

Предельные теоремы ТВ

Рассмотрим ряд утверждений и теорем, устанавливающих связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками СВ при большом числе испытаний.

Предельные теоремы условно разделим на 2 группы:

1. Закон больших чисел (ЗБЧ) – устанавливает устойчивость средних значений: при большом числе испытаний средний результат может быть предсказан с достаточной точностью.
2. Центральная предельная теорема (ЦПТ) – устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа СВ неограниченно приближается к нормальному.

Рассмотрим неравенство Чебышева. Используется для:

- 1) грубой оценки вероятностей событий, связанных со СВ, распределение которых не известны;
- 2) док-ва теорем ЗБЧ.

Неравенство Чебышева

Теорема 1. Если СВ X имеет м.о. $MX=a$ и дисперсию DX , то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо нер-во Чебышева

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Д-во.

Докажем неравенство для непрерывной с. в. X с плотностью $f(x)$. Вероятность $P\{|X - a| \geq \varepsilon\}$ есть вероятность попадания с. в. X в область, лежащую вне промежутка $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

$$P\{|X - a| \geq \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx = \int_{|x-a| \geq \varepsilon} f(x) dx = \int_{|x-a| \geq \varepsilon} 1 \cdot f(x) dx \leq \int_{|x-a| \geq \varepsilon} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} f(x) dx,$$

так как область интегрирования $|x - a| \geq \varepsilon$ можно записать в виде $(x - a)^2 \geq \varepsilon^2$, откуда следует $1 \leq \frac{(x - a)^2}{\varepsilon^2}$. Имеем

$$P\{|X - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-a| \geq \varepsilon} (x - a)^2 f(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 f(x) dx,$$

$$P\{|X - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^2} DX, \quad \text{т. е. } P\{|X - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Аналогично док-ся и для ДСВ. Его можно записать и в виде

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Нер-во Чебышева справедливо для любых СВ. Например, для СВ $X=m$, имеющей биномиальное распределение с м.о. $MX=a=np$ и дисперсией $DX=npq$

$$P\{|m - np| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$$

для частоты $\frac{m}{n}$ события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью

$p = M\left(\frac{m}{n}\right) = a$, дисперсия которых $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$, неравенство

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Оценку вероятности попадания СВ X в $[\varepsilon, \infty)$ дает нер-во Маркова.

Теорема 2. Для любой неотрицательной СВ X , имеющей м.о. MX и $\varepsilon > 0$, справедливо нер-во

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

Д-во.

$$P\{X \geq \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\varepsilon} f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\infty} x f(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{MX}{\varepsilon}.$$

Нер-во также можно записать и в виде $P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon}.$

Пример Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что отклонение с. в. X от своего м. о. будет меньше трех с. к. о., т. е. меньше $3\sigma_x$.

Полагая $\varepsilon = 3\sigma_x$ в формуле $P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$$P\{|X - MX| < 3\sigma_x\} \geq 1 - \frac{\sigma_x^2}{(3\sigma_x)^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,8889.$$

Теорема Чебышева

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *сходятся по вероятности* к величине A (случайной или неслучайной), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|X_n - A| < \varepsilon\}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к единице, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - A| < \varepsilon\} = 1 \quad X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} A.$$

Теорема 3 (ЗБЧ в форме П. Л. Чебышева, 1886 г.). Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы и существует такое число $C > 0$, что $DX_i \leq C, i = 1, 2, \dots$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i.$$

Д-во.

Так как $DX_i \leq C, i = 1, 2, \dots$, то $D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i =$
 $= \frac{1}{n^2} (DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n) \leq \frac{1}{n^2} (C + C + \dots + C) = \frac{1}{n^2} Cn = \frac{C}{n}.$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая, что вероятность любого события не превышает 1, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Следствие. Если с. в. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы и одинаково распределены, $MX_i = a$, $DX_i = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon \right\} = 1 \qquad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a.$$

Д-во.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} (MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n) = \frac{1}{n} (a + a + \dots + a) = \frac{1}{n} \cdot na = a,$$

а дисперсии с. в. X_i равны числу σ^2 , т. е. ограничены, то, применив ЗБЧ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Пример Глубина моря измеряется прибором, не имеющим систематической ошибки. Среднее квадратическое отклонение измерений не превосходит 15 м. Сколько нужно сделать независимых измерений, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a (глубины моря) по модулю меньше, чем на 5 м?

Обозначим через X_i результаты n независимых измерений глубины моря. Нужно найти число n , которое удовлетворяет неравенству

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

где $MX_i = a$, что означает отсутствие при измерениях систематической ошибки (т. е. измерения производятся с одинаковой точностью). По условию $\varepsilon = 5$, $C = 225$, так как $\sigma = \sqrt{DX} = 15$ м. Отсюда

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n -a\right| < 5\right\} \geq 1 - \frac{225}{25n} \geq 0,9,$$
$$0,1 \geq \frac{9}{n}, n \geq 90.$$

Измерение нужно проводить не менее 90 раз.

Теорема Бернулли

Теорема 4 (ЗБЧ в форме Я. Бернулли, 1713 г.). Если вероятность появления события A в одном испытании равна p , число наступления этого события при n независимых испытаниях равно n_A , то для любого числа $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

т. е. относительная частота $P^*(A)$ события A сходится по вероятности к вероятности p события A : $P^*(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} P(A)$.

Д-во.

Введем с. в. X_1, X_2, \dots, X_n следующим образом: $X_i = 1$, если в i -м испытании появилось событие A , а если не появилось, то $X_i = 0$. Тогда

$$n_A = \sum_{i=1}^n X_i. \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_i & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p, \\ \hline \end{array} \quad MX_i = p \quad DX_i = pq.$$

с. в. X_i независимы, их дисперсии ограничены одним и тем же числом

$$p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Поэтому к этим с. в. можно применить теорему Чебышева

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{n_A}{n}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot np = p.$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Неравенство Чебышева

для случайных величин

$$n_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

принимает вид

$$P \left\{ \left| \frac{n_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Обобщением теоремы Бернулли на случай, когда вероятности p_i появления события A в каждом из n испытаний различны, является теорема Пуассона:

$$P^*(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i,$$

где p_i — вероятность события A в i -м испытании.

Пример Вероятность наличия опечатки на одной странице рукописи равна 0,2. Оценить вероятность того, что в рукописи, содержащей 400 страниц, частота появления опечатки отличается от соответствующей вероятности по модулю меньше, чем 0,05.

$$p = 0,2, \quad q = 0,8, \quad n = 400, \quad \varepsilon = 0,05.$$

$$P \left\{ \left| \frac{n_A}{n} - 0,2 \right| < 0,05 \right\} \geq 1 - \frac{0,2 \cdot 0,8}{400 \cdot 0,05^2} = 0,84,$$

т. е. $p \geq 0,84$.

Центральная предельная теорема

Теорема 5. Пусть с. в. X_1, X_2, \dots, X_n независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание $MX_i = a$ и дисперсию $DX_i = \sigma^2, i = \overline{1, n}$. Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих случайных величин стремится при $n \rightarrow \infty$ к функции распределения стандартной нормальной случайной величины:

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}},$$
$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

при достаточно большом n сумма Z_n приближенно распределена по нормальному закону: $Z_n \sim N(0, 1)$. Это означает, что сумма $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ приближенно распределена по нормальному закону: $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma)$. Говорят, что при $n \rightarrow \infty$ с. в. $\sum_{i=1}^n X_i$ асимптотически нормальна.

Пример Независимые с. в. X_i распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти закон распределения с. в.

$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i,$$

а также вероятность того, что $55 < Y < 70$.

Условия ЦТТ соблюдаются, поэтому с. в. Y имеет приближенно плотность распределения

$$f_Y(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}.$$

По известным формулам для м. о. и дисперсии в случае равномерного распределения находим: $MX_i = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $DX_i = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$,

$\sigma_{X_i} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Тогда

$$m_Y = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} MX_i = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50,$$

$$\sigma_Y^2 = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} DX_i = 100 \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3},$$

$$f_Y(y) \approx \frac{3}{5\sqrt{6}\pi} e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}.$$

$$P\{55 < Y < 70\} = \Phi\left(\frac{70-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) = \Phi(6,9282) - \Phi(1,73) \approx 0,04$$