GeekBrains

Функция. Предел функции. (часть 1)

Введение в математический анализ

План вебинара

1. Разбор ДЗ – ключевые моменты.
2. Функция и отображения.
3. Вычисление пределов:

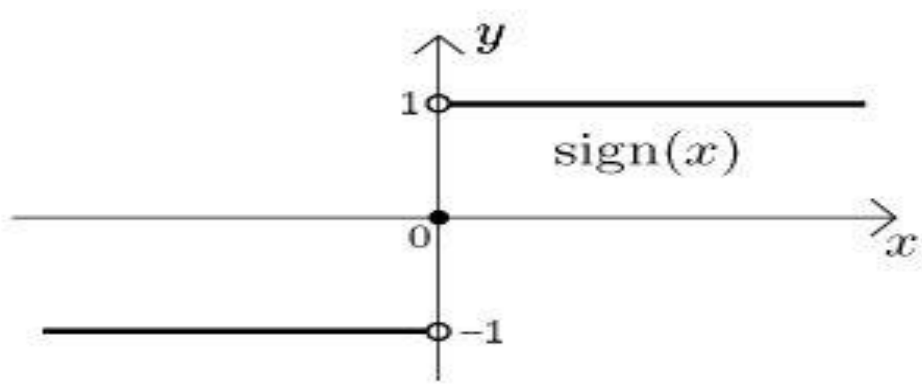
+ рациональных функций;

+ пределы, сводящиеся к 1-му замечательному пределу (часть 1).

Задача 2 (1)

- Исходное (ложь; sgn(0)=0): $\forall y \in [0;1] : \mathrm{sgn}(y) = 1$
- Отрицание (истина): $\exists y \in [0;1] : \mathrm{sgn}(y) \neq 1$

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



(2)

- Исходное (-; теорема Ферма):

$$\forall n \in \mathbb{N} > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n = y^n + z^n$$

- Отрицание (+):

$$\exists n \in \mathbb{N} > 2 : \forall x, y, z \in \mathbb{N} : x^n \neq y^n + z^n$$

Теорема утверждает[1], что для любого натурального числа $n > 2$ уравнение:

$$a^n + b^n = c^n$$

не имеет решений в целых ненулевых числах a, b, c.

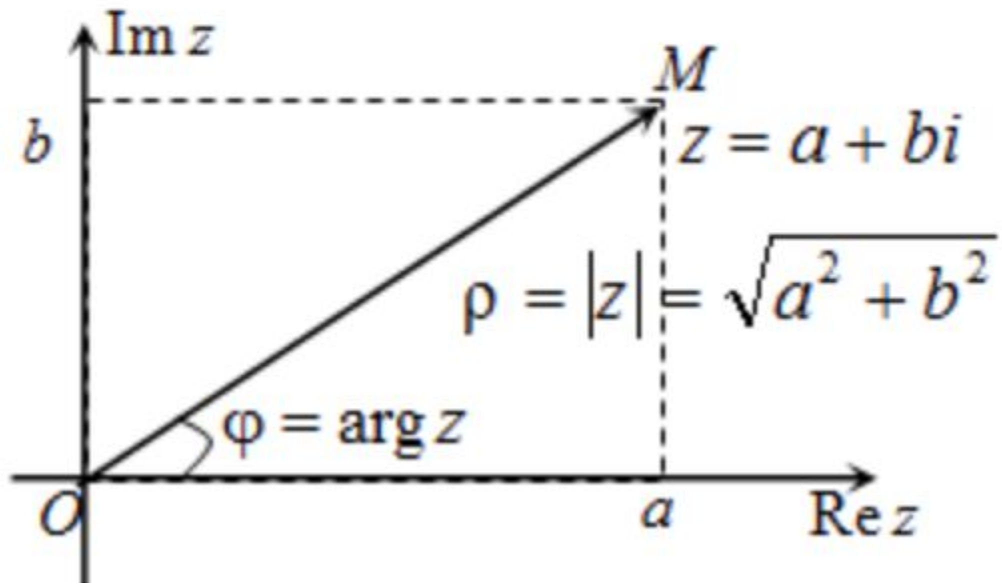
(3)

- Исходное (+): $\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : X > x$

- Отрицание: $\exists x \in \mathbb{R} : \forall X \in \mathbb{R} | X \neq x : X < x$

(4)

- Исходное(-)$\forall x \in \mathbb{C} \nexists y \in \mathbb{C} : x > y \| x < y$
- Отрицание(-$\exists x \in \mathbb{C}\ \exists y \in \mathbb{C} : x \leq y \| x \geq y$



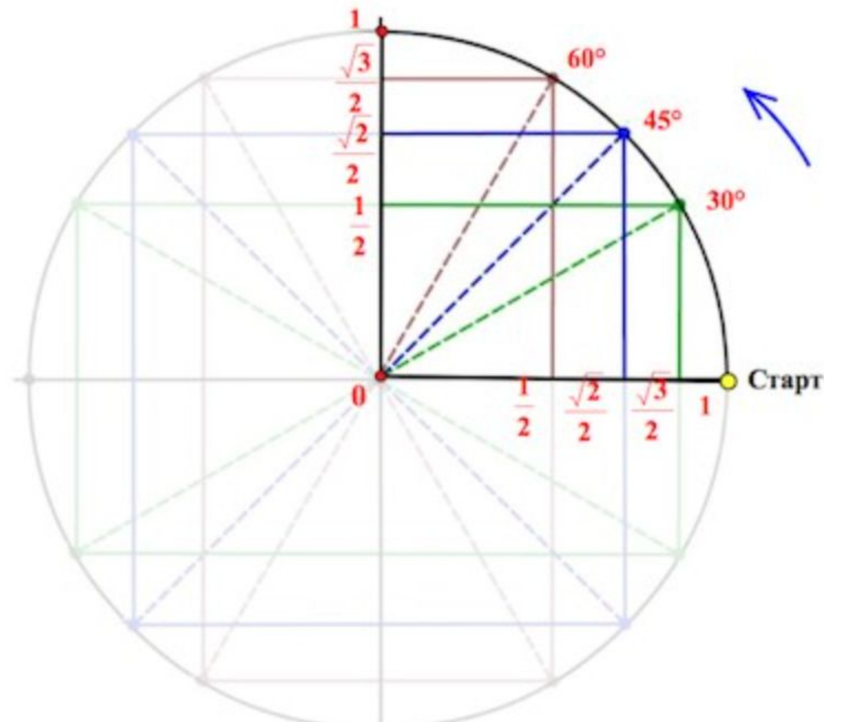
(5)

- Исходное (sin(pi/2)=1 - максимальное значение синуса; ложь):

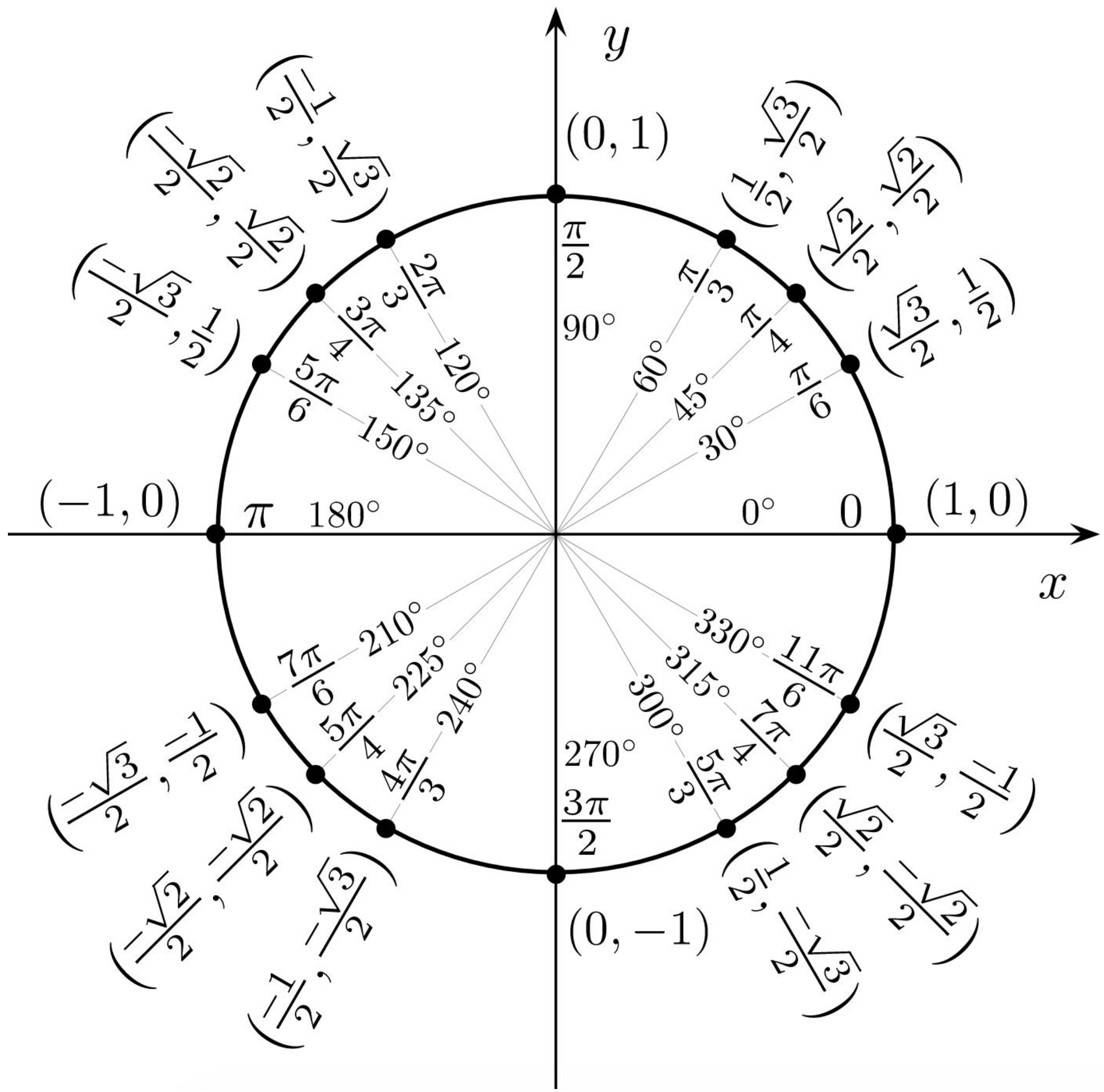
$$\forall y \in \left[0; \tfrac{\pi}{2}\right] \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y + \varepsilon)$$

- Отрицание (+):

$$\exists y \in \left[0; \tfrac{\pi}{2}\right] \forall \varepsilon > 0 : \sin y \geq \sin(y + \varepsilon)$$



(5)



y
x
$(0, 1)$
$(1, 0)$
$(-1, 0)$
$(0, -1)$
$\frac{\pi}{2}$
$90°$
$\frac{\pi}{3}$
$60°$
$\frac{\pi}{4}$
$45°$
$\frac{\pi}{6}$
$30°$
0
$0°$
$\frac{2\pi}{3}$
$120°$
$\frac{3\pi}{4}$
$135°$
$\frac{5\pi}{6}$
$150°$
π
$180°$
$\frac{7\pi}{6}$
$210°$
$\frac{5\pi}{4}$
$225°$
$\frac{4\pi}{3}$
$240°$
$\frac{3\pi}{2}$
$270°$
$\frac{5\pi}{3}$
$300°$
$\frac{7\pi}{4}$
$315°$
$\frac{11\pi}{6}$
$330°$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

(6)

- Исходное (+): $\forall y \in [0;\pi) \exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y+\varepsilon)$
- Отрицание $\exists y \in [0;\pi) \forall \varepsilon > 0 : \cos y \le \cos(y+\varepsilon)$

Принадлежность множеству не меняется.
ε в обоих случаях положительно.

(7)

- Исходное (+): $\exists x : x \notin \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- Отрицание: $\forall x : x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Множества, №1

```
a = set('13579')
b = set('24569')
c = {()}
aub = a.union(b)                        // aub = {‘1’; ‘2’; ’3’; ’4’; ’5’; ’6’; ’7’; ’9’}
aib = a.intersection(b)                 //  aib = {’5’; ’9’}
adb = a.difference(b)                   //   adb = {‘1’; ’3’; ’7’}
bda = b.difference(a)                   //   bda = {‘2’; ’4’; ’6’}
asdb = a.symmetric_difference(b)   // asdb = {‘1’; ‘2’; ’3’; ’4’; ’6’; ’7’}
auc = a.union(c)                        // auc = {‘1’; ’3’; ’5’; ’7’; ’9’}
aic = a.intersection(c)                 //  aic = {}
adc = a.difference(c)                   //   adc = {‘1’; ’3’; ’5’; ’7’; ’9’}
cda = c.difference(a)                   //   cda = {}
asdc = a.symmetric_difference(c)   // asdc = {‘1’; ’3’; ’5’; ’7’; ’9’}
```

Формула Стирлинга (к следующему дз)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

что эквивалентно

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

ГРАФИК – для иллюстрации

Число е:
https://ru.wikipedia.org/wiki/E_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)

Полезные формулы
(напоминание)

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- x1, x2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$
- Формулы сокращённого умножения:

Название	*Формула*
Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha + 1$$
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}^2\alpha + 1$$

Четность, нечетность

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Формулы тройного угла*

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$$
$$\mathrm{ctg}\,3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$$

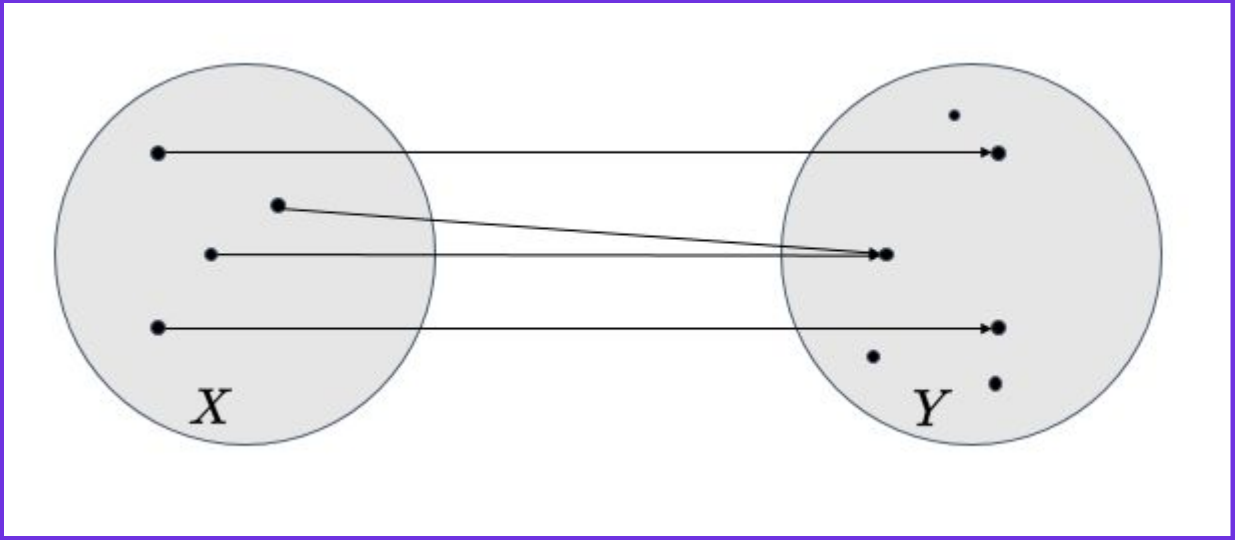
Универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента*

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы преобразования произведения в сумму (разность)

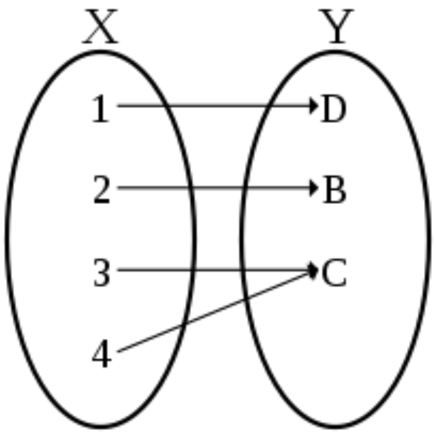
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$$
$$\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}$$

Функция – это соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.



Виды отображений: сюрьекция

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

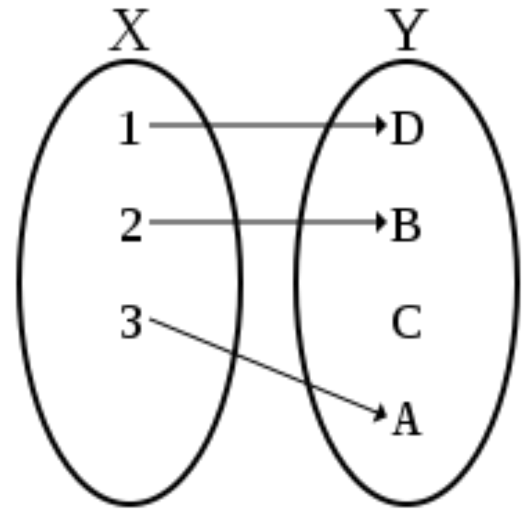


Отображение называется **сюръекцией**, если каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X.

Виды отображений: инъекция

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$$

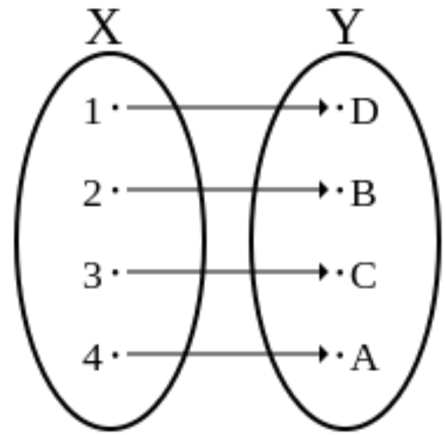
$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$



Отображение называется **инъекцией**, если разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y

Виды отображений: биекция

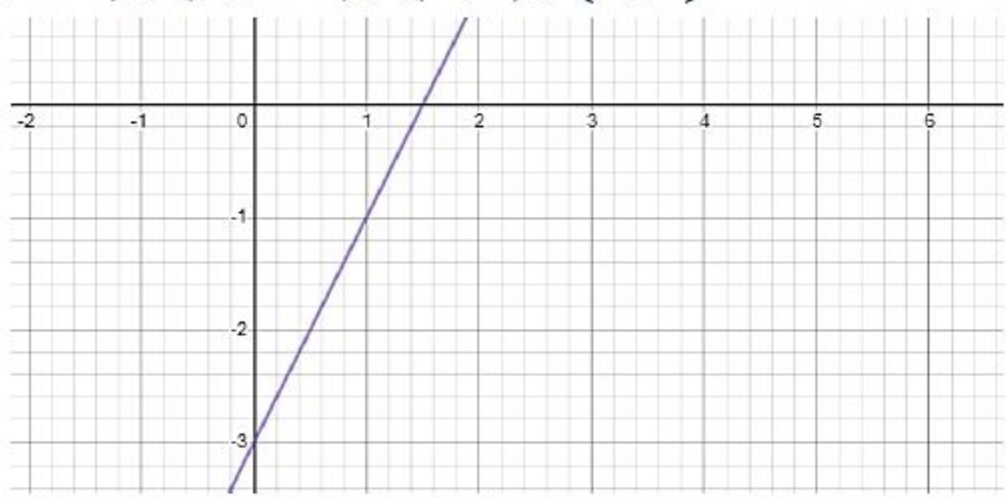
сюрьекция+инъекция



Биекция – это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным

Способы задания функций

- Явный. $y = 2x - 3$
- Неявный. $y - 2x + 3 = 0$
- Параметрический. $x = t,\ y = 2t - 3$
- Дискретный. $(0, -3); (1, -1); (2{,}1); (3{,}3)$
- Графический.



Исследование функции

в программе лучше начинать с построения графика

1) **Область определения** — множество, на котором задаётся функция.
2) **Область значения** — множество, состоящее из всех значений, которые принимает функция.
3) **Нули функции:** $f(x)=0$

   кратность нулей: (x-1)**2 (x-3) = 0

   x=1 - корень кратности 2

   x=3 - корень кратности 1

Исследование функции

в программе лучше начинать с построения графика

4) Отрезки знакопостоянства: *f(x)*>0; *f(x)*<0.

5) Чётность функции:

f(-x) = f(x) – чётная функция, симметрия относительно оси y (y=x**2);

f(-x) = -f(x) – нечётная функция, симметрия относительно начала координат (y=x**3);

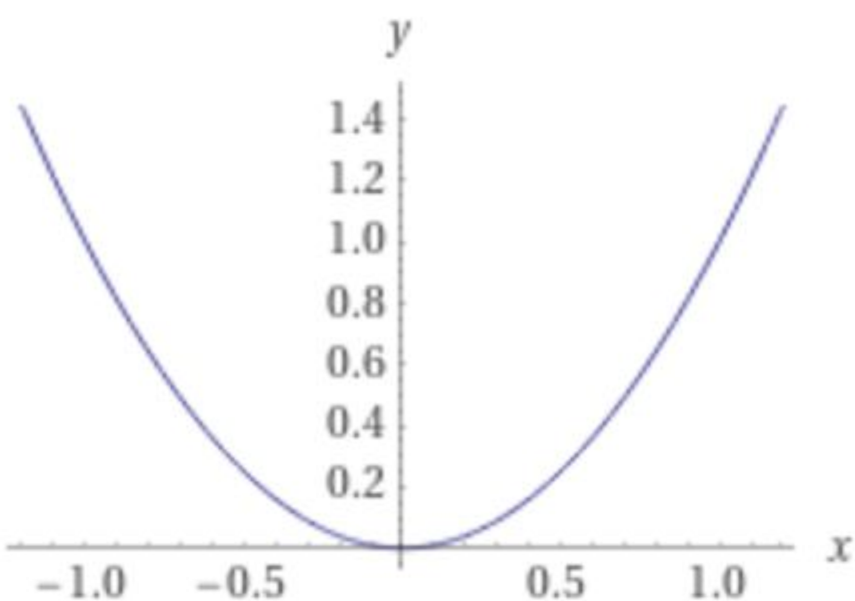
Иначе – функция общего вида.

Исследование функции

в программе лучше начинать с построения графика

x^2

Plot:



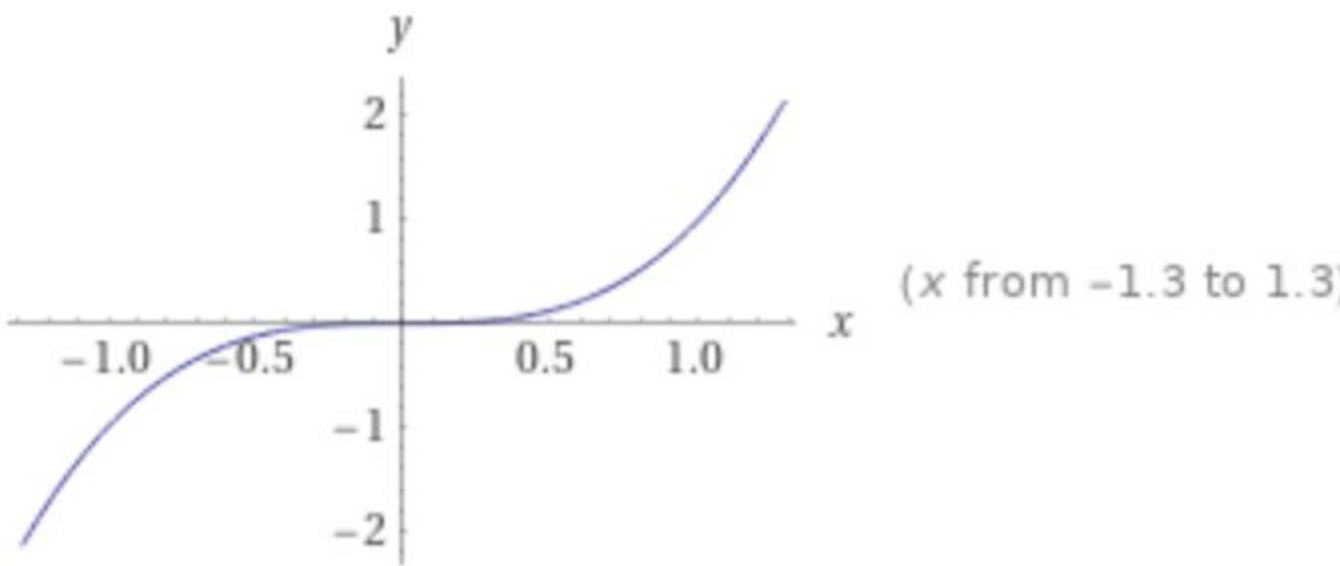
(x from −1.2 to 1.2)

Исследование функции

в программе лучше начинать с построения графика

x^3

Plot:



Исследование функции
в программе лучше начинать с построения графика

6) Ограниченность функции: есть ли максимальное и минимальное значения функции на множестве.

(https://foxford.ru/wiki/matematika/ogranichennye-funktsii)

7) **Периодичность функции**: $f(x+T)=F(x)$

8*) **Монотонность функции** (нужны производные или график)

Нахождение предела функции: начало

1) Подставляем в функцию значение, к которому стремится «икс»;
2) Устанавливаем вид неопределённости.

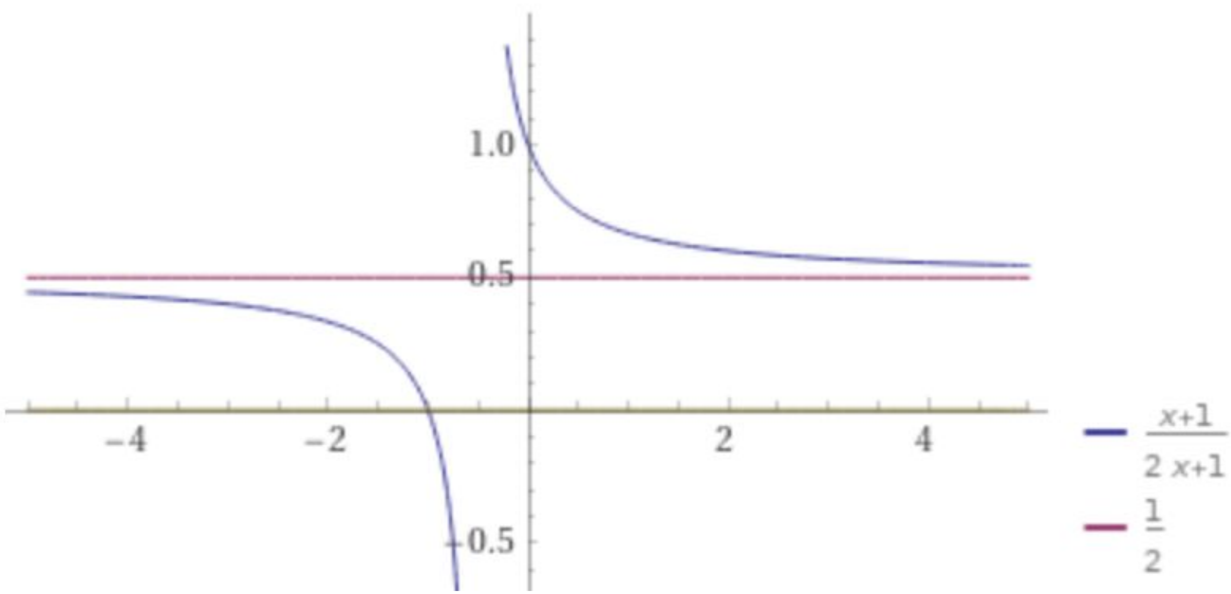
Предел функции

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

Разделить на «икс в старшей степени»

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$



Разделить на «икс в старшей степени»

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$$

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$3.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$$

Предел функции

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{-1}{-1}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

Предел функции

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(2x+1)}=\frac{2}{3}$$

Разложить на множители

Предел функции

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2.\ \lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$3.\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)}{(2x+1)}=\frac{2}{3}$$

Разложить на множители

ax^2+bx+c=0
x1, x2 – корни,
Тогда ax^2+bx+c = a(x-x1)(x-x2)

Предел функции

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Разделить на «икс в старшей степени»

Предел функции

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2^5}$$

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Предел функции

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2^5}$$

$$5.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Разложить на множители
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=-\frac{1}{2}$$

$$7.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(?)}{(x-1)(?)}=$$

Поделить столбиком

Деление столбиком

$$x^3 - 3x + 2 \mid \underline{x - 1}$$

Деление столбиком

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x + 2 & \underline{x - 1} \\
\underline{x^3 - x^2} & x^2 \\
\;x^2 - 3x &
\end{array}
$$

Деление столбиком

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x + 2 & \underline{x - 1} \\
\underline{x^3 - x^2} & x^2 + x \\
\quad x^2 - 3x & \\
\underline{\quad x^2 - x} & \\
\qquad -2x + 2 &
\end{array}
$$

Деление столбиком

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x + 2 & \underline{x - 1} \\
\underline{x^3 - x^2} & x^2 + x - 2 \\
\ x^2 - 3x & \\
\underline{x^2 - x} & \\
\qquad -2x + 2 & \\
\qquad \underline{-2x + 2} &
\end{array}
$$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=-\frac{1}{2}$$

$$7.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Предел функции

$$6.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=-\frac{1}{2}$$

$$7.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-3)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=$$

$$=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Предел функции

$$8.\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Умножить на сопряжённый множитель

Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Предел функции

$$8.\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} =$$

Предел функции

$$8.\ \lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1+2x-9}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\cdot\frac{2+2}{3+3}=\frac{4}{3}$$

Предел функции

$$8.\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\boxed{\frac{1+2x-9}{x-4}}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\cdot\frac{2+2}{3+3}=\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\frac{1+2x-9}{x-4}=\frac{2x-8}{x-4}=\frac{2(x-4)}{x-4}=2}$$

Предел функции

9. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Предел функции

$$9.\ \lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x} + 3}{\sqrt{1-x} + 3} \cdot \frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

Предел функции

$$9.\ \lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+3}\cdot\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{1-x-9}{8+x}\cdot\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-1\cdot\frac{4+4+4}{3+3}=-2$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a = \sqrt{x}, \qquad b = \sqrt[3]{y}$$

$$x - \sqrt[3]{y^2} = (\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})$$

10.* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=?$

Первый замечательный предел

$$11.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \qquad 12.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

$$13.\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \qquad 14.\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x = (0\cdot\infty) = 1$$

$$15.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Первый замечательный предел

$$11.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad 12.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$13.\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad 14.\ \lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x=(0\cdot\infty)=1$$

$$15.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{3\cdot 5x}=\frac{5}{3}$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$18.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$18.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$19.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=1 \qquad 18.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$19.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

Первый замечательный предел

$$16.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$$17.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$

$$18.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$19.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=\frac{sin(\frac{x}{2})sin(\frac{x}{2})}{x\frac{x}{2}}=\frac{sin(\frac{x}{2})sin(\frac{x}{2})}{2\frac{x}{2}\frac{x}{2}}}$$

Замечание

$$20.\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=?$$

$$y=x-\pi \quad => \quad x=y+\pi$$

$$\boxed{\sin(\pi+a)=-\sin a}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin(5y+5\pi)}{\sin(3y+3\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 5y}{-\sin 3y}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin 5y}{5y}\cdot\frac{3y}{\sin 3y}\cdot\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

Эквивалентности в пределах

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$$

$$e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$(1+\alpha(x))^m-1 \sim m\alpha(x)$$

Выводы по пределам функций

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \sim (\infty - \infty)$$

$$(1^{\infty})$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \sim (\infty \cdot 0)$$

Продолжение следует…

Спасибо!