Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§52. Сочетания и размещения.

Часть II

Содержание

Повторение

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел n! и называют «эн факториал»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

n	1	2	3	4	5	6	7
n!	1	1·2=2	2!·3=6	3!·4=24	4!·5=120	5!·6=720	6!·7=5040

Повторение

- ***Теорема 1.*** **n различных элементов можно расставить по одному на n различных место ровно n! способами.**
- Как правило, эту теорему записывают в виде краткой формулы: $\mathbf{P_n=n!}$
- $\mathbf{P_n}$-это число перестановок из n различных из n различных элементов, оно равно ***n!***.

Повторение

- **Определение 2.** число всех выборов двух элементов *без учета их порядка* из *n* данных элементов называют числом сочетаний из n элементов по 2 и обозначают C_n^2 (цэ из эн по два).
- ***Теорема 2*** (*о выборе двух элементов*). Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести ***n(n-1)/2*** способами.

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Повторение

Теорема 3. Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести n(n-1) способами.

Определение 3. Число всех выборов двух элементов *с учетом их порядка из n* данных называ A_n^2. числом размещений из n элементов по 2 и обозначают

Итоги выборов двух элементов

Сочетания из n элементов по 2:	Размещения из n элементов по 2:
$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$	$A_n^2 = n(n-1)$

- А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс 2 заменить на 3, 4, … и вообще на произвольное число k, 1≤k ≤n?

Введение

- Здесь мы переходим к основному вопросу параграфа – к выборам, состоящим из произвольного числа элементов.
- Вот типичные вопросы:
  - ✔ Сколькими способами можно выбрать 5 учеников из 30 для дежурства в столовой;
  - ✔ Актив класса (староста, культорг, редактор стенгазеты, организатор спортивных мероприятий) – 4 человека из 30;
  - ✔ 7 монет из 10 данных монет;
  - ✔ 10 карт из колоды в 32 карты и т.п.
- Удобно, как и ранее, ввести специальные термины и специальные обозначения.

Определение 4

- Число всех выборов k элементов из n данных без учета порядка называют числом сочетаний ,из n элементов по C_n^k. обозначают Число всех выборов k элементов из n данных с учётом их порядка называют числом размещений из n элемент A_n^k.по k и обозначают
- Используя эти обозначения, нетрудно записать ответы на поставленные выше вопросы:
  - ✔ Сколькими способами м C_{30}^{5} ю выбрать 5 учеников из 30 для дежурства в столовой;
  - ✔ Актив класса (староста, культорг, реда A_{30}^{4} стенгазеты, организатор спортивных мер C_{10}^{7} ятий) – 4 человека из 30;
  - ✔ 7 монет из 10 данных монет; C_{32}^{10}
  - ✔ 10 карт из колоды в 32 карты и т.п.

Теорема 4

Теорема 4. **Для любых натуральных чисел n и k, таких, что $k < n$, справедливы соотношения:**

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1), \qquad (1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad (2)$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}, \qquad (3)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Доказательство. 1) Нам следует поочередно выбирать k элементов из n данных. Проведем независимо k следующих испытаний. Первое из них состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 1. Это испытание имеет n исходов. После проведения первого испытания проведем второе. Оно состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 2. Так как один элемент из n данных уже выбран, то осталось $(n - 1)$ непронумерованных элементов. Значит, второе испытание имеет $(n - 1)$ исход. После проведения двух испытаний проводится третье, в результате которого один из оставшихся $(n - 2)$ элементов получит № 3, и т. д. В последнем, k-м испытании, будет $(n - (k - 1))$ исходов, так как в предыдущих испытаниях выбран $(k - 1)$ элемент. Остается применить правило умножения. Получим:

Используя формулы (3) и (1), получаем:

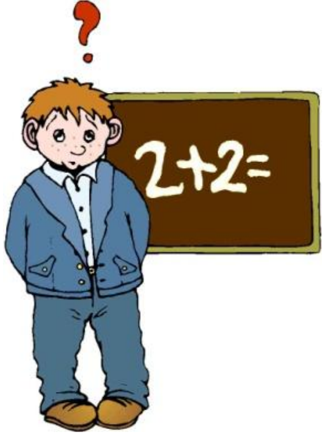
$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример 7

- В классе 27 учеников, из них нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) первый ученик должен решить задачу, второй — сходить за мелом, третий — пойти дежурить в столовую;

б) им следует спеть хором?



Р е ш е н и е. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, в первом случае получим A_{27}^3, во втором — C_{27}^3.

а) $A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25 = 17550;$

б) $C_{27}^3 = \dfrac{A_{27}^3}{3!} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9 \cdot 13 \cdot 25 = 2925.$

Пример 8

- «Проказница Мартышка, Осёл, Козел и Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили выбрать 4 любых инструмента из имеющихся 11.

а) Найти число всевозможных выборов инструментов.

б) Найти число всевозможных рассаживаний участников квартета с выбранными четырьмя инструментами (инструменты, как в басне Крылова, занимают четко отведенные позиции).

в) Сколько всего различных инструментальных составов квартета может получиться?

Решение. а) Требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных без учета порядка, т. е. число сочетаний из 11 элементов по 4:

$$C_{11}^4 = \frac{A_{11}^4}{4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330.$$

б) Это уже знакомая нам задача про рассаживание четырех субъектов на 4 места. Найдем число перестановок:

$$P_4 = 4! = 24.$$

в) Каждый инструментальный состав квартета получается в результате проведения двух независимых испытаний: первое — из пункта а), второе — из пункта б). По правилу умножения получаем:

$$C_{11}^4 \cdot P_4 = 330 \cdot 24 = 7920.$$

Впрочем, ответ можно получить и без использования пунктов а) и б). Действительно, можно считать, что выбор инструментов происходит поочередно: первой выбирает Мартышка, потом Осел, Козел и Мишка. Значит, требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных с учетом порядка, т. е. число размещений из 11 элементов по 4:

$$A_{11}^4 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920.$$

Ответ: а) 330; б) 24; в) 7920.

Теперь посмотрим на число C_n^k при $k = n$. По определению C_n^n — это количество выборов n элементов из n данных. Но такой выбор единственный — надо взять все множество целиком; значит, $C_n^n = 1$. А если к этому случаю применить формулу из теоремы 4, то получается:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!}.$$

Что же такое «ноль факториал»? Математики поступили просто. Чтобы сохранить красивую формулу для чисел C_n^k при любых целочисленных значениях k ($0 \leqslant k \leqslant n$), решили *по определению* считать, что $0! = 1$. Тогда

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1,$$

что отлично согласуется с комбинаторным определением C_n^n.

При такой договоренности понятный смысл имеет и C_n^0; получается:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

Действительно, 0 элементов из n данных можно «выбрать» единственным способом, ничего не выбирая.

Следствия из теоремы 4

У теоремы 4 есть ряд важных следствий. Рассмотрим одно из них: *справедлива формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В самом деле,

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Как видите, числители в обоих случаях одинаковы, а в знаменателе множители меняются местами, что, естественно, не отражается на числовом значении выражения.

В чем польза полученной формулы? Представьте себе, что надо вычислить C_{15}^{13}. Если использовать равенство $C_{15}^{13} = C_{15}^{2}$, то вычисления упростятся: $C_{15}^{2} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105.$

Треугольник Паскаля

Для чисел C_n^k имеется красивый и удобный способ их записи в виде *треугольной таблицы* — ее называют *треугольником Паскаля*. Приведем эту таблицу:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Основная закономерность образования строк состоит в следующем: *каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке* ($5 = 1 + 4$, $10 = 4 + 6$; $6 = 3 + 3$ и т. д.). В общем виде (в виде формулы) это свойство записывается так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Например,

Например, C_6^4 можно вычислить непосредственно по пятой строке треугольника Паскаля: $C_6^4 = C_5^4 + C_5^3 = 5 + 10 = 15$.

Докажем, что $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$. Имеем

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!^{\,|n-k}}{k!\cdot(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!^{\,|k}}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Для учителя математики

В § 52, формально, приведены сведения об использовании двух, пожалуй наиболее знакомых большинству учителей, комбинаторных формул:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ и } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Во многих УМК для школы при изложении этого учебного материала авторы выбирают стиль, близкий к справочной литературе. А именно, кратко формулируют определения того, что именно обозначается символами C_n^k и A_n^k, сообщают две приведенные выше формулы и дают несколько примеров их использования. Нет сомнений, что это самый короткий путь к использованию указанных формул при решении задач. Зачастую такой комбинаторный «ликбез» проводится и в 9 классе, а в некоторых УМК даже и в 7 классе.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

На наш взгляд, использование формульной комбинаторики в основной школе по меньшей мере неразумно: у учеников просто нет привычки рассуждать в комбинаторном стиле и использовать «буквы с двумя индексами». В учебнике «Алгебра—9» приведена только формула $P_n = n!$ для числа перестановок. При этом она сообщена не в виде аксиомы с последующими примерами ее использования. Наоборот, мы движемся от частного к общему. И само понятие факториала, и формулу $P_n = n!$ мы приводим только после решения нескольких разных по виду задач, которые оказываются родственными по способу их решения. В учебнике для 10—11 классов мы, во-первых, повторяем примеры, иллюстрирующие появление формулы $P_n = n!$ в качестве еще одного применения правила умножения. Затем, тоже начиная с конкретных примеров, мы приходим к формулам о выборе *двух* элементов из n данных:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ и } A_n^2 = n(n-1).$$

При этом мы сначала получаем правые части этих равенств, а левые *по определению* есть просто сокращения излишне длинных словесных оборотов «число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных» и «число всех выборов двух элементов с учетом их порядка из n данных». После этого по аналогии вводятся символы C_n^k и A_n^k и доказывается теорема о том, что $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ и $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Доказательство основано (опять!) на правиле умножения. По нему сразу получается, что $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, а тот факт, что правая часть этого равенства совпадает с $\frac{n!}{(n-k)!}$, проверяется отдельно. Формулы $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$ или $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ также выводим из правила умножения: сначала k элементов из n данных выбираются «кучей» (получается C_n^k способов), а потом выбранные k элементов произвольно упорядочиваются (получается P_k способов).

Тем самым в §52 мы постепенно переходим от знакомого материала (факториалы и перестановки) к новому (сочетания и размещения), постоянно опираясь на базовое для элементарной комбинаторики правило умножения. Треугольник Паскаля появляется в самом конце §52. Никаких серьезных теоретических сведений о треугольнике Паскаля мы не сообщаем: для данного УМК хватает того, что это очень красивая и удобная в использовании таблица для хранения чисел C_n^k.

Источники

- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Часть 1. Учебник, 10-е изд. (Базовый уровень), А.Г.Мордкович, М., 2009
- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. (Базовый уровень) Методическое пособие для учителя, А.Г. Мордкович, П.В.Семенов, М., 2010
- Таблицы составлены в MS Word и MS Excel.
- Интернет-ресурсы