ИННОВАЦИЯЛЫҚ ЕУРАЗИЯ УНИВЕРСИТЕТІ

ИННОВАЦИОННЫЙ ЕВРАЗИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

департамент «Энергетика, металлургия и информационные технологии»

Слайд-лекция по дисциплине: «Автоматизация металлургического производства»

Лекция 6: Математические основы ТАУ (продолжение)

Для студентов специальности 5В070900 «Металлургия»

Разработала: старший преподаватель, магистр Шупеева Ш.М.

Лекция 6. Математические основы ТАУ (продолжение).

План лекции:

1. Дифференциальные уравнения
2. Передаточные функции
3. Временные характеристики
4. Частотные характеристики.

1. Дифференциальные уравнения.

Существуют следующие формы математического описания динамических свойств линейных звеньев и систем:

1. дифференциальные уравнения
2. передаточные функции
3. временные характеристики
4. частотные характеристики.

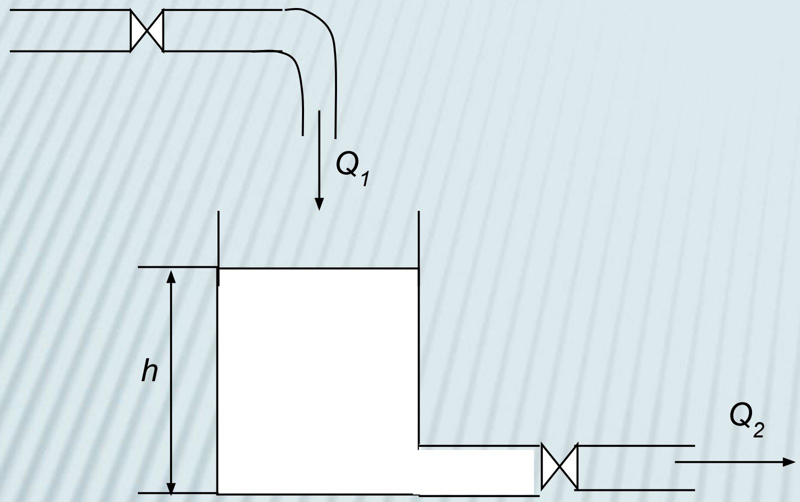
1. Дифференциальные уравнения.

Математическая связь между выходной и входной величинами и их производными по времени для большинства тепловых объектов и промышленных регуляторов составляется на основе общих законов термодинамики, гидравлики, электротехника и приближенно может быть описана с помощью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\grave{a}_1 \frac{dy(t)}{dt} + \grave{a}_0 \mathrm{y(t)} = \mathrm{b}_0 x(\mathrm{t}) \qquad (1)$$

1. Дифференциальные уравнения.



В качестве примера составим дифференциальное уравнение для системы: в бак поступает жидкость в количестве Q_1 и расходуется в количестве Q_2.

Равновесие системы характеризуется равенством притока и расхода, т.е. $Q_1 = Q_2$ или $Q_1 - Q_2 = 0$, а также отсутствием отклонения уровня от заданного значения, т.е. $\Delta h = 0$.

За время Δt количество жидкости в баке изменится на величину $\Delta V = S \cdot \Delta h$.

С другой стороны равновесие объекта будет определяться выражением $Q_1 \cdot \Delta t = Q_2 \cdot \Delta t$ или $(Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t = 0$

1. Дифференциальные уравнения.

На основе этого можно составить уравнение материального баланса для данной системы:

$$S \cdot \Delta h = (Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t .$$

Разделим на Δt

$$S \frac{\Delta h}{\Delta t} = Q_1 - Q_2$$

При $\Delta t \to 0$:

$$S \frac{dh}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t)$$

Приток Q_1 от уровня не зависит, а расход Q_2 зависит, причем

$$Q_2 = \alpha \sqrt{h}$$

где α - коэффициент расхода.

1. Дифференциальные уравнения.

При малых отклонениях Δh можно нелинейную зависимость заменить линейной, т.е. $Q_2(t) \approx \alpha \cdot h(t)$, тогда

$$S\frac{dh}{dt} = Q_1(t) - \alpha \cdot h(t)$$

$$S\frac{dh}{dt} + \alpha \cdot h(t) = Q_1(t)$$

Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка (апериодическое звено 1-го порядка)

1. Дифференциальные уравнения.

Если при составлении уравнений системы принимаются во внимание все факторы, влияющие на динамику процесса управления, то уравнения получаются сложными, и в большинстве случаев нелинейными. Поэтому для аналитического решения задач в общем виде иногда приходится заменять нелинейные уравнения приближенными линейными. Такая операция называется **линеаризацией**.

Основой линеаризации уравнений является выдвинутое И.А. Вышнеградским предположение, что в течение всего процесса регулирования имеют место лишь незначительные отклонения всех изменяющихся величин от их установившихся значений (метод малых отклонений). Вводя в нелинейные уравнения процесса управления не абсолютные значения переменных (x), а их отклонения (Δx), удается перейти к линейным уравнениям в приращениях. Тогда в общем случае диф. уравнение системы выглядит следующим образом:

$$a_o \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_o \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x \quad (2)$$

2. Передаточные функции.

Линейные дифференциальные уравнения САУ решаются различными методами, но для решения задач в ТАУ наиболее удобным является операционный метод решения, основанный на функциональном преобразовании Лапласа:

$$Y(p)=\int_0^{\infty} y(t)e^{-pt}\,dt$$

или

$$Y(s)=\int_0^{\infty} y(t)e^{-st}\,dt$$

– интеграл Лапласа

где Y(p), Y(s) – изображение функции y(t);

y(t) – оригинал функции Y(p), Y(s).

2. Передаточные функции.

Существует прямое и обратное преобразование Лапласа:

прямое – операция перехода от исходной функции y(t) к ее изображению Y(p);

обратное – переход от изображения Y(p) к оригиналу y(t).

Символ «p» или «s» означает операцию дифференцирования:

p = s = $\dfrac{d}{dt}$ - **алгебраизированный оператор Лапласа**.

Если умножаем y(t) на p, то это будет означать ее дифференцирование, если делим y(t) на p – интегрирование, с учетом преобразования Лапласа:

$$\frac{dy(t)}{dt} = pY(p)$$

$$\int_0^t y(t)dt = \frac{Y(p)}{p}$$

2. Передаточные функции.

С учетом этого уравнение (1) может быть переписано иначе

$$Y(p)\left(\frac{\grave{a}_1}{\grave{a}0}\,\eth+1\right)=\frac{b_0}{a_0}\,\tilde{O}(\text{Ð}) \qquad (3)$$

Аналогично могут быть записаны дифференциальные уравнения более высокого порядка, имеющие производные в правой части. Тогда для системы:

$$a_o p^n Y(p)+a_1 p^{n-1} Y(p)+\ldots+a_n Y(p)=b_o p^m X(p)+b_1 p^{m-1} X(p)+\ldots+b_m X(p) \qquad (4)$$

Такая форма записи уравнений носит название **операторной** и обычно используется при составлении уравнений систем или звеньев.

2. Передаточные функции.

Вынеся за скобки Y(p) слева и X(p) справа и разделив Y(p) на X(p) получим:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_o p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m}{a_o p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n} \qquad (5)$$

Отношение изображения выходной величины к изображению входной величины называется **передаточной функцией** (оператором) звена (группы звеньев, системы).

Для выражения (3):

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_o / a_o}{\dfrac{a_1}{a_o} p + 1} \qquad (6)$$

3. Временные характеристики.

Временной характеристикой называется зависимость изменения выходной величины от входной во времени

$$y(t) = f\,[x(t)]$$

Одной из наиболее часто применяемых форм описания динамических свойств элементов САУ является **кривая** (характеристика) **разгона**.

Кривой разгона называют зависимость изменения выходной величины во времени y(t) при нанесении на вход исследуемого объекта однократного воздействия ступенчатой формы $x_0(t) = A$ или $y(t) = f\,[x(t)]$ при $x(t) = A$. При построении кривой разгона по горизонтальной оси откладывается время, а по вертикальной оси – выходная величина.

Временные характеристики будут подробнее рассмотрены при изучении динамических характеристик.

4. Частотные характеристики.

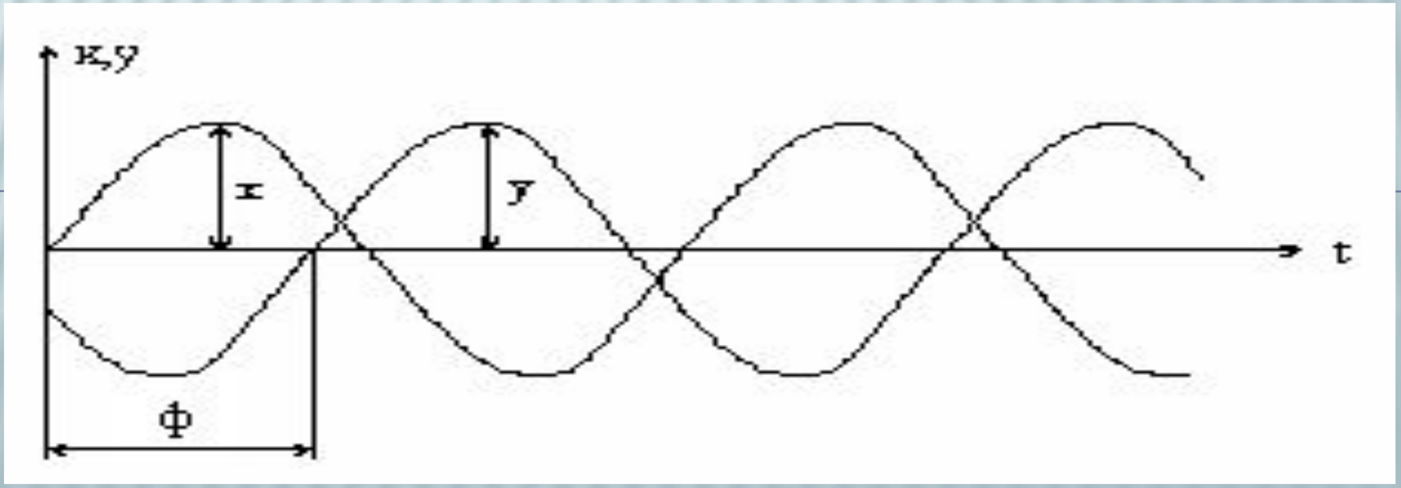
Определяются путем приложения к входу звена возмущающего воздействия синусоидальной формы, например, перемещением регулирующего органа исследуемого объекта по закону:

$$x(t) = X_m \sin \omega t,$$

где X_m - амплитуда колебаний входного сигнала;

$\omega = 2\pi/T$ – его угловая частота, имеющая размерность [рад/с] или [рад/мин].

T – период колебаний, [с] или [мин].



4. Частотные характеристики.

При установившихся колебаниях *x*, если звено или объект являются линейными, сигнал на его выходе также изменяется по синусоидальному закону с той же частотой ω, но с другой амплитудой и фазой:

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \phi),$$

минус пишется, если входные колебания опережают выходные.

где ϕ - сдвиг по фазе.

Y_m - амплитуда выходных колебаний.

Гармонические колебания можно представить, используя комплексные числа, тогда:

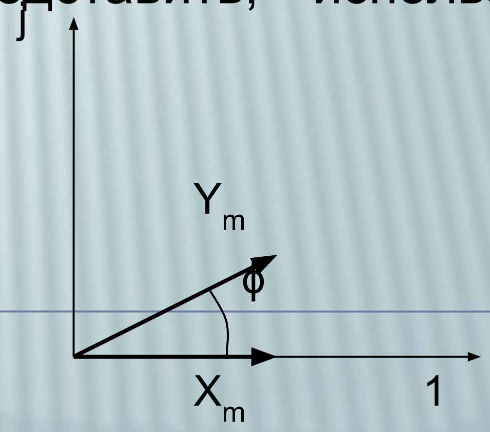
1) в показательной форме

$$x = X_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad y = Y_m e^{j(\omega t + \varphi)},$$

где $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$,

cos ωt – вещественная часть;

sin ωt – мнимая часть.



На комплексной плоскости это можно представить следующим образом:

2. Формы математического описания.

2) в тригонометрической форме: $x = X_m \cos \omega t + jX_m \sin \omega t$

$$y = Y_m \cos(\omega t + \varphi) + jY_m \sin(\omega t + \varphi)$$

3) в алгебраической форме: $x = P + jQ$ **и** $y = P + jQ$

Вернемся к понятию передаточной функции, только произведем замену p=jω, тогда

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \bar{K}(j\omega)$$

- **комплексная частотная характеристика (комплексный коэффициент усиления)**

4. Частотные характеристики.

Используя показательную форму, получим:

$$W(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{Y_m e^{j(\omega t+\varphi)}}{X_m e^{j\omega t}}=\frac{Y_m e^{j\omega t}e^{j\varphi}}{X_m e^{j\omega t}}=A(\omega)e^{j\varphi}$$

- **амплитудно-фазо-частотная характеристика (АФЧХ)**, где

$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\frac{Y_m}{X_m}=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}$$

- **амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)**

АЧХ - зависимость отношения амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного от частоты колебаний входного гармонического сигнала;

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\pm\begin{cases}0, & P(\omega)\geq 0\\ \pi, & P(\omega)<0\end{cases}$$

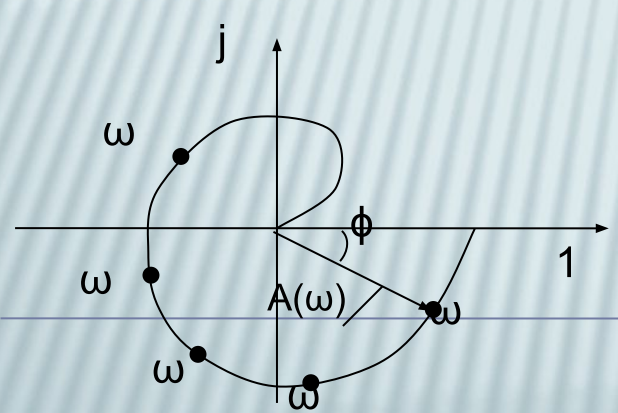
-**фазо-частотная характеристика (ФЧХ)**

ФЧХ - зависимость сдвига фаз между выходным и входным сигналами от частоты колебаний гармонического сигнала.

4. Частотные характеристики.

Значение частотной функции можно представить в виде вектора на комплексной плоскости. При этом каждой частоте будет соответствовать определенное значение амплитуды и фазы. При непрерывном изменении частоты конец вектора описывает на комплексной плоскости некоторую кривую, называемую **годографом.**

Годограф – это геометрическое место точек конца вектора комплексного коэффициента усиления на комплексной плоскости при изменении частоты ω от 0 до ∞.



Значения частот откладываются непосредственно на годографе, который является АФЧХ. Для определения модуля A(ω) = │K(jω)│ и фазы ϕ комплексного коэффициента усиления на заданной частоте следует соответствующую точку годографа соединить прямой с началом координат. Длина полученного отрезка соответствует в определенном масштабе модулю, а фаза определяется углом, образованным этой прямой и положительной полуосью

Вопросы для самопроверки:

1) Назовите формы математического описания.
2) Что такое линеаризация?
3) В чем смысл оператора Лапласа?
4) Напишите операторную форму математического описания САУ
5) Что называется передаточной функцией?
6) Перечислите виды частотных характеристик.
7) Что такое годограф?

Проверим себя ?

1. Операция замены нелинейных уравнений системы приближенными линейными уравнениями называется …

А) линеаризацией;

В) минимизацией;

С) аппроксимацией;

D) систематизацией;

Е) преобразованием Лапласа.

2. Преобразование Лапласа осуществляется следующим образом:

А) $\frac{d}{dt} = p$ *;*

D) $\frac{d^2}{dt^2} = p$ *;*

В) dt= p;

Е) x(t)=p.

С) $\int dt = p$ *;*

Проверим себя ?

3. Передаточная функция – это …

A) отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при f(x)=0;

B) отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при f(x)≠ 0;

C) отношение изображения входной величины к изображению выходной величины при f(x)→∞;

D) отношение изображения входной величины к изображению выходной величины при f(x)=0;

E) зависимость между входной величиной и выходной величиной в переходном режиме.

4. На данном рисунке годограф обозначен под цифрой …

A) 4;

B) 3;

C) 2;

D) 1;

E) 5.