

департамент «Энергетика, металлургия и
информационные технологии»

**Слайд-лекция по дисциплине:
«Автоматизация металлургического
производства»**

Лекция 6: Математические основы ТАУ

Для студентов специальности БВ070900
(продолжение)
«Металлургия»

Разработала: старший преподаватель, магистр
Шупеева Ш.М.

Лекция 6. Математические основы ТАУ (продолжение).

План лекции:

1. Дифференциальные уравнения
 2. Передаточные функции
 3. Временные характеристики
 4. Частотные характеристики.
-

1. Дифференциальные уравнения.

Существуют следующие формы математического описания динамических свойств линейных звеньев и систем:

1. дифференциальные уравнения
 2. передаточные функции
 3. временные характеристики
 4. частотные характеристики.
-

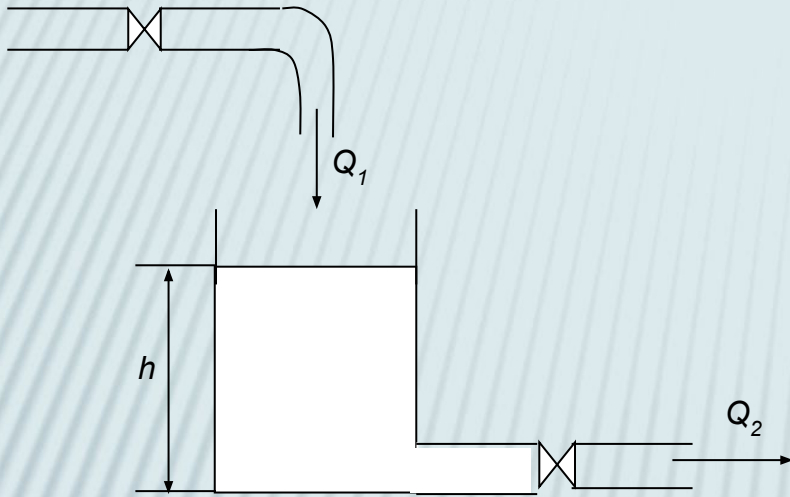
1. Дифференциальные уравнения.

Математическая связь между выходной и входной величинами и их производными по времени для большинства тепловых объектов и промышленных регуляторов составляется на основе общих законов термодинамики, гидравлики, электротехника и приближенно может быть описана с помощью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\dot{a}_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dot{a}_0 y(t) = b_0 x(t) \quad (1)$$

1. Дифференциальные уравнения.



В качестве примера составим дифференциальное уравнение для системы: в бак поступает жидкость в количестве Q_1 и расходуется в количестве Q_2 .

Равновесие системы характеризуется равенством притока и расхода, т.е. $Q_1 = Q_2$ или $Q_1 - Q_2 = 0$, а также отсутствием отклонения уровня от заданного значения, т.е. $\Delta h = 0$.

За время Δt количество жидкости в баке изменится на величину $\Delta V = S \cdot \Delta h$.

С другой стороны равновесие объекта будет определяться выражением $Q_1 \cdot \Delta t = Q_2 \cdot \Delta t$ или $(Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t = 0$

1. Дифференциальные уравнения.

На основе этого можно составить уравнение материального баланса для данной системы:

$$S \cdot \Delta h = (Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t .$$

Разделим на Δt

$$S \frac{\Delta h}{\Delta t} = Q_1 - Q_2$$

При $\Delta t \rightarrow 0$:

$$S \frac{dh}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t)$$

Приток Q_1 от уровня не зависит, а расход Q_2 зависит, причем

$$Q_2 = \alpha \sqrt{h}$$

где α - коэффициент расхода.

1. Дифференциальные уравнения.

При малых отклонениях Δh можно нелинейную зависимость заменить линейной, т.е. $Q_2(t) \approx \alpha \cdot h(t)$, тогда

$$S \frac{dh}{dt} = Q_1(t) - \alpha \cdot h(t)$$

$$S \frac{dh}{dt} + \alpha \cdot h(t) = Q_1(t)$$

Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка (апериодическое звено 1-го порядка)

1. Дифференциальные уравнения.

Если при составлении уравнений системы принимаются во внимание все факторы, влияющие на динамику процесса управления, то уравнения получаются сложными, и в большинстве случаев нелинейными. Поэтому для аналитического решения задач в общем виде иногда приходится заменять нелинейные уравнения приближенными линейными. Такая операция называется **линеаризацией**.

Основой линеаризации уравнений является выдвинутое И.А. Вышнеградским предположение, что в течение всего процесса регулирования имеют место лишь незначительные отклонения всех изменяющихся величин от их установившихся значений (метод малых отклонений). Вводя в нелинейные уравнения процесса управления не абсолютные значения переменных (x), а их отклонения (Δx), удастся перейти к линейным уравнениям в приращениях. Тогда в общем случае диф. уравнение системы выглядит следующим образом:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x$$

(2)

2. Передаточные функции.

Линейные дифференциальные уравнения САУ решаются различными методами, но для решения задач в ТАУ наиболее удобным является операционный метод решения, основанный на функциональном преобразовании Лапласа:

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt \quad Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

(интеграл Лапласа)

где $Y(p)$, $Y(s)$ – изображение функции $y(t)$;

$y(t)$ – оригинал функции $Y(p)$, $Y(s)$.

2. Передаточные функции.

Существует прямое и обратное преобразование Лапласа:

прямое – операция перехода от исходной функции $y(t)$ к ее изображению $Y(p)$;

обратное – переход от изображения $Y(p)$ к оригиналу $y(t)$.

Символ « p » или « s » означает операцию дифференцирования:

$p = s = \frac{d}{dt}$ - **алгебраизированный оператор Лапласа.**

Если умножаем $y(t)$ на p , то это будет означать ее дифференцирование, если делим $y(t)$ на p – интегрирование, с учетом преобразования Лапласа:

$$\frac{dy(t)}{dt} = pY(p)$$

$$\int_0^t y(t)dt = \frac{Y(p)}{p}$$

2. Передаточные функции.

С учетом этого уравнение (1) может быть переписано иначе

$$Y(p) \left(\frac{a_1}{a_0} \delta + 1 \right) = \frac{b_0}{a_0} \tilde{O}(D) \quad (3)$$

Аналогично могут быть записаны дифференциальные уравнения более высокого порядка, имеющие производные в правой части. Тогда для системы:

$$a_0 p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + a_n Y(p) = b_0 p^m X(p) + b_1 p^{m-1} X(p) + \dots + b_m X(p) \quad (4)$$

Такая форма записи уравнений носит название **операторной** и обычно используется при составлении уравнений систем или звеньев.

2. Передаточные функции.

Вынеся за скобки $Y(p)$ слева и $X(p)$ справа и разделив $Y(p)$ на $X(p)$ получим:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (5)$$

Отношение изображения выходной величины к изображению входной величины называется **передаточной функцией** (оператором) звена (группы звеньев, системы).

Для выражения (3):

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 / a_0}{\frac{a_1}{a_0} p + 1} \quad (6)$$

3. Временные характеристики.

Временной характеристикой называется зависимость изменения выходной величины от входной во времени

$$y(t) = f [x(t)]$$

Одной из наиболее часто применяемых форм описания динамических свойств элементов САУ является **кривая** (характеристика) **разгона**.

Кривой разгона называют зависимость изменения выходной величины во времени $y(t)$ при нанесении на вход исследуемого объекта однократного воздействия ступенчатой формы $x_0(t) = A$ или $y(t) = f [x(t)]$ при $x(t) = A$. При построении кривой разгона по горизонтальной оси откладывается время, а по вертикальной оси – выходная величина.

Временные характеристики будут подробнее рассмотрены при изучении динамических характеристик.

4. Частотные характеристики.

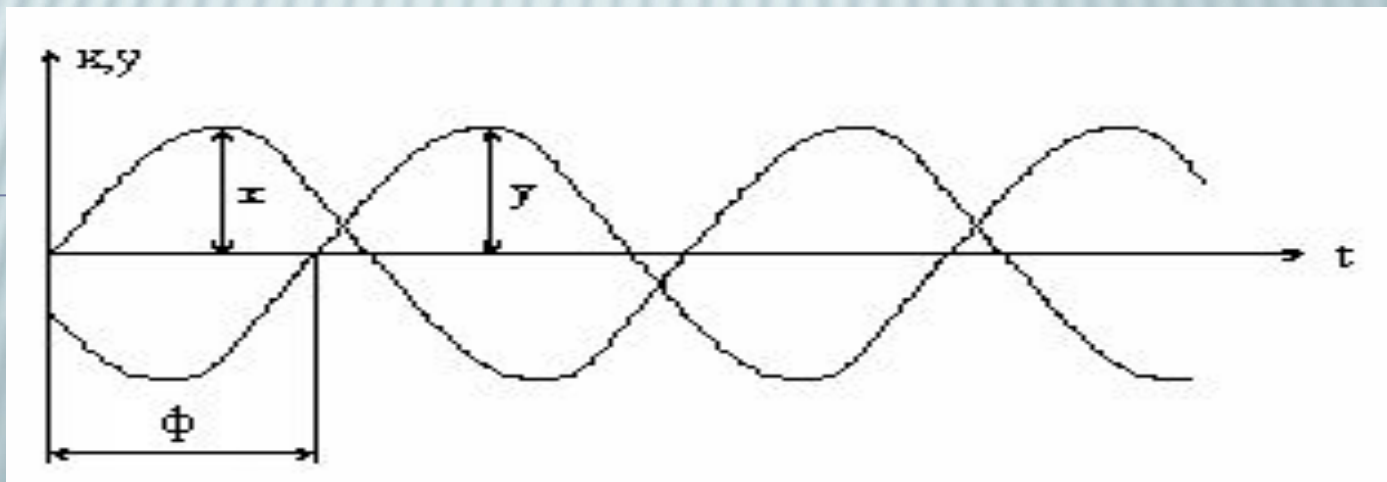
Определяются путем приложения к входу звена возмущающего воздействия синусоидальной формы, например, перемещением регулирующего органа исследуемого объекта по закону:

$$x(t) = X_m \sin \omega t,$$

где X_m - амплитуда колебаний входного сигнала;

$\omega = 2\pi/T$ – его угловая частота, имеющая размерность [рад/с] или [рад/мин].

T – период колебаний, [с] или [мин].



4. Частотные характеристики.

При установившихся колебаниях x , если звено или объект являются линейными, сигнал на его выходе также изменяется по синусоидальному закону с той же частотой ω , но с другой амплитудой и фазой:

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \phi),$$

минус пишется, если входные колебания опережают выходные.
где ϕ - сдвиг по фазе.

Y_m - амплитуда выходных колебаний.

Гармонические колебания можно представить, используя комплексные числа, тогда:

1) в показательной форме

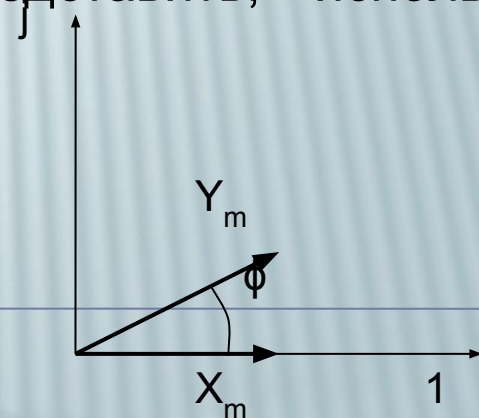
$$x = X_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad y = Y_m e^{j(\omega t + \phi)},$$

где $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$,

$\cos \omega t$ – вещественная часть;

$\sin \omega t$ – мнимая часть.

На комплексной плоскости это можно представить следующим образом:



2. Формы математического описания.

2) в тригонометрической форме: $x = X_m \cos \omega t + jX_m \sin \omega t$

$$y = Y_m \cos(\omega t + \varphi) + jY_m \sin(\omega t + \varphi)$$

3) в алгебраической форме: $x = \mathcal{P} + j\mathcal{Q}$ $y = P + jQ$

Вернемся к понятию передаточной функции, только произведем замену $p=j\omega$, тогда

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \overset{\text{комплексная}}{K(j\omega)} \underset{\text{частотная характеристика}}{\text{ (комплексный коэффициент усиления)}}$$

4. Частотные характеристики.

Используя показательную форму, получим:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y_m e^{j(\omega t + \varphi)}}{X_m e^{j\omega t}} = \frac{Y_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}}{X_m e^{j\omega t}} = \frac{Y_m}{X_m} e^{j\varphi} = A(\omega) e^{j\varphi}$$

где $A(\omega)$ - амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ),

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{Y_m}{X_m} = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$A(\omega)$ - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

АЧХ - зависимость отношения амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного от частоты колебаний входного гармонического сигнала;

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \pm \begin{cases} 0, & P(\omega) > 0 \\ \pi, & P(\omega) < 0 \end{cases}$$

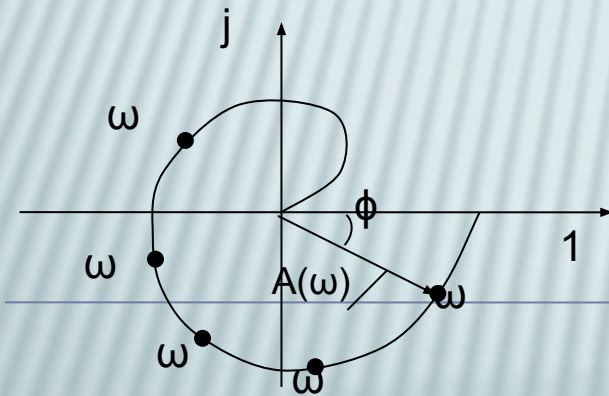
$\varphi(\omega)$ - фазо-частотная характеристика (ФЧХ) - зависимость сдвига фаз между выходным и входным сигналами от частоты колебаний гармонического сигнала.

4. Частотные характеристики.

Значение частотной функции можно представить в виде вектора на комплексной плоскости. При этом каждой частоте будет соответствовать определенное значение амплитуды и фазы. При непрерывном изменении частоты конец вектора описывает на комплексной плоскости некоторую кривую, называемую **годографом**.

Годограф – это геометрическое место точек конца вектора комплексного коэффициента усиления на комплексной плоскости при изменении частоты ω от 0 до ∞ .

Значения частот откладываются непосредственно на годографе, который является АФЧХ. Для определения модуля $A(\omega) = |K(j\omega)|$ и фазы ϕ комплексного коэффициента усиления на заданной частоте следует соответствующую точку годографа соединить прямой с началом координат. Длина полученного отрезка соответствует в определенном масштабе модулю, а фаза определяется углом, образованным этой прямой и положительной полуосью



Вопросы для самопроверки:

- 1) Назовите формы математического описания.
 - 2) Что такое линеаризация?
 - 3) В чем смысл оператора Лапласа?
 - 4) Напишите операторную форму математического описания САУ
 - 5) Что называется передаточной функцией?
 - 6) Перечислите виды частотных характеристик.
 - 7) Что такое годограф?
-

Проверим себя ?

1. Операция замены нелинейных уравнений системы приближенными линейными уравнениями называется ...

- A) линеаризацией;
- B) минимизацией;
- C) аппроксимацией;
- D) систематизацией;
- E) преобразованием Лапласа.

2. Преобразование Лапласа осуществляется следующим образом:

A) $\frac{d}{dt} = p$; D) ; $\frac{d^2}{dt^2} = p$

B) $dt = p$; E) $x(t) = p$.

C) $\int dt = p$;

Проверим себя ?

3. Передаточная функция – это ...

- A) отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при $f(x)=0$;
- B) отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при $f(x) \neq 0$;
- C) отношение изображения входной величины к изображению выходной величины при $f(x) \rightarrow \infty$;
- D) отношение изображения входной величины к изображению выходной величины при $f(x)=0$;
- E) зависимость между входной величиной и выходной величиной в переходном режиме.

4. На данном рисунке годограф обозначен под цифрой ...

- A) 4;
- B) 3;
- C) 2;
- D) 1;
- E) 5.

