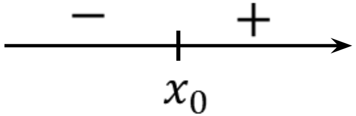
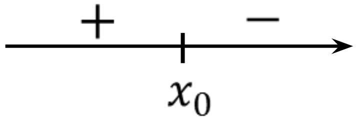
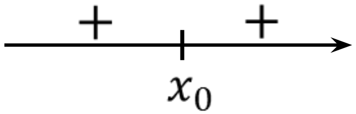
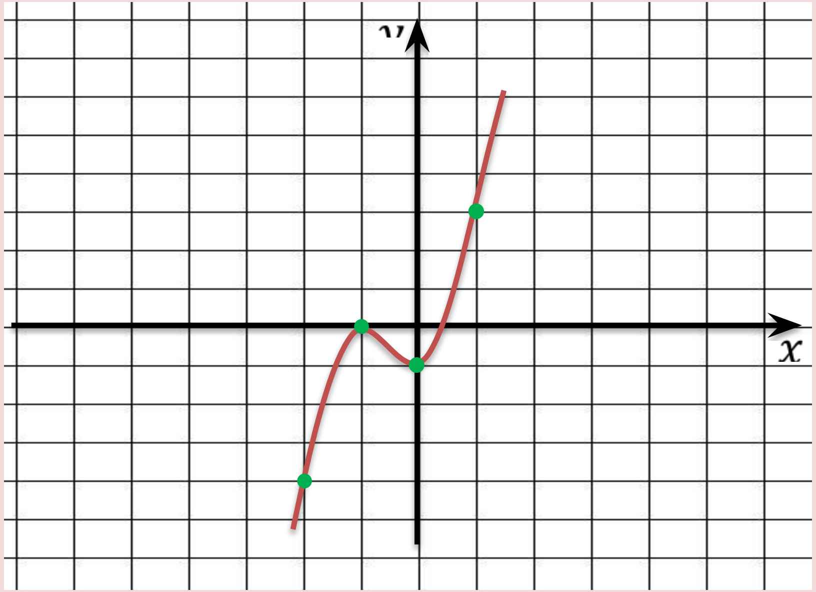
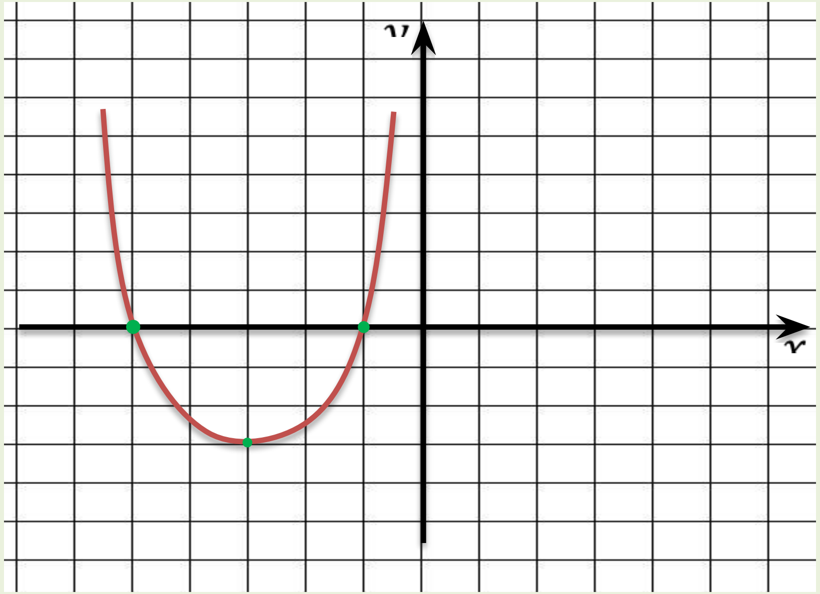
Построение графиков функций

Упражнение:

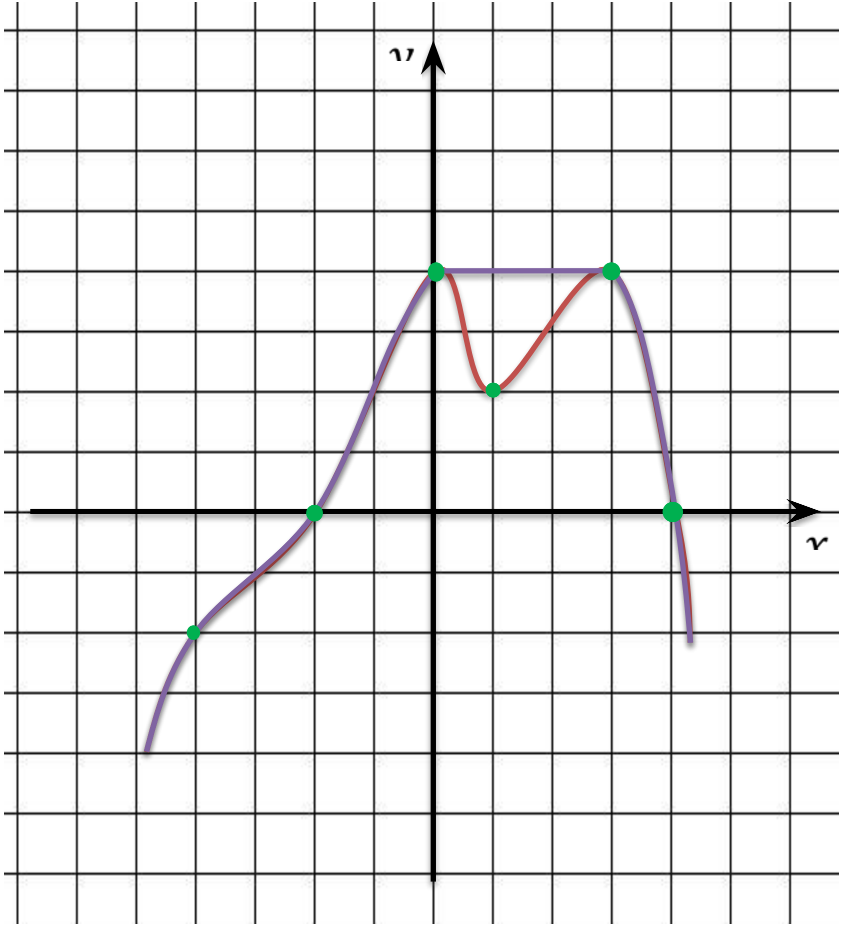
Составьте верные высказывания:





$$x = -\frac{b}{2a}$$



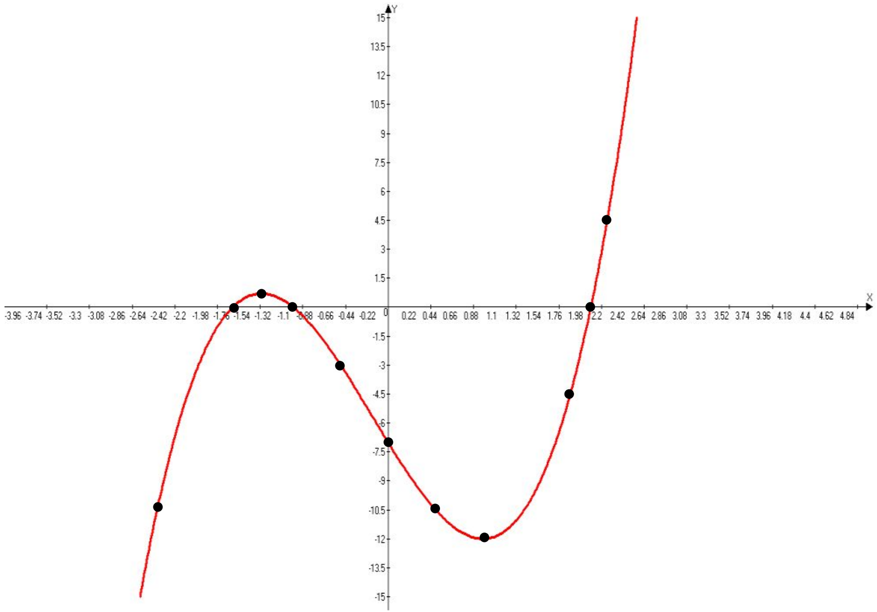
– стационарные и критические точки;

– точки экстремума;

– точки пересечения графика функции с осями координат;

– точки разрыва функции.

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то достаточно найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек.
2. Если функция $y = f(x)$ определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с нахождения области определения (если область не задана) и с указания ее точек разрыва.
3. Полезно исследовать функцию на четность, поскольку график четной или нечетной функции обладает симметрией (соответственно относительно оси OY или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при $x \geq 0$, а затем дорисовать симметричную ветвь.
4. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.
5. Если $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, при $x = a, q(x) = 0, p(x) \neq 0$, то $x = a$ – вертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$.



Построить график функции

$y = 2x^3 + x^2 - 8x - 7.$

Решение:

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 7$

1. $D(f) = (-\infty; +\infty).$

2. $f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) - 7 = -2x^3 + x^2 + 8x - 7$

2. $f(x)$ – ни четная, ни нечетная

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^3 + x^2 - 8x - 7 = \infty$

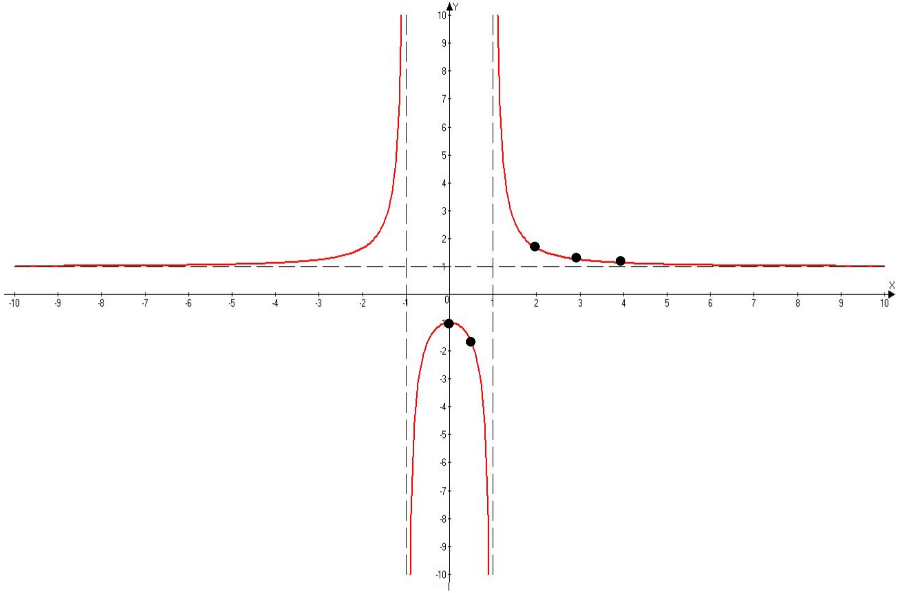
3. вертикальной асимптоты нет
горизонтальной асимптоты нет

4. $f'(x) = 6x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -1\frac{1}{3}, x = 1$

	↘	$\frac{19}{27}$ min	↗	-12 max	↘

5. $x = 0 \Rightarrow y = -7;$

$y = 0 \Rightarrow -1{,}64; x = -1; x = 2{,}14$



Построить график функции

$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Решение:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

1. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

2. функция чётная

$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$

3. $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты

$y = 1$ – горизонтальная асимптота

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

4. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

		Не сущ.		0			
	↗	Не сущ.	↗		↘		↘

Схема исследования функции для построения графика:

1. Находим $D(f)$.
2. Проверяем функцию на четность или нечетность.
3. Находим асимптоты графика функции, если они есть.
4. Находим промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума функции.
5. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.
6. Строим таблицу значений функции для некоторых точек.
7. Отмечаем на координатной плоскости найденные точки, соединяем их и получаем график исходной функции.