

8.3. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производная функции может быть найдена по
схеме:



*Дадим аргументу x приращение Δx и
найдем значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$*

2

Находим приращение функции
 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3

Составляем отношение: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

4

Находим $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ПРИМЕР.

Найдем производную функции $y = x^3$



1

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем значение функции $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$



2

Находим приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= \cancel{x^3} + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x^3} =$$
$$= \Delta x(3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2)$$

 3

Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2$$

4

Находим $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$$

$0 \qquad 0$

Полученный результат является частным случаем производной от степенной функции

$$y = x^n$$

Можно показать, что в общем случае

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

***ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННОЙ
ФУНКЦИИ***

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1

Производная постоянной величины равна 0:

$$C' = 0 \quad (C = \text{const})$$

2

Производная аргумента равна 1:

$$x' = 1$$

*Производная алгебраической суммы
(разности) конечного числа
дифференцируемых функций равна сумме
(разности) производных этих функций:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ -дифференцируемые функции.

Найдем производную функции $y=u + v$.

Дадим аргументу x приращение Δx , не равное 0 , тогда функции получат значения $u+\Delta u$, $v+\Delta v$.

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$


Находим приращение функции

$$\Delta y = \cancel{u} + \Delta u + \cancel{v} + \Delta v - \cancel{u} - \cancel{v} = \Delta u + \Delta v$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$

Находим предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} = u' + v'$$


Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - дифференцируемые функции.

Найдем производную функции $y=uv$.

Дадим аргументу x приращение Δx , не равное 0 , тогда функции получат значения $u+\Delta u$, $v+\Delta v$.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

Находим приращение функции

$$\begin{aligned}\Delta y &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = \\ &= \cancel{u \cdot v} + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - \cancel{u \cdot v} = \\ &= u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v\end{aligned}$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x$$

Находим предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x =$$

0

u' v' u' v'

Имеем по определению производной:

$$= u' \cdot v + v' \cdot u + u' \cdot v' \cdot 0 = u' \cdot v + v' \cdot u$$



Следствие 1.

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

Следствие 2.

Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + v' \cdot u \cdot w + w' \cdot u \cdot v$$

Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

ПРИМЕРЫ.



Найти производную функции

$$y = 15 \cdot (x^4 - 1)$$

и вычислить ее значение в точке $x=1$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{15'}_0 \cdot (x^4 - 1) + 15 \cdot (x^4 - 1)' = \\ &= 15 \cdot (4x^3) = 60x^3 \end{aligned}$$

Находим значение производной в точке $x=1$:

$$y'(1) = 60 \cdot 1^3 = 60$$



Найти производную функции

$$y = x^3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)$$

и вычислить ее значение в точке $x=1$.

Решение.

$$y' = (x^3)' \cdot (\sqrt[4]{x} + 1) + x^3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)' =$$

$$= 3x^2 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1) + \frac{1}{4} \cdot x^3 \cdot x^{-\frac{3}{4}} =$$

$$= 3x^{\frac{9}{4}} + 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{9}{4}} = \frac{13}{4} x^{\frac{9}{4}} + 3x^2$$

Находим значение производной в точке $x=1$:

$$y'(1) = \frac{13}{4} \cdot 1^{\frac{9}{4}} + 3 \cdot 1^2 = \frac{25}{4}$$



Найти производную функции

$$y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}}$$

и вычислить ее значение в точке $x=1$.

Решение.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x^3 - 1)' \cdot \sqrt{x} - (x^3 - 1) \cdot (\sqrt{x})'}{x} = \\&= \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x} - (x^3 - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \\&= \frac{3x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}\end{aligned}$$

Находим значение производной в точке $x=1$:

$$y'(1) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 1^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}}}{1} = 3$$