ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КРУПИНА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

МОСКВА
2021

РАЗДЕЛ 1
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1.1 Матрицы и определители

Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Часто вместо подробной записи употребляют сокращенную: $A = \left(a_{ij}\right)$.

Виды матриц

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов ($m = n$), то матрица называется ***квадратной***.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Число строк или число столбцов квадратной матрицы называется ее ***порядком***.

Диагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы называется ***главной диагональю***, а диагональ $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – ***побочной диагональю***.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все ее элементы, которые находятся ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. треугольная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрицу A называют *верхнетреугольной*, а матрицу B – *нижнетреугольной*.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали, называется ***диагональной*** матрицей.

Квадратная матрица, у которой отличны от нуля только элементы, расположенные на главной диагонали, называется ***диагональной*** матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Среди квадратных матриц важную роль играет матрица вида:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая называется ***единичной***. Для любой квадратной матрицы A имеют место равенства:

$$AE = EA = A$$

Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется ***симметрической***.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой*** матрицей и обозначается:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Равенство матриц

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются *равными*, если совпадают их размеры и $a_{ij} = b_{ij}$ при любых i и j.

Транспонированная матрица

Наряду с матрицей $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ часто приходится рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A (т.е. столбцы и строки меняются местами). Эта матрица называется *транспонированной* к A и обозначается через A^T:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Действия с матрицами

1) *Умножение матрицы на число.* Для того чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число λ, нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

2) *Сложение матриц.* Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, т.е. матрицы одинаковых размеров. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для любых индексов i, j.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

3) *Умножение матриц.* Произведение матрицы A на матрицу B (обозначается AB) определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получим матрицу $C = AB$, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B. Для удобства запоминания запишем это кратко:

$$AB=C$$
$$(m{\times}n)(n{\times}k)=m{\times}k$$

Если $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ и $C = AB = \left(c_{ij}\right)$, то элементы c_{ij} определяются следующим образом:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}b_{pj}, \quad \text{где } i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,k .$$

Это правило можно сформулировать и словесно: элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C = AB$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Другими словами, элемент c_{ij} является результатом скалярного произведения i-й вектор-строки и j-го вектор-столбца.

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения квадратных матриц 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.1. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & 4\cdot(-1) + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 4 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-2)\cdot 4 & 0\cdot 2 + (-2)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-2)\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 4 & 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot 3 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $AB \neq BA$.

Пример 1.2. Пусть $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. Тогда

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0,$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1\cdot 1+1\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 1\\ -1\cdot 1+1\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Определить размерность следующих матриц:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad [2], \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [-1 \quad -2 \quad -3].$$

1.2. Какие из следующих матриц являются диагональными, верхними треугольными, нижними треугольными:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}?$$

1.3. Дана матрица $B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}$. Чему равны элементы b_{22}, b_{31}, b_{13}?

1.4. Найти $A-2B+3C$, если:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 4 & 1 \\ -1/2 & 5/2 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.5. Найти матрицу X из уравнения:

а) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;　　б) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.6. Найти AB и установить, существует ли BA, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 300 & 200 \\ 400 & -100 \\ 100 & -300 \\ 200 & 500 \end{bmatrix}.$$

1.7. Найти AB и BA, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;　　б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;　　г) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

д) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

Сделать вывод о выполнении равенства AB = BA