

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КРУПИНА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

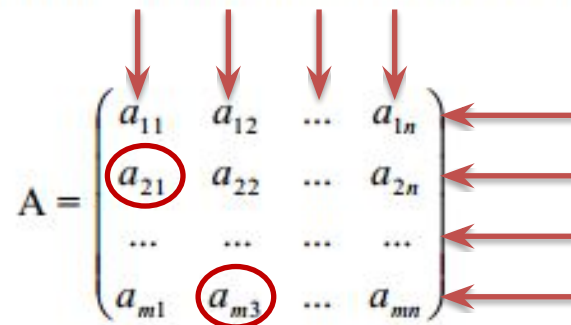
МОСКВА
2021

РАЗДЕЛ 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1.1 Матрицы и определители

Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$


Часто вместо подробной записи употребляют сокращенную: $A = (a_{ij})$.

Виды матриц

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов ($m = n$), то матрица называется *квадратной*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Число строк или число столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*.

Диагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы называется *главной диагональю*, а диагональ $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побочной диагональю*.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, которые находятся ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. треугольная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрицу A называют *верхнетреугольной*, а матрицу B – *нижнетреугольной*.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали, называется *диагональной* матрицей.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали, называется *диагональной* матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Среди квадратных матриц важную роль играет матрица вида:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая называется *единичной*. Для любой квадратной матрицы A имеют место равенства:

$$AE = EA = A$$

Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется *симметрической*.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** матрицей и обозначается:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Равенство матриц

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются **равными**, если совпадают их размеры и $a_{ij} = b_{ij}$ при любых i и j .

Транспонированная матрица

Наряду с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ часто приходится рассматривать

матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A (т.е. столбцы и строки меняются местами). Эта матрица называется *транспонированной* к A и обозначается через A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Действия с матрицами

1) *Умножение матрицы на число.* Для того чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число λ , нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

2) *Сложение матриц.* Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, т.е. матрицы одинаковых размеров. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для любых индексов i, j .

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

3) *Умножение матриц.* Произведение матрицы A на матрицу B (обозначается AB) определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . В результате умножения получим матрицу $C = AB$, у которой столько же строк, сколько их в матрице A , и столько же столбцов, сколько их в матрице B . Для удобства запоминания запишем это кратко:

$$AB=C$$
$$(m \times n)(n \times k) = m \times k$$

Если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = AB = (c_{ij})$, то элементы c_{ij} определяются следующим образом:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pj}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k.$$

Это правило можно сформулировать и словесно: элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы $C = AB$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B . Другими словами, элемент c_{ij} является результатом скалярного произведения i -й вектор-строки и j -го вектор-столбца.

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения квадратных матриц 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.1. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $AB \neq BA$.

Пример 1.2. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Определить размерность следующих матриц:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}, [2], \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [-1 \quad -2 \quad -3].$$

1.2. Какие из следующих матриц являются диагональными, верхними треугольными, нижними треугольными:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}?$$

1.3. Дана матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}$. Чему равны элементы b_{22}, b_{31}, b_{13} ?

1.4. Найти $A - 2B + 3C$, если:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 4 & 1 \\ -1/2 & 5/2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.5. Найти матрицу X из уравнения:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.6. Найти AB и установить, существует ли BA , если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 300 & 200 \\ 400 & -100 \\ 100 & -300 \\ 200 & 500 \end{bmatrix}.$$

1.7. Найти AB и BA , если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = [-1 \quad -4 \quad 0].$$

Сделать вывод о выполнении равенства $AB = BA$

