

23.11.2021

ТЕМА УРОКА:

Определенный интеграл.

ПОВТОРЕНИЕ:

Неопределенный интеграл

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ:

Домашняя работа

10.30

по таблице $k=4$

$$\int \frac{dx}{(4x+3)^5} = \int (4x+3)^{-5} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+3)^{-4}}{-4} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) (4x+3)^{-4} = -\frac{1}{16} (4x+3)^{-4} =$$

$$\boxed{-\frac{1}{16(4x+3)^4}}$$

10.34

$$\int \frac{x^2 dx}{2x^3+5} = \int \frac{\frac{db}{6}}{t} = \frac{1}{6} \int \frac{db}{t} = \frac{1}{6} \cdot \ln|t| + C =$$

Замена: $x^2 dx = \frac{db}{6}$
 $2x^3+5 = t$
 $(2x^3+5)' dx = db$
 $6x^2 dx = db$

$$\boxed{\frac{1}{6} \cdot \ln|2x^3+5| + C}$$

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ:

№ 10.36

$$\int \sqrt[3]{2 + \cos 3x} \sin 3x dx = \left. \begin{array}{l} \text{замена} \\ t = 2 + \cos 3x \\ dt = -3 \sin 3x dx \\ \sin 3x dx = \frac{dt}{-3} \end{array} \right\} =$$
$$= \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \textcircled{\text{10.7}}$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot t^{\frac{4}{3}} + C =$$
$$= -\frac{1}{4} \sqrt[3]{t^4} + C = -\frac{1}{4} \sqrt[3]{(2 + \cos 3x)^4} + C$$

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ:

$$\int (6x^3 - 3x^2 + 2x - 5) dx =$$
$$\int 6x^3 - \int 3x^2 + \int 2x - \int 5 dx =$$
$$6 \int x^3 - 3 \int x^2 + 2 \int x - 5x + C = \frac{6x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 5x + C$$
$$= \left[\frac{3x^4}{2} - x^3 + x^2 - 5x + C \right]$$
$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{5} \sqrt[3]{x^2} \right) dx =$$
$$\int 3\sqrt{x} - \int \frac{2}{5} \sqrt[3]{x^2} dx = 3 \int x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5} \int x^{\frac{2}{3}} dx =$$
$$\frac{3 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + C$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{2 + 3x - x^4}{x} dx$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int 3^x \cdot 4^{2x} dx$

Найти интегралы:

$$10.28. \int \frac{dx}{e^{2x-1}}.$$

$$10.30. \int \frac{dx}{(4x+3)^5}.$$

$$10.32. \int \frac{dx}{\sqrt{2-x}}.$$

$$10.34. \int \frac{x^2 dx}{2x^3+5}.$$

$$10.36. \int \sqrt[3]{2+\cos 3x} \sin 3x dx.$$

$$10.38. \int e^x \sqrt{2+5e^x} dx.$$

23.11.2021

ТЕМА УРОКА:

Определенный интеграл.

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

▷ **Пример 11.2.** Вычислить: а) $\int_0^1 x^2 dx$; б) $\int_1^2 2^{3x-4} dx$.

Решение. а) Произвольная первообразная для функции $f(x) = x^2$ имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Для нахождения интеграла по формуле Ньютона—Лейбница возьмем такую первообразную, у которой $C = 0$ (см. замечание выше). Тогда

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

что совпадает, конечно, с результатом, полученным в примере 11.1.

б) Первообразную подынтегральной функции найдем, используя формулу (10.9). Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_1^2 2^{3x-4} dx = \left(\frac{1}{3 \ln 2} 2^{3x-4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3 \ln 2} \left(2^{3 \cdot 2 - 4} \right) - \frac{1}{3 \ln 2} \left(2^{3 \cdot 1 - 4} \right) = \frac{1}{3 \ln 2} \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6 \ln 2}. \blacktriangleright$$

Основные свойства определенного интеграла

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.*

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad (11.4)$$

где α — некоторое число.

2. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \quad (11.5)$$

3. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. при любых a, b, c :*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (11.6)$$

Вычислить определенный интеграл

a) $\int_{-1}^3 (x^3 - 2x - 3) dx$

б) $\int_1^2 (x - \frac{1}{x} + 4) dx$

в) $\int_1^2 \frac{x dx}{3x^2 - 1} =$

Свойства логарифмов

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_x a \cdot b = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x a^t = t \cdot \log_x a$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1) ВЫЧИСЛИТЬ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ:

$$\int_0^1 (2x - x^3) dx$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x + 1}$$