23.11.2021

ТЕМА УРОКА:

Определенный интеграл.

ПОВТОРЕНИЕ:

Неопределенный интеграл

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ:

Домашняя работа

10.30 по теореме $k=4$

$$\int \frac{dx}{(4x+3)^5} = \int (4x+3)^{-5}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(4x+3)^{-4}}{-4} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(4x+3)^{-4} = -\frac{1}{16}\cdot(4x+3)^{-4} =$$

$$\boxed{-\frac{1}{16(4x+3)^4}}$$

10.34

$$\int \frac{x^2\,dx}{2x^3+5} = \int \frac{\frac{dt}{6}}{t} = \frac{1}{6}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\cdot\ln|t| + C =$$

Замена: $x^2dx = \frac{dt}{6}$

$2x^3+5 = t$

$(2x^3+5)'dx = dt$

$6x^2\,dx = dt$

$$\boxed{\frac{1}{6}\cdot\ln|2x^3+5| + C}$$

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ:

№ 10.36

$$\int \sqrt[3]{2+\cos 3x}\,\sin 3x\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{Замена} \\ t = 2+\cos 3x \\ dt = -3\sin 3x\,dx \\ \sin 3x\,dx = \dfrac{dt}{-3} \end{array}\right| =$$

$$= \int \sqrt[3]{t}\cdot\frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}\,dt = (\text{№ } 10.7)$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot t^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(2+\cos 3x)^4} + C$$

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ:

$$\int (6x^3 - 3x^2 + 2x - 5)\,dx =$$

$$\int 6x^3 - \int 3x^2 + \int 2x - \int 5\,dx =$$

$$6\int x^3 - 3\int x^2 + 2\int x - 5x + C = \frac{6x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 5x + C$$

$$= \boxed{\frac{3x^4}{2} - x^3 + x^2 - 5x + C}$$

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2}\right) dx =$$

$$\int 3\sqrt{x} - \int \frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2}\,dx = 3\int x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}\int x^{\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}} + C$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{2+3x-x^4}{x}dx$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int 3^x \cdot 4^{2x}\,dx$

Найти интегралы:

10.28. $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$.

10.30. $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$.

10.32. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

10.34. $\int \frac{x^2 dx}{2x^3+5}$.

10.36. $\int \sqrt[3]{2+\cos 3x} \sin 3x \, dx$.

10.38. $\int e^x \sqrt{2+5e^x} \, dx$.

23.11.2021

ТЕМА УРОКА:

Определенный интеграл.

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ и $F(x)$ — *любая первообразная для* $f(x)$ на $[a, b]$. *Тогда определенный интеграл от функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$ *равен приращению первообразной* $F(x)$ *на этом отрезке, т.е.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

▷ **Пример 11.2.** Вычислить: а) $\int\limits_0^1 x^2 dx$; б) $\int\limits_1^2 2^{3x-4} dx$.

Р е ш е н и е. а) Произвольная первообразная для функции $f(x) = x^2$ имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Для нахождения интеграла по формуле Ньютона—Лейбница возьмем такую первообразную, у которой $C = 0$ (см. замечание выше). Тогда

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

что совпадает, конечно, с результатом, полученным в примере **11.1.**

б) Первообразную подынтегральной функции найдем, используя формулу (10.9). Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int\limits_1^2 2^{3x-4} dx = \left.\left(\frac{1}{3\ln 2} 2^{3x-4}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left.\left(2^{3x-4}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2}. \blacktriangleright$$

Основные свойства определенного интеграла

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*, т.е.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \qquad \textbf{(11.4)}$$

где α — некоторое число.

2. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций*, т.е.

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \qquad \textbf{(11.5)}$$

3. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей*, т.е. при любых a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad \textbf{(11.6)}$$

Вычислить определенный интеграл

а) $\int_{-1}^{3} (x^3 - 2x - 3)\,dx$

б) $\int_{1}^{2} \left(x - \frac{1}{x} + 4\right) dx$

в) $\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{3x^2 - 1} =$

Свойства логарифмов

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_x a \cdot b = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x a^t = t \cdot \log_x a$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1)ВЫЧИСЛИТЬ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ:

$$\int_0^1 (2x - x^3)dx$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x+1}$$