



# Функция. Предел функции. (часть 1)

Введение в математический анализ

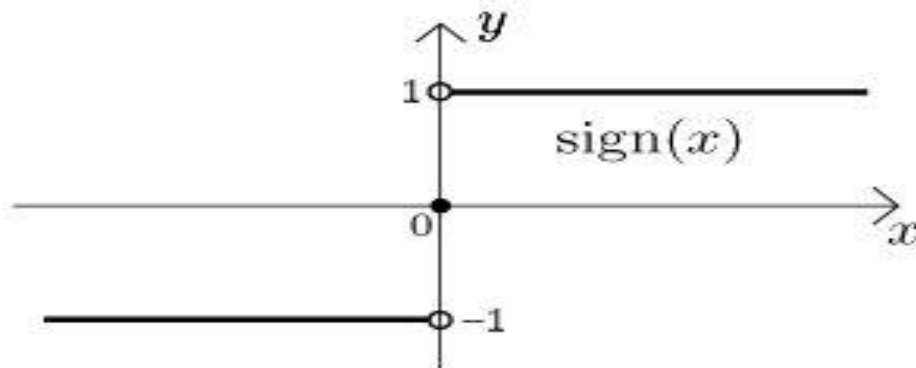
# План вебинара

1. Разбор ДЗ – ключевые моменты.
2. Функция и отображения.
3. Вычисление пределов:
  - + рациональных функций;
  - + пределы, сводящиеся к 1-му замечательному пределу (часть 1).

# Задача 2 (1)

- Исходное (ложь;  $\text{sgn}(0)=0$ ):  $\forall y \in [0; 1] : \text{sgn}(y) = 1$
- Отрицание (истина):  $\exists y \in [0; 1] : \text{sgn}(y) \neq 1$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



(2)

- Исходное (-; теорема Ферма):

$$\forall n \in \mathbb{N} > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n = y^n + z^n$$

- Отрицание (+):

$$\exists n \in \mathbb{N} > 2 : \forall x, y, z \in \mathbb{N} : x^n \neq y^n + z^n$$

Теорема утверждает<sup>[1]</sup>, что для любого **натурального числа**  $n > 2$  уравнение:

$$a^n + b^n = c^n$$

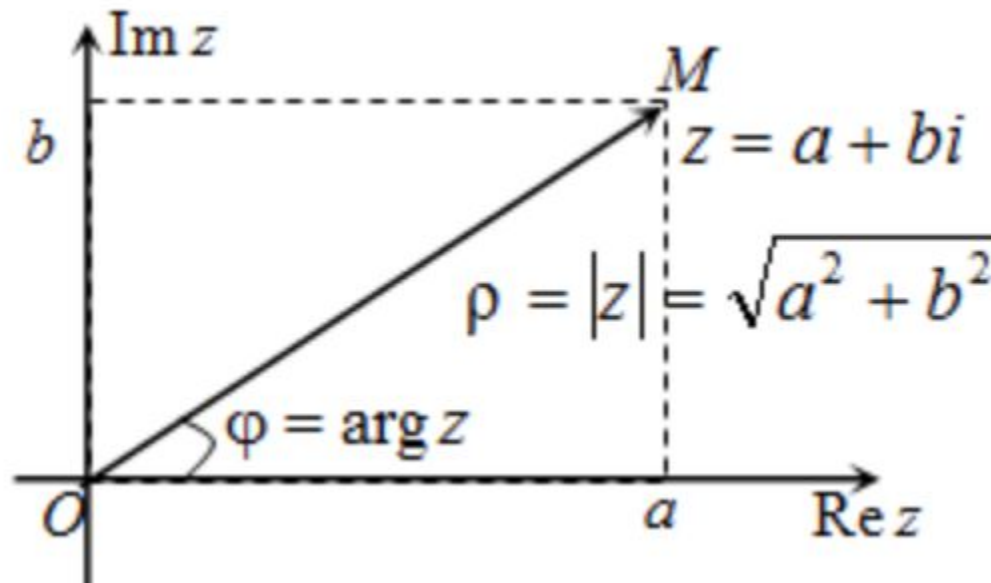
не имеет решений в **целых ненулевых** числах  $a, b, c$ .

(3)

- Исходное (+):  $\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : X > x$
- Отрицание:  $\exists x \in \mathbb{R} : \forall X \in \mathbb{R} | X \neq x : X < x$

(4)

- Исходное(-)  $\forall x \in \mathbb{C} \exists y \in \mathbb{C} : x > y \parallel x < y$
- Отрицание(-)  $\exists x \in \mathbb{C} \exists y \in \mathbb{C} : x \leq y \parallel x \geq y$



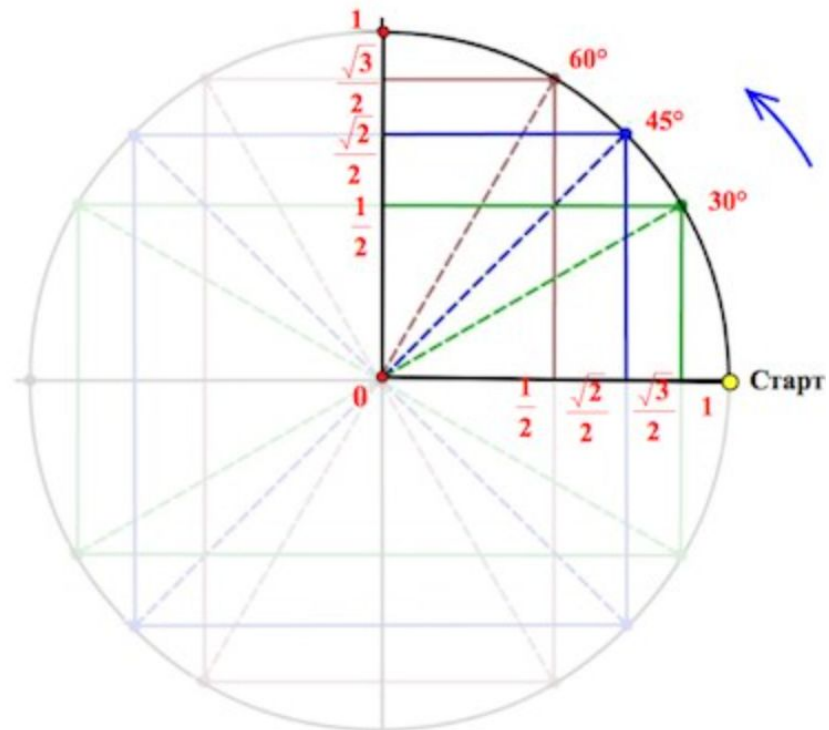
(5)

- Исходное ( $\sin(\pi/2)=1$  - максимальное значение синуса; ложь):

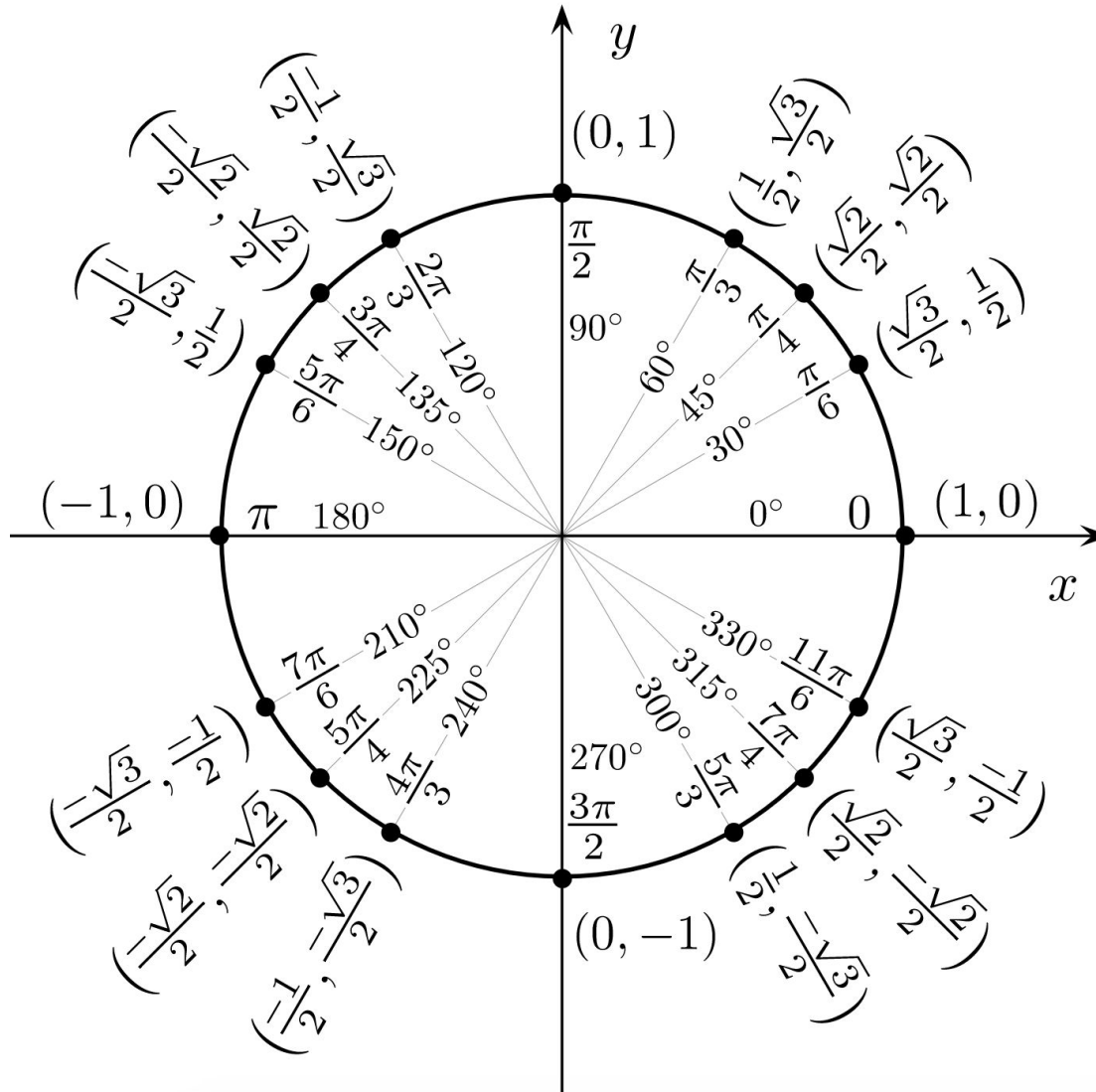
$$\forall y \in [0; \frac{\pi}{2}] \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y + \varepsilon)$$

- Отрицание (+):

$$\exists y \in [0; \frac{\pi}{2}] \forall \varepsilon > 0 : \sin y \geq \sin(y + \varepsilon)$$



(5)





(6)

- Исходное (+):  $\forall y \in [0; \pi) \exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y + \varepsilon)$
- Отрицание  $\exists y \in [0; \pi) \forall \varepsilon > 0 : \cos y \leq \cos(y + \varepsilon)$

Принадлежность множеству не меняется.  
 $\varepsilon$  в обоих случаях положительно.

(7)

- Исходное (+):  $\exists x : x \notin \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- Отрицание:  $\forall x : x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

# Множества, №1

```
1. a = set('13579')
2. b = set('24569')
3. c = {}
4. aub = a.union(b) // aub = {'1'; '2'; '3'; '4'; '5'; '6'; '7'; '9'}
5. aib = a.intersection(b) // aib = {'5'; '9'}
6. adb = a.difference(b) // adb = {'1'; '3'; '7'}
7. bda = b.difference(a) // bda = {'2'; '4'; '6'}
8. asdb = a.symmetric_difference(b) // asdb = {'1'; '2'; '3'; '4'; '6'; '7'}
9. auc = a.union(c) // auc = {'1'; '3'; '5'; '7'; '9'}
10. aic = a.intersection(c) // aic = {}
11. adc = a.difference(c) // adc = {'1'; '3'; '5'; '7'; '9'}
12. cda = c.difference(a) // cda = {}
13. asdc = a.symmetric_difference(c) // asdc = {'1'; '3'; '5'; '7'; '9'}
```

# Формула Стирлинга (к следующему дз)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

что эквивалентно

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

ГРАФИК – для  
иллюстрации

Число e:

[https://ru.wikipedia.org/wiki/E\\_\(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/E_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE))

# Полезные формулы (напоминание)

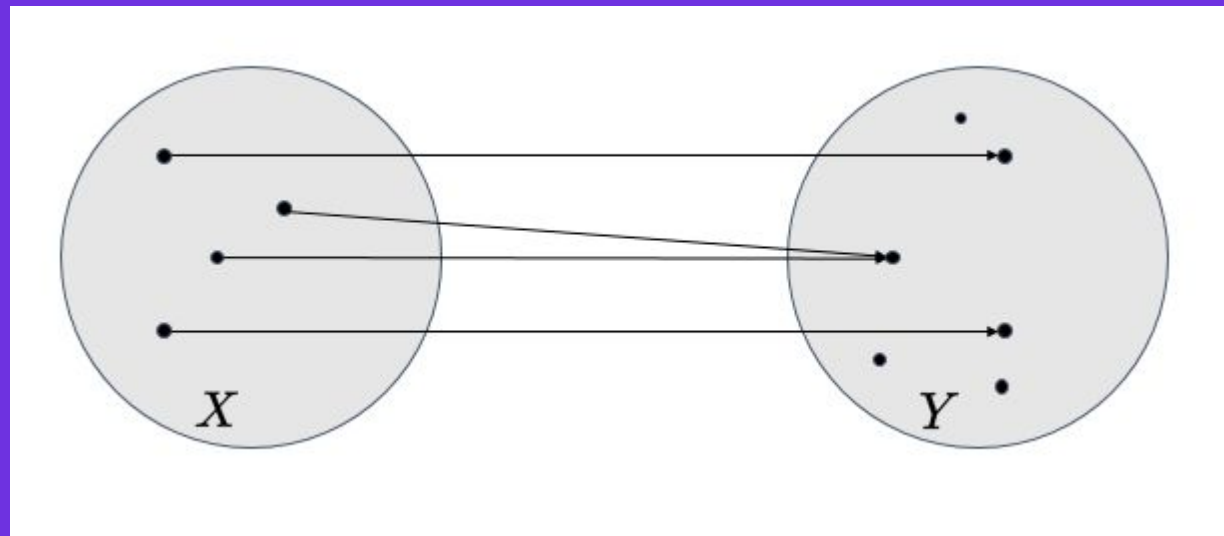
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- $x_1, x_2$  – корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$
- Формулы сокращённого умножения:

<i>Название</i>	<i>Формула</i>
Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

<p>Основные тригонометрические тождества</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1$ $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$	<p>Четность, нечетность</p> $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	<p>Формулы сложения и вычитания</p> $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$ $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$
<p>Формулы двойного угла</p> $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$ $= 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	<p>Формулы половинного аргумента</p> $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$	<p>Формулы преобразования суммы и разности в произведение</p> $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$
<p>Формулы тройного угла*</p> $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$	<p>Универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента*</p> $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$	<p>Формулы преобразования произведения в сумму (разность)</p> $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$ $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$ $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$ $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$

**Функция** – это соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

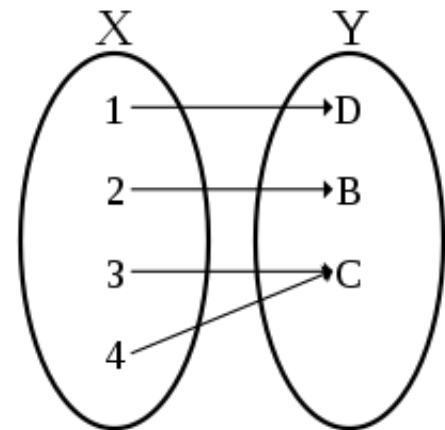




# Виды отображений: сюръекция

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

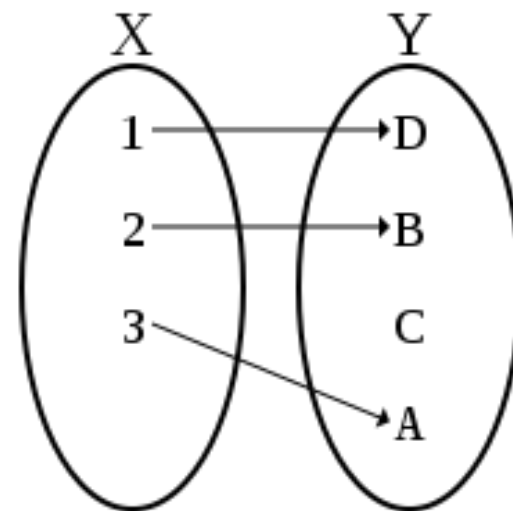
Отображение называется **сюръекцией**, если каждый элемент множества  $Y$  является образом хотя бы одного элемента множества  $X$ .



# Виды отображений: инъекция

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$$

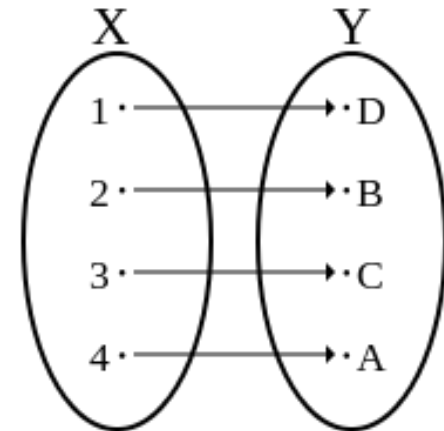
$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$



Отображение называется **инъекцией**, если разные элементы множества  $X$  переводятся в разные элементы множества  $Y$

# Виды отображений: биекция

сюръекция+инъекция



**Биекция** – это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным

# Способы задания функций

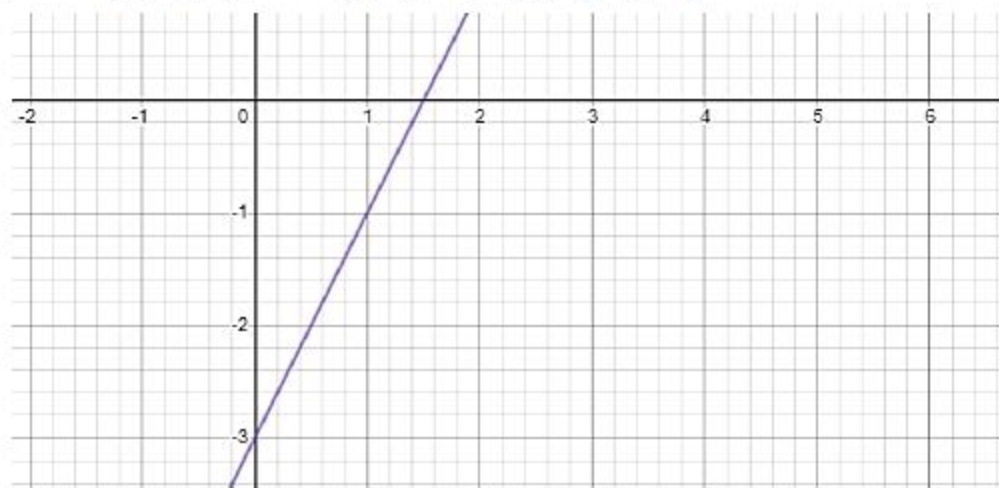
› Явный.  $y = 2x - 3$

› Неявный.  $y - 2x + 3 = 0$

› Параметрический.  $x = t, y = 2t - 3$

› Дискретный.  $(0, -3); (1, -1); (2, 1); (3, 3)$

› Графический.



# Исследование функции

в программе лучше начинать с построения  
графика

- 1) Область определения** — множество, на котором задаётся функция.
- 2) Область значения** — множество, состоящее из всех значений, которые принимает функция.
- 3) Нули функции:**  $f(x)=0$   
кратность нулей:  $(x-1)**2 (x-3) = 0$   
 $x=1$  - корень кратности 2  
 $x=3$  - корень кратности 1

# Исследование функции

в программе лучше начинать с построения  
графика

**4) Отрезки знакопостоянства:  $f(x) > 0$ ;  
 $f(x) < 0$ .**

**5) Чётность функции:**

$f(-x) = f(x)$  – чётная функция, симметрия  
относительно оси  $y$  ( $y = x^{**2}$ );

$f(-x) = -f(x)$  – нечётная функция, симметрия  
относительно начала координат ( $y = x^{**3}$ );

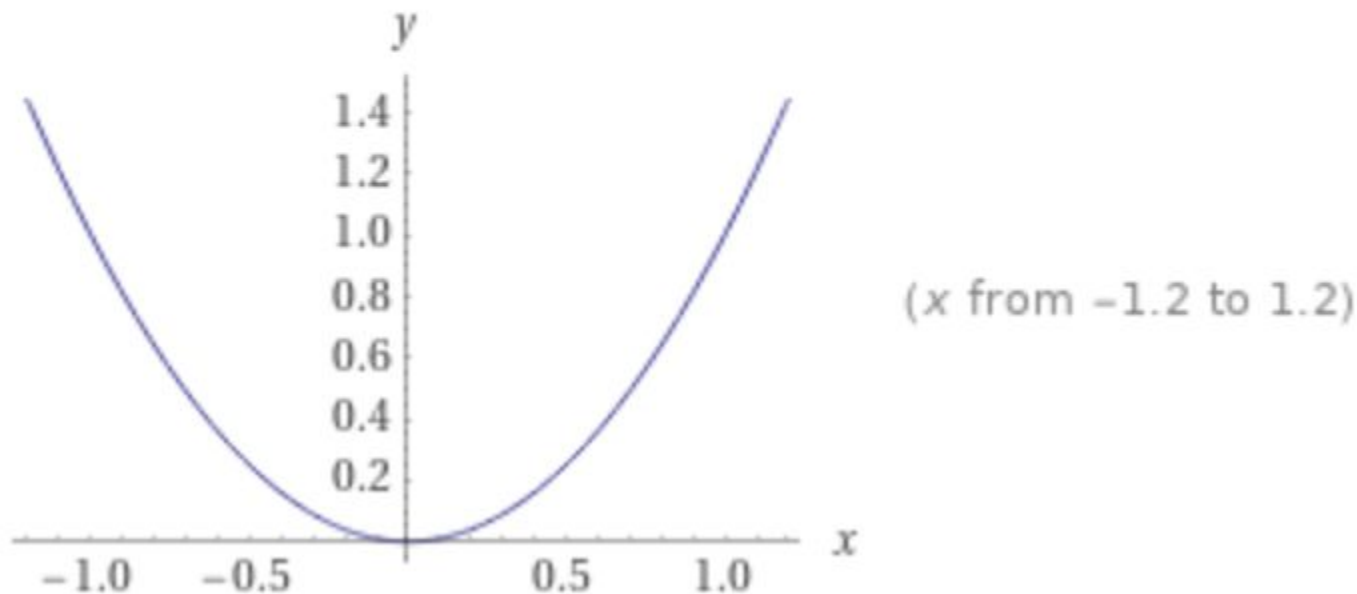
Иначе – функция общего вида.

# Исследование функции

в программе лучше начинать с построения  
графика

$$x^2$$

Plot:

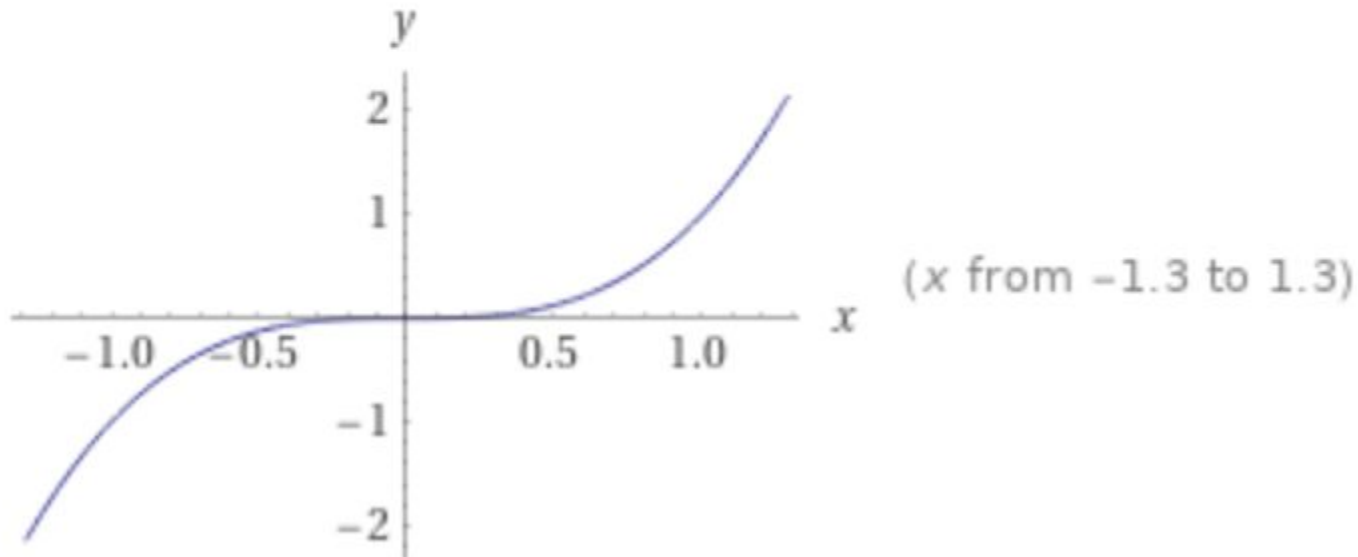


# Исследование функции

в программе лучше начинать с построения  
графика

$$x^3$$

Plot:





# Исследование функции

в программе лучше начинать с построения  
графика

**6) Ограниченность функции:** есть ли  
максимальное и минимальное значения  
функции на множестве.

([https://foxford.ru/wiki/matematika/ogranichen  
nye-funktsii](https://foxford.ru/wiki/matematika/ogranichennye-funktsii))

**7) Периодичность функции:**  $f(x+T)=F(x)$

**8\*) Монотонность функции** (нужны  
производные или график)

# Нахождение предела функции: начало

- 1) Подставляем в функцию значение, к которому стремится «икс»;
- 2) Устанавливаем вид неопределённости.

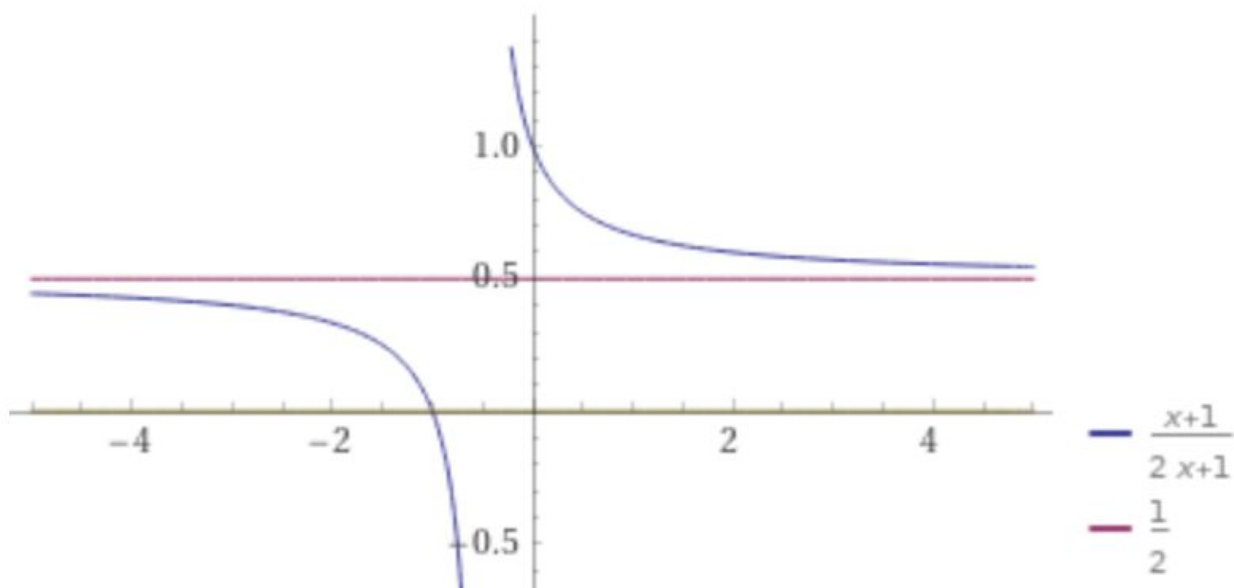
# Предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) =$$

Разделить на «икс в старшей степени»

## Предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2}$$



Разделить на «икс в старшей степени»

## Предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =$$

# Предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =$$

## Предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

# Предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(2x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)}{(2x + 1)} = \frac{2}{3}$$

Разложить на множители



# Предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(2x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)}{(2x + 1)} = \frac{2}{3}$$

Разложить на множители

$ax^2 + bx + c = 0$   
 $x_1, x_2$  – корни,  
Тогда  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

## Предел функции

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) =$$

Разделить на «икс в старшей степени»

## Предел функции

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{2^5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) =$$

## Предел функции

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2x-1)^5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{2^5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Предел функции

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

Разложить на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

## Предел функции

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)(x - 5)} = -\frac{1}{2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(?)}{(x - 1)(?)} =$$

Поделить

столбиком

## Деление столбиком

$$x^3 - 3x + 2 \mid \underline{x - 1}$$

## Деление столбиком

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \mid \underline{x - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 2} \mid x^2 \\ x^2 - 3x \phantom{+ 2} \end{array}$$



## Деление столбиком

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \quad | \quad \underline{x - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 2} \quad | \quad x^2 + x \\ x^2 - 3x \phantom{+ 2} \\ \underline{x^2 - x} \\ -2x + 2 \end{array}$$

## Деление столбиком

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \mid \underline{x - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 2} \mid x^2 + x - 2 \\ x^2 - 3x \phantom{+ 2} \phantom{\mid} \\ \underline{x^2 - x} \phantom{+ 2} \phantom{\mid} \\ -2x + 2 \phantom{\mid} \\ \underline{-2x + 2} \phantom{\mid} \end{array}$$

## Предел функции

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = -\frac{1}{2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)}{(x^3 + x^2 + x - 3)} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

## Предел функции

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = -\frac{1}{2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)}{(x^3 + x^2 + x - 3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} =$$

$$= \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

## Предел функции

$$8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

Умножить на сопряжённый множитель

Разность квадратов  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

## Предел функции

$$8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2x} + 3}{\sqrt{1 + 2x} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} =$$

## Предел функции

$$8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + 3}{\sqrt{1+2x} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 + 2x - 9}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{1+2x} + 3} = 2 \cdot \frac{2 + 2}{3 + 3} = \frac{4}{3}$$

## Предел функции

$$8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + 3}{\sqrt{1+2x} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1+2x-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = 2 \cdot \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1+2x-9}{x-4} = \frac{2x-8}{x-4} = \frac{2(x-4)}{x-4} = 2$$



## Предел функции

$$9. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

## Предел функции

$$9. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x} + 3}{\sqrt{1-x} + 3} \cdot \frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

## Предел функции

$$9. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x} + 3}{\sqrt{1-x} + 3} \cdot \frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{1-x-9}{8+x} \cdot \frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3} = -1 \cdot \frac{4+4+4}{3+3} = -2$$

## Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a = \sqrt{x}, \quad b = \sqrt[3]{y}$$

$$x - \sqrt[3]{y^2} = (\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})$$

$$10.* \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$$

## Первый замечательный предел

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x = (0 \cdot \infty) = 1$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

## Первый замечательный предел

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x = (0 \cdot \infty) = 1$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{3 \cdot 5x} = \frac{5}{3}$$

## Первый замечательный предел

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$



## Первый замечательный предел

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

## Первый замечательный предел

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right)$$

## Первый замечательный предел

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

## Первый замечательный предел

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1 \qquad 18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left( \frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

## Первый замечательный предел

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left( \frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{x^2} = \frac{\sin \left( \frac{x}{2} \right) \sin \left( \frac{x}{2} \right)}{x \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left( \frac{x}{2} \right) \sin \left( \frac{x}{2} \right)}{2 \frac{x}{2} \frac{x}{2}}$$

## Замечание

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5}{3} \right) = ?$$

$$y = x - \pi \Rightarrow x = y + \pi$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(5y + 5\pi)}{\sin(3y + 3\pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin 5y}{-\sin 3y} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5y}{5y} \cdot \frac{3y}{\sin 3y} \cdot \frac{5}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

# Эквивалентности в пределах

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x)$$

# Выводы по пределам функций

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \sim (\infty - \infty)$$

$$(1^\infty)$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \sim (\infty \cdot 0)$$

Продолжение следует...



**Спасибо!**