Домашнее задание

ОПЕРАТОРЫ

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.4. Матрицей линейного оператора f в базисе e_1, e_2, e_3 некоторого линейного пространства является матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $\mathbf{B}$ этого оператора в базисе

$$\begin{aligned} e'_1 &= 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ e'_2 &= 3e_1 + 4e_2 + e_3, \\ e'_3 &= e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

Задача 9.5. Матрицей линейного оператора f в базисе e_1, e_2, e_3 некоторого линейного пространства является матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $\mathbf{B}$ этого оператора в базисе

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_2 + e_3, \\ e'_2 &= e_1 + e_3, \\ e'_3 &= e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Задача 10.3. Линейный оператор f задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе e_1, e_2, e_3 . Выяснить, является ли вектор x собственным вектором этого линейного оператора. Если да, то к какому собственному значению он относится?

1) $x = -e_1 + 2e_2 - 2e_3$;

2) $x = e_1 - 3e_3$.

Задача 11.8. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.9. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.10. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.11. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.12. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f , заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.6. Найти в базисе $f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $f_2(x) = 2x^2 - x + 2$, $f_3(x) = -x^2 + 2x + 2$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ координаты вектора $g(x) = x^2 + x + 1$.

Задача 4.7. Найти в базисе $\bar{\mathbf{p}} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ линейного пространства $V^{(2)}$ (линейного пространства свободных векторов плоскости) координаты вектора $\bar{\mathbf{a}} = 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Задача 4.8. Найти в базисе $\bar{\mathbf{p}} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{r}} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ линейного пространства $V^{(3)}$ (линейного пространства свободных векторов пространства) координаты вектора $\bar{\mathbf{c}} = 11\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

Задача 5.6. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача 5.7. Проверить, являются ли следующие множества подпространствами линейного пространства $M(2 \times 2, \mathbb{R})$:

1) M_1 – множество матриц, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{R};$$

2) M_2 – множество матриц второго порядка, у которых главная диагональ состоит из 1;

3) M_3 – множество матриц, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } b \in \mathbb{R}.$$

Задача 5.8. Образуют ли следующие множества числовых последовательностей линейные пространства, если сложение и умножение последовательностей на число производится стандартным образом (то есть поэлементно):

1) M_1 – множество последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_8)$, у которых $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$;

2) M_2 – множество последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_5)$, у которых $a_1 = a_5$;

3) M_3 – множество последовательностей (a_1, a_2, a_3, a_4) целых чисел?

Задача 5.9. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$