8.3. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производная функции может быть найдена по схеме:

1

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем значение функции $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$

2

Находим приращение функции
$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

3

Составляем отношение: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

4

Находим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

ПРИМЕР.

Найдем производную функции $y = x^3$

1 **Дадим аргументу *x* приращение *Δx* и найдем значение функции *y+Δy*:**

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$

2 **Находим приращение функции**

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= \cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x^3} =$$

$$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

3 **Составляем отношение** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

4 **Находим** $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + \underbrace{3x\Delta x}_{0} + \underbrace{\Delta x^2}_{0}) = 3x^2$$

Полученный результат является частным случаем производной от степенной функции

$$y = x^n$$

Можно показать, что в общем случае

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

производная степенной функции

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1

Производная постоянной величины равна 0:

$$C' = 0 \quad (C = const)$$

2

Производная аргумента равна 1:

$$x' = 1$$

3

Производная алгебраической суммы (разности) конечного числа дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть ***u=u(x)*** **и** ***v=v(x)*** **-дифференцируемые функции.**

Найдем производную функции ***y=u + v.***

Дадим аргументу ***x*** **приращение** ***Δx,*** **не равное** ***0,*** **тогда функции получат значения** ***u+Δu, v+Δv.***

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

Находим приращение функции

$$\Delta y = \cancel{u} + \Delta u + \cancel{v} + \Delta v - \cancel{u} - \cancel{v} = \Delta u + \Delta v$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$

Находим предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} = u' + v'$$

4

Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть ***u=u(x)*** **и** ***v=v(x)*** **-дифференцируемые функции.**

Найдем производную функции ***y=uv.***

Дадим аргументу ***x*** **приращение** ***Δx,*** **не равное** ***0,*** **тогда функции получат значения** ***u+Δu, v+Δv.***

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

Находим приращение функции

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v =$$

$$= \cancel{u \cdot v} + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - \cancel{u \cdot v} =$$

$$= u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta x$$

Находим предел этого отношения:

$$y' = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} \cdot v + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} \cdot u + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{0} =$$

Имеем по определению производной:

$$= u' \cdot v + v' \cdot u + u' \cdot v' \cdot 0 = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Следствие 1.

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

Следствие2.

Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + v' \cdot u \cdot w + w' \cdot u \cdot v$$

5

Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

ПРИМЕРЫ.

1

Найти производную функции

$$y = 15 \cdot (x^4 - 1)$$

и вычислить ее значение в точке x=1.

Решение.

$$y' = \underbrace{15'}_{0} \cdot (x^4 - 1) + 15 \cdot (x^4 - 1)' =$$

$$= 15 \cdot (4x^3) = 60x^3$$

Находим значение производной в точке *x=1*:

$$y'(1) = 60 \cdot 1^3 = 60$$

2

Найти производную функции

$$y = x^3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)$$

и вычислить ее значение в точке x=1.

Решение.

$$y' = \left(x^3\right)' \cdot (\sqrt[4]{x}+1) + x^3 \cdot (\sqrt[4]{x}+1)' =$$

$$= 3x^2 \cdot (\sqrt[4]{x}+1) + \frac{1}{4} \cdot x^3 \cdot x^{-\frac{3}{4}} =$$

$$= 3x^{\frac{9}{4}} + 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{9}{4}} = \frac{13}{4} x^{\frac{9}{4}} + 3x^2$$

Находим значение производной в точке *x=1*:

$$y'(1) = \frac{13}{4} \cdot 1^{\frac{9}{4}} + 3 \cdot 1^2 = \frac{25}{4}$$

3

Найти производную функции

$$y=\frac{x^3-1}{\sqrt{x}}$$

и вычислить ее значение в точке x=1.

Решение.

$$y' = \frac{\left(x^3-1\right)' \cdot \sqrt{x} - (x^3-1)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{x} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x} - (x^3-1)\cdot \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} =$$

$$= \frac{3x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

Находим значение производной в точке *x=1*:

$$y'(1) = \frac{\frac{5}{2}\cdot 1^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{1}{2}}}{1} = 3$$