Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

-

$$2x_1x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 - \text{нелинейная}$$

$$x_1^2 + 3x_2^3 + x_3 - x_4 = 8 - \text{нелинейная}$$

$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 - \text{линейная}$$

Общий вид СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Система n линейных уравнений с n неизвестными

•

$2x_1x_2 - 6x_3 + x_4 = 3$ – нелинейная

$x_1^2 +$ … йная

$x_1 +$ … ная

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Теорема Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Теорема Крамера

Доказательство. Зафиксируем i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Умножая первое уравнение системы на A_{1i}, второе на A_{2i}, третье на A_{3i}, …, *n-е* на A_{ni}, получаем систему вида

$$\begin{cases} a_{11}A_{1i}x_1 + a_{12}A_{1i}x_2 + \ldots + a_{1i}A_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}A_{1i}x_n = b_1A_{1i}, \\ a_{21}A_{2i}x_1 + a_{22}A_{2i}x_2 + \ldots + a_{2i}A_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}A_{2i}x_n = b_2A_{2i}, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}A_{ni}x_1 + a_{n2}A_{ni}x_2 + \ldots + a_{ni}A_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}A_{ni}x_n = b_nA_{ni}. \end{cases}$$

Теорема Крамера

$$(a_{11}A_{1i} + a_{21}A_{2i} + \ldots + a_{n1}A_{ni})x_1 + (a_{12}A_{1i} + a_{22}A_{2i} + \ldots + a_{n2}A_{ni})x_2 + \ldots +$$

$$+ (a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni})x_i + \ldots + (a_{1n}A_{1i} + a_{2n}A_{2i} + \ldots + a_{nn}A_{ni})x_n =$$

$$= b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}.$$

$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 - \text{линейная}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Пример: Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad x_2 - x_3 = -3, \end{cases}$

по формулам Крамера.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

значит система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -22,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2.$$

Решение СЛАУ в матричной форме

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Составим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} = B$$

$A \cdot X = B$ - матричная форма

Система записана в матричной форме

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

пример

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{11} = -3, A_{12} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -36 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 4, \; x_2 = 1.$

Ранг матрицы

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 4 = 28,$ $\qquad$ r(A)=3

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 7 = 0,$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$ $\qquad$ r(B)=2 пример

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

Терема Кронекера-Капелли

СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Метод Гаусса-Жордана

СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Метод Гаусса-Жордана

-

$$2x_1x_2 - 6x_3 + x_4 = 3 - \text{нелинейная}$$

$$x_1^2 + 3x_2^3 + x_3 - x_4 = 8 - \text{нелинейная}$$

$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 - \text{линейная}$$

Пример: Решить СЛАУ методом Гаусса-Жордана

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \overset{[1]+[2]\to[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \overset{[1]\cdot(-2)\to[1]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & -14 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{[1]+[3]\to[3]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & -14 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & -3 & -10 \end{array}\right) \overset{[3]\cdot(3)\to[3]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & -14 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ -3 & 0 & -9 & -30 \end{array}\right) \overset{[3]+[2]\to[3]}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -2 & -14 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right) \overset{\substack{[3]/(-7)\to[3] \\ [1]/(-2)\to[1]}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

т.о. используя элементарные преобразования, мы получаем следующее:

$z = 3$;
$3x + 2z = 9$, $x = 1$,
$2x + y + z = 7$, $y = 2$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. ▲

Пример.

Методом **Гаусса** решить систему:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем расширенную матрицу системы, взяв в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения ($\boldsymbol{a_{21}}$ = 1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \Rightarrow r = 2.$$

Оставляем в левой части переменные $\boldsymbol{x_1, x_2}$, которые берем за базисные (базисный минор – $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$).

Получаем систему

Общее решение системы
$$\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2 \right)$$