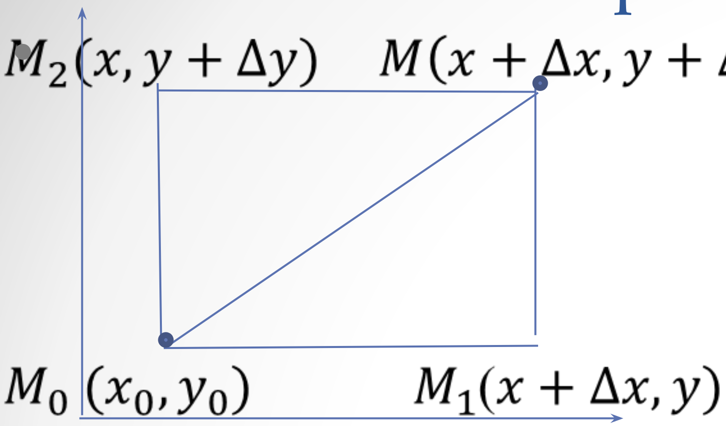
Линия (поверхность) уровня − множество точек, принадлежащих области определения , для которых сохраняется постоянное значение функции.

Пример. Для функции $z = x^2 + y^2$ **линями уровня** являются окружности с центром в начале координат, радиус которых задается постоянным значением z . При $z = 9$ − *это окружность радиуса* $R = 3$.

Определение предела: число A называют пределом функции $f(x, y)$ при условии $M \to M_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех значений x из δ – окрестности точки M_0 выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Предел существует, если он единственный и не зависит от того, по какой линии $M \to M_0$. **Пример**: $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} = \langle y = kx \rangle = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+kx} = \frac{1}{1+k}$ зависит от углового коэффициента прямой, по которой идет приближение к началу координат, то есть предел не существует

Частные производные первого порядка



$\Delta_x f(M_1) = f(M_1) - f(M_0)$ – частное приращение по переменной x

$\Delta_y f(M_2) = f(M_2) - f(M_0)$ – частное приращение по переменной y

$\Delta f(M) = f(M) - f(M_0)$ – полное приращение

$\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x f(M_1)}{\Delta x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ – **частная производная по** $\boldsymbol{x}$ *при условии* $y = const$

$\lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{\Delta_y f(M_2)}{\Delta y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ – **частная производная по** $\boldsymbol{y}$ *при условии* $x = const$

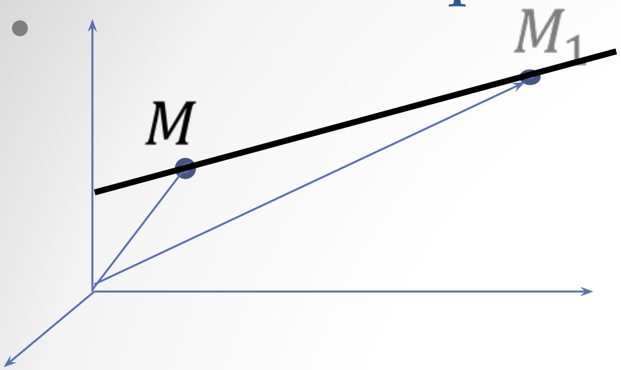
Функция $z = f(x, y)$ **дифференцируема** в точке, если в окрестности этой точки полное приращение функции имеет вид:

$$\Delta f(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

Дифференциал функции – главная , линейная по Δx, Δy часть приращения

$$df(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y}dy\ , \qquad \Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$$

Производная по направлению.



Точки M, M_1 принадлежат области определения. Направление $\boldsymbol{MM_1}$ задается вектором: $\boldsymbol{MM_1} = \Delta\boldsymbol{r} = (\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$, длина которого $l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Единичный вектор направления $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

$\Delta f = f(M_1) - f(M)$ – *приращение функции по направлению* $\boldsymbol{e}$.

Производная по направлению или скорость изменения функции в данном направлении:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f(M)}{\Delta l} = \frac{\partial f(M)}{\partial l} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f(M)}{\partial x} \cos\gamma$$

Пример: $z = x^2 y + x y^3$. *Найти скорость изменения функции в точке* $M(1,1)$ *в направлении* $\boldsymbol{a} = (3,\ 4)$.

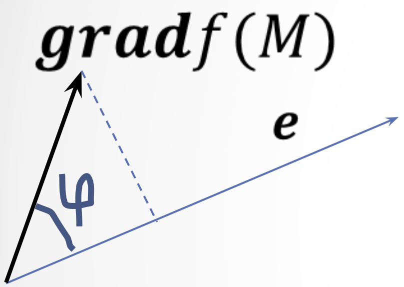
$$|a| = 5,\ \cos\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{4}{5},\ \boldsymbol{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = 5$$

Градиент

Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ **называется вектор**, координаты которого равны частным производным, взятым в точке. Обозначают $grad f(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

<u>Взаимосвязь градиента и производной по направлению</u>**:**



Выражение для производной по направлению можно представить как скалярное произведение вектора градиента и единичного вектора направления $\boldsymbol{e}$ или как проекцию градиента на это направление:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{grad} f(M), \boldsymbol{e}) = |\boldsymbol{grad} f(M)| \cos\varphi = \text{Пр}_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{grad} f(M)$$

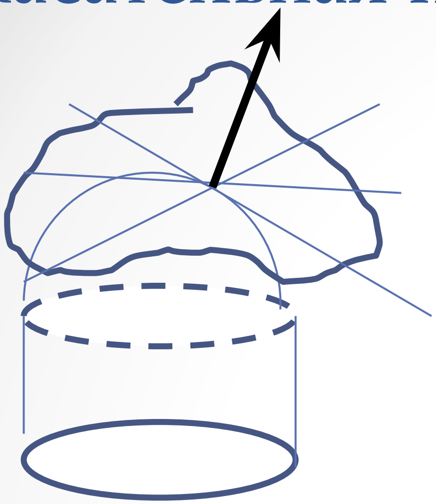
<u>Скорость изменения функции максимальна в направлении градиента:</u> $\varphi = 0$

$$\cos\varphi = 1 \longrightarrow \frac{\partial f(M)}{\partial\, \boldsymbol{grad} f(M)} = |\boldsymbol{grad} f(M)|$$

Пример: градиент $z = x^2 y + x y^3$ в точке $M(1,1)$ равен $grad f(M) = (3,\ \ 4)$.

Скорость изменения функции в направлении градиента $|grad f(M)| = 5$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности



Касательная плоскость содержит касательные ко всем кривым, проходящим через данную точку поверхности. Поверхность называется гладкой, если в каждой ее точке можно провести касательную плоскость. С учетом того, что вектор градиента всегда направлен по нормали к линии (поверхности) уровня, нормаль (нормальный вектор)в каждой точке поверхности $F(x,y,z)=0$ совпадает с направлением градиента:

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{grad}F(M)=\left(\frac{\partial F(M_0)}{\partial x},\ \frac{\partial F(M_o)}{\partial y},\ \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}\right)=(A,\ B,\ C)$$

Уравнение плоскости $\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0$

Для случая, когда уравнение поверхности $z=f(x,y)\longrightarrow F(x,y,z)=f(x,y)-1$

$$\boldsymbol{N}=\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x},\frac{\partial f(M_0)}{\partial y},-1\right)\longrightarrow\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y-y_0)-\quad(z-z_0)=0$$