Лекция 1
Символика и терминология. Системы координат.

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 1, 2.

Множества. Операции над множествами. Кванторы общности и
существования. Необходимое и достаточное условия.
Числовые множества.

Абсолютная величина действительного числа. Положение точки на прямой, на плоскости, в пространстве. Расстояние между двумя точками. Преобразование координат. Полярные координаты. Системы координат в пространстве.

1.2. Множества. Основные понятия

Множество обычно обозначается заглавными латинскими буквами A, B, C, …, а их элементы – малыми a, b, c, ….

Утверждение «элемент x принадлежит множеству А» записывается так: $x \in A$, а противоположное утверждение «элемент x не принадлежит множеству А» записывается так: $x \notin A$.

Определение 1.1. *Если все элементы множества А принадлежат также множеству В, то говорят, что «А содержится в В» или: «А является подмножеством В», и записывают так:* $A \subset B$.

Определение 1.2. *Два множества называются равными (совпадающими), если они состоят из одних и тех же элементов:* $A = B$.

Конечное множество можно задать перечислением его элементов. Так, запись $A = \{1; 2; 3\}$ означает, что множество А состоит из трёх чисел 1, 2, 3. При этом порядок перечисления элементов не играет роли: $\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\}$.

Бесконечное множество можно задать, написав условие, которое выполняется для всех элементов данного множества и не выполняется для других. Запись $B = \{x \mid 1 < x < 2\}$ означает множество всех чисел, больших одного, но меньших двух.

Множество удобно схематически изображать в виде «диаграмм Эйлера» — геометрических фигур на плоскости, взаимное расположение которых отражает отношение между множествами. Так, например, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то A изображается частью B, а B частью C (рис. 1). С помощью диаграммы Эйлера на рис. 1 наглядно видно свойство транзитивности операции включения множеств: $A \subset B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

Определение 1.3. *Множество называется пустым, если оно не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом* $\varnothing$.

Так, например, множество отрицательных натуральных чисел пусто.

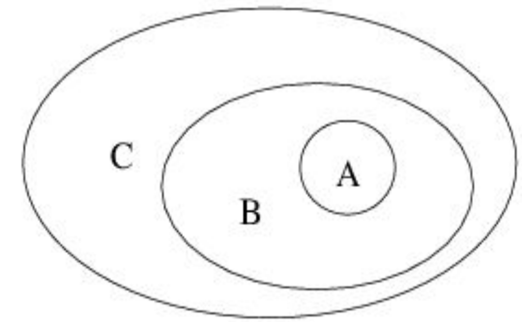

Рис. 1. *Диаграмма Эйлера*

Пересечение множеств

Определение 1.4. *Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, одновременно входящих и в A, и в B. Это записывается следующим образом:* $A \cap B = C$.

Свойства операции пересечения множеств

1. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность).
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (ассоциативность).
3. $A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A$.
4. $A \cap A = A$.
5. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

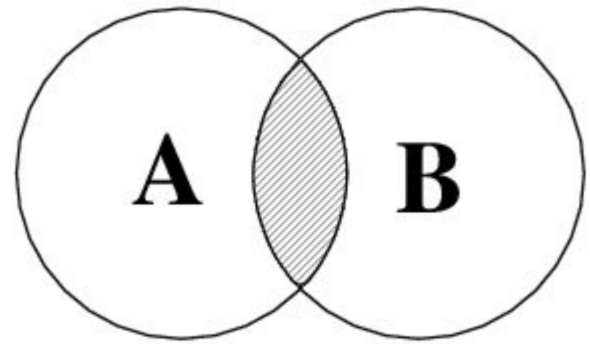

Рис. 2. *Пересечение множеств A и B*

Пример 1.2. *Если множество A есть интервал $(1;5)$ а множество B есть интервал $(2;7)$, то пересечение множеств A и B есть интервал $(2;5)$.*

Объединение множеств

Определение 1.5. *Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из данных множеств или A, или B, или A и B одновременно. Это обозначается следующим образом:* $A \cup B = C$.

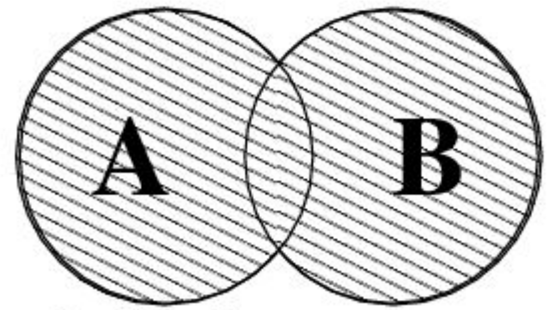

Рис. 3. *Объединение множеств A и B*

Свойства операции объединения множеств

1) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность).
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ (ассоциативность).
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность).
4) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.
5) $A \cup A = A$.
6) $A \cup \oslash = A$.

Пример 1.3. *Если множество A есть отрезок* $[1; 3]$, *множество B есть отрезок* $[2; 5]$, *то* $A \cup B$ *есть отрезок* $B = [1; 5]$.

Разность множеств

Определение 1.6. *Разностью множеств* A *и* B *называется множество* C*, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству* A*, но не принадлежащих* B*. Разность* A *и* B *обозначается* $A \setminus B$ *и изображена штриховкой на рис. 4.*

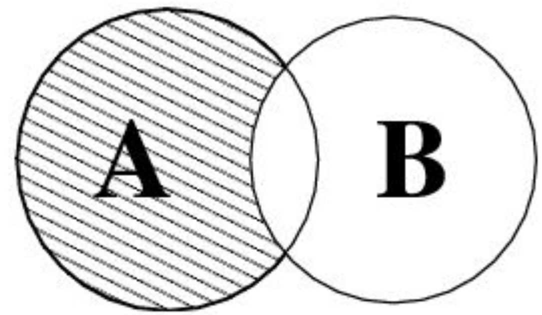

Рис. 4. *Разность множеств* A *и* B

Операция вычитания множеств не коммутативна : $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Пример 1.4. *Если* $A = (1;10)$, $B = (3;20)$, *то* $A \setminus B = (1;3]$, $B \setminus A = [10;20)$.

1.4. Кванторы общности и существования

При изложении материала мы будем использовать знак $\forall$, называемый квантором общности, и знак $\exists$, называемый квантором существования. Символ $\forall x$ означает:«для любого x», «для всех x», «для каждого x», «какое бы ни было x». Запись $\forall x > 0$ означает: «для всех положительных x». Запись $\forall x \in M$ читается: «для всех x, принадлежащих множеству M».

Обозначение $\exists x$ означает: «существует такое x, что ...», «по крайней мере для одного x...», запись $\exists x > 0$ читается: «существует такое положительное число x, что...», запись $\exists x_1, x_2 \in M$ означает: «существуют такие x_1, x_2 – элементы множества M, что ...».

Нам также неоднократно придется использовать символы $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

Запись логического следования $A \Longrightarrow B$ означает, что если верно утверждение A, то верно и утверждение B, то-есть, из A следует B.

Запись логической равносильности $\Longleftrightarrow$ означает, что из A следует B и наоборот, из B следует A.

Так, например, запись: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall x > N \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ читается следующим образом: «для любого ε больше 0 существует N такое, что для любых x, больших N, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$».

1.5. Необходимое и достаточное условие

Любая теорема может быть сформулирована в виде: если выполняется условие A, то верно утверждение B. Будем называть это прямой теоремой и схематически запишем в виде:

Теорема 1.1. $A \Longrightarrow B.$

Условие A стоит после слова «если», утверждение B написано после слова «то».

Определение 1.7. *A называется достаточным условием для выполнения B. В свою очередь, B является необходимым условием для выполнения A.*

Если наряду с прямой теоремой выполняется также обратная теорема, то А является «необходимым и достаточным» условием для B. То же самое можно сказать про B по отношению к A.

Так, например, то, что треугольник прямоугольный, является необходимым и достаточным условием того, что квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других.

1.6. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел

Определение 1.8. *Числа 1, 2, 3,... называются натуральными.*

Сумма и произведение натуральных чисел будет числом натуральным, а разность и частное – не всегда. При вычитании натуральных чисел может получится отрицательное число, а при делении – не целое. Например, при делении $\frac{7}{3}$ получится целая часть 2 и 1 в остатке, что записывается следующим равенством: $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$.

1.7. Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел

Определение 1.11. *Натуральные, противоположные натуральным числам и ноль образуют множество целых чисел (множество* $\mathbb{Z}$*).*

Сумма, произведение и разность целых чисел является целым числом, а частное – не всегда. Иногда множество отрицательных целых чисел обозначается $\mathbb{Z}_-$.

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.8. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел

Определение 1.12. *Рациональными числами называются числа вида* $\frac{m}{n}$, *где* m *– целое* ($m \in \mathbb{Z}$), n *– натуральное* ($n \in \mathbb{N}$), m *и* n *взаимно простые. Множество рациональных чисел обозначается* $\mathbb{Q}$.

Множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел, так как любое целое число m можно рассматривать как рациональное, представив в виде $\left(\frac{m}{1}\right)$. Сумма, произведение, разность, частное рациональных чисел (при ненулевом знаменателе) является числом рациональным, однако корень из рационального числа – не всегда, как, например, $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ и т.д.

Всякое рациональное число $\left(\frac{m}{n}\right)$ можно представить в виде десятичной дроби, конечной или периодической. И наоборот, любая конечная или периодическая десятичная дробь может быть записана в виде простой дроби.

1.9. Множество $\mathbb{J}$ иррациональных чисел

Определение 1.15. *Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная дробь.*

Примерами иррациональных чисел являются $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{11}$, π, e и т.д. Заметим, что $\mathbb{J} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$. Иррациональное число нельзя представить в виде простой дроби, его также невозможно «выписать до конца» (представить в виде конечной десятичной дроби), поэтому запись $\sqrt{2} = 1{,}41$ ошибочна, следует писать $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Заданное бесконечной непериодической дробью иррациональное число определяет две последовательности конечных (рациональных) десятичных дробей, называемых десятичными приближениями по недостатку и по избытку. Например, для $\sqrt{2}$ можно написать:

$1 < \sqrt{2} < 2$,
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$,
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
$\ldots$

В инженерных расчетах при замене иррациональных чисел их рациональными приближениями достаточно во всех вычислениях брать на один знак больше, чем требуется в результате, и затем округлить результат.

Для иррациональных чисел можно также определить целую и дробную части, причём для $x \in \mathbb{J} \Rightarrow \{x\} \in \mathbb{J}$.

1.10. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел

Определение 1.16. *Все рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных (вещественных) чисел:* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$.

В множестве действительных чисел всегда выполнимы сложение, вычитание, умножение, деление (не на ноль), возведение в любую действительную степень положительного числа, извлечение корня нечётной степени из отрицательного числа.

В множестве действительных чисел невозможно извлечение корня чётной степени из отрицательного числа.

1.11. Числовая ось

Множеству действительных чисел можно дать простую геометрическую интерпретацию. Выберем на прямой положительное направление (указывается стрелкой), начало отсчёта и единицу масштаба. Такая прямая называется числовой осью. Каждой её точке можно поставить в соответствие единственное действительное число следующим образом: положительное число x изображается точкой, расположенной на оси на расстоянии x в направлении стрелки (на рис. 6 справа от O), отрицательное – с другой стороны (на рис. 6 слева от O) на расстоянии x от O.

Число x называется координатой соответствующей точки на числовой оси. Из двух чисел больше будет то, которое расположено на числовой оси дальше в направлении стрелки (на рис. 6 – правее).

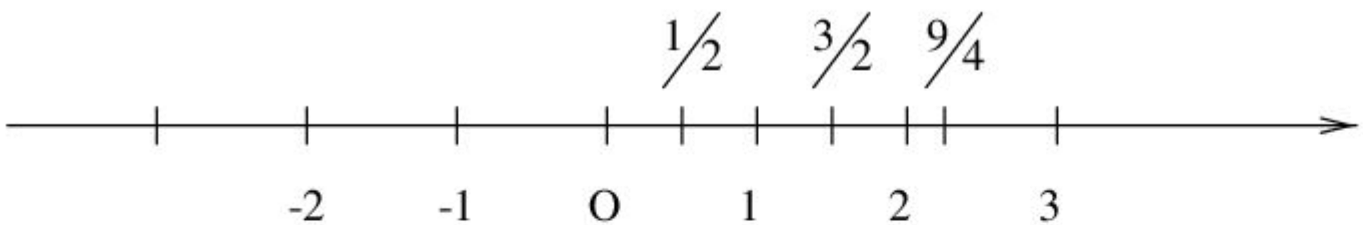

Рис. 6. *Числовая ось*

Например, $-1 > -2$.

1.12. Числовые промежутки

Если известны два действительных числа a и b, $a < b$, то можно определить следующие множества действительных чисел, находящихся между двумя данными – числовые промежутки.

Отрезок (сегмент) $[a;b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,
Интервал $(a;b) = \{x \mid a < x < b\}$.

В частности, можно рассматривать бесконечные интервалы:
$(-\infty;+\infty) = \{x \in R\}$, $(a;+\infty) = \{x \mid x > a\}$, $(-\infty;b) = \{x \mid x < b\}$.
Полуинтервал. $[a;b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$, $(a;b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.
В частности, можно рассматривать бесконечные полуинтервалы:
$[a;+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty;b] = \{x \mid x \leqslant b\}$.

Числовые промежутки изображают на числовой оси, причём если граничная точка принадлежит промежутку – она закрашена, если нет – изображается светлым кружком («выкалывается»). На рис. 7 изображен полуинтервал (2;5].

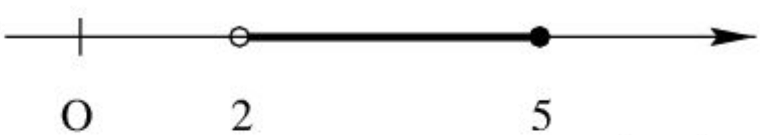

Рис. 7. *Полуинтервал (2;5]*

2.1. Абсолютная величина действительного числа

Определение 2.1. *Абсолютной величиной или модулем действительного числа x называется само это число, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Например: $|2| = 2$, т.к. $2 > 0$, $|-3| = -(-3) = 3$, т.к. $-3 < 0$, $|x^2 + 4| = x^2 + 4$, так как $x^2 + 4 > 0$ при всех $x \in R$, $|0| = 0$.

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{если} \quad x - 3 \geqslant 0, \\ -(x - 3), & \text{если} \quad x - 3 < 0; \end{cases}$$

$$|a + 5| = \begin{cases} a + 5, & \text{если} \quad a + 5 \geqslant 0, \\ -(a + 5), & \text{если} \quad a + 5 < 0. \end{cases}$$

Модуль дейтвительного числа x равен расстоянию на числовой оси от точки x до начала координат.

Расстояние между точками на оси

Расстояние между двумя точками на оси с координатами x_1 и x_2 выражается формулой:

$$d = |x_2 - x_1|. \qquad (2.2)$$

Получим эту формулу для случая, когда $x_2 \geqslant x_1 \geqslant 0$ (рис. 15). В этом случае $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$ и

$$d = M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|.$$

Если $x_1 > x_2 \geqslant 0$ (рис. 15), то $d = M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1) = |x_2 - x_1|$, так как $x_2 - x_1 < 0$.

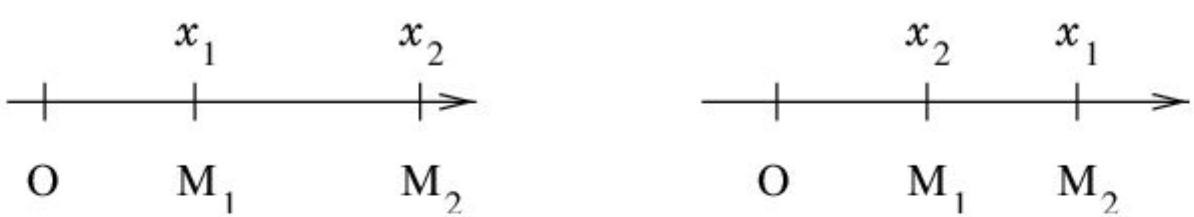

Рис. 15. *Расстояние между точками на оси*

Пример 2.1. *Для данных a и $R > 0$ отметить на числовой оси множество $M = \{x||x - a| < R\}$.*

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой 2.2 множество M есть множество точек числовой оси, расстояние от которых до данной точки меньше R, т.е. интервал с центром в a и длиной $2R$:

$M = \{x||x - a| < R\} = \{x|x \in (a - R; a + R)\} =$

$= \{x|a - R < x < a + R\}$.

Ответ: см. рис. 16.

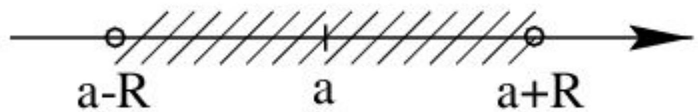

Рис. 16. $\{x||x - a| < R\}$

Свойства модуля

Приведем свойства модуля действительного числа, которые вытекают из определения модуля и свойств арифметических операций.

1) $|x| \geqslant 0$,
2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
3) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$,
4) $|x^\alpha| = |x|^\alpha$ если $\exists x^\alpha$,
5) $|x| = |-x|$,
6) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a \quad$ для $\forall a > 0$,
7) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
8) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

$$\sqrt{a^2} = |a|. \qquad (2.3)$$

Так, например, $\sqrt{5^2}=5$; $\sqrt{(-3)^2} = 3$(а не -3);
$\sqrt{(x+5)^2}=|x+5|$.

$$\sqrt[2k]{a^{2n}} = \sqrt[k]{|a|^n} \quad \forall k, n \in N. \qquad (2.4)$$

Например: $\sqrt[4]{(x-3)^6} = \sqrt{|x-3|^3}$.

2.3. Положение точки на плоскости

Определение 2.3. *Координата x называется абсциссой точки M, а координата y — ординатой точки M. Упорядоченная пара чисел $(x; y)$ называется прямоугольными или декартовыми координатами точки M на плоскости Oxy.*

Каждой точке M координатной плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x; y)$ и, наоборот, каждая такая пара чисел определяет единственную точку M плоскости, расположенную на пересечении перпендикуляров к осям в точках x и y соответственно. Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy – осью ординат, точка O – началом координат.

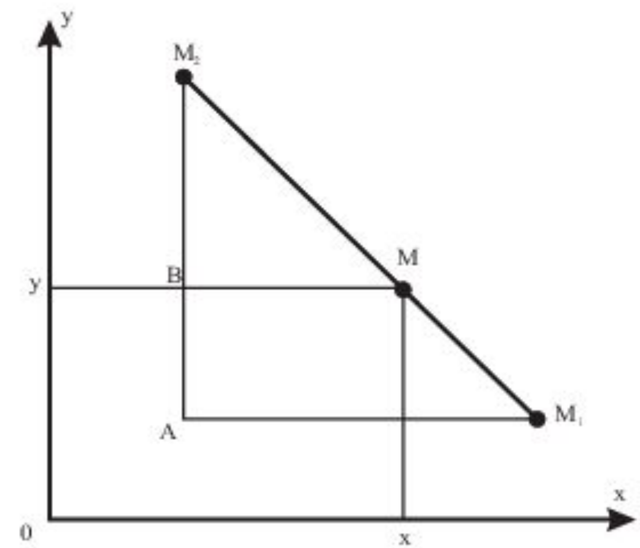

Рис. 17. *Координатная плоскость Oxy*

Заметим, что обычно горизонтальную ось называют осью абсцисс и устанавливают положительное направление направо, а вертикальную ось называют осью ординат и устанавливают положительное направление вверх, как на рис. 17. Оси Ox и Oy делят координатную плоскость на четыре четверти (на четыре квадранта): в I-й $x > 0$, $y > 0$, во II-й $x < 0$, $y > 0$, в III-й $x < 0$, $y < 0$, в IV-й $x > 0$, $y < 0$. Запись $M(1; 2)$ будет означать, что точка M имеет абсциссу 1 и ординату 2.

2.4. Положение точки в пространстве

В декартовой системе координат положение точки в пространстве определяется тремя числами. Зададим в пространстве три взаимно перпендикулярные числовые оси Ox, Oy, Oz, имеющие общее начало O (совпадающее с точкой их пересечения). Оси назовем координатными осями: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. Координатное пространство обозначим $Oxyz$.

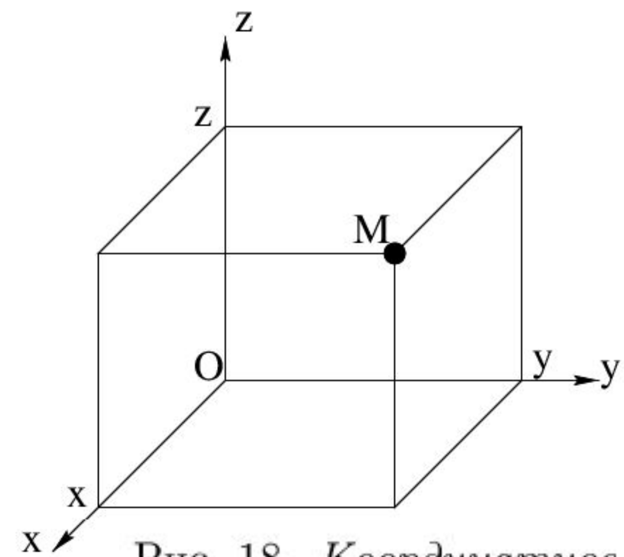

Рис. 18. *Координатное пространство* $Oxyz$

Произвольная точка M пространства $Oxyz$ имеет три координаты: координата x – её проекция на ось Ox (пересечение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно оси Ox, с этой осью), координата y – её проекция на ось Oy и координата z – её проекция на ось Oz (рис. 18). Упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$ называется прямоугольными или декартовыми координатами точки M в пространстве.

Очевидно, между точками в пространстве $Oxyz$ и упорядоченными тройками чисел существует взаимно-однозначное соответствие. Координаты x, y, z называются аналогично осям – абсцисса, ордината и аппликата соответственно. Кроме координатных осей можно рассмотреть также три взаимно перпендикулярные координатные плоскости Oxy, Oyz, Ozx, проходящие через оси, приведенные в обозначении. Мы будем стараться располагать координатные оси как показано на рис. 18.

2.5. Расстояние между двумя точками

Найдем расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве. Построив прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является отрезок M_1M_2, и с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 19), на основании известной теоремы курса стереометрии средней школы получим:

$$M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_1P^2 + M_1Q^2.$$

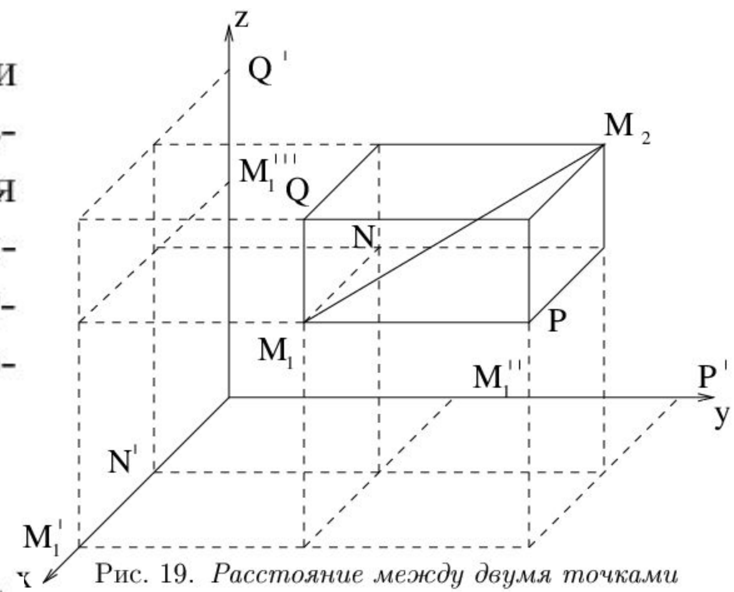

Рис. 19. *Расстояние между двумя точками в пространстве*

$$M_1N = M_1'N' = |x_2 - x_1|;\ M_1P = M_1''P' = |y_2 - y_1|;$$
$$M_1Q = M_1'''Q' = |z_2 - z_1|.$$

Подставив эти выражения в предыдущую формулу, получим:

$$M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2,$$

или: $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.5)$$

Если точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ лежат в плоскости Oxy, то формула для расстояния между этими точками принимает вид:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2.6)$$

Пример 2.2. *Найти расстояние* d_1 *между точками* $M_1(-1;-2;-3;)$ *и* $M_2(0;-2;5)$, *расстояние* d_2 *между точками* $M_3(2;3)$ *и* $M_4(-1;0)$ *и расстояние* d_3 *между началом координат* O *и точкой* $M_5(-2;1;3)$.

Р е ш е н и е: По формуле (2.5):

$$d_1 = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-2-(-2))^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{65}.$$

По формуле (2.6):

$$d_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

По формуле (2.5):

$$d_3 = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

2.6. Деление отрезка в заданном соотношении

Пусть дан отрезок M_1M_2, расположенный на плоскости Oxy (рис. 17). Определить точку M делящую этот отрезок в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, иначе говоря, по заданным координатам точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ определить координаты искомой точки $M(x;y)$.

Треугольники BM_2M и AM_2M, изображенные на рис. 17, будут подобными и, следовательно,

$$\frac{BM}{AM_1} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{MM_2}{M_1M_2} = \frac{MM_2}{M_1M+MM_2} = \frac{1}{\dfrac{M_1M}{MM_2}+1} = \frac{1}{\lambda+1},$$

$$\frac{BM_2}{AM_2} = \frac{y_2-y}{y_2-y_1} = \frac{MM_2}{M_1M_2} = \frac{1}{\lambda+1} \quad \text{и}$$

$$(x-x_2)(1+\lambda) = x_1-x_2 \qquad \text{и} \qquad (y-y_1)(1+\lambda) = y_2-y_1.$$

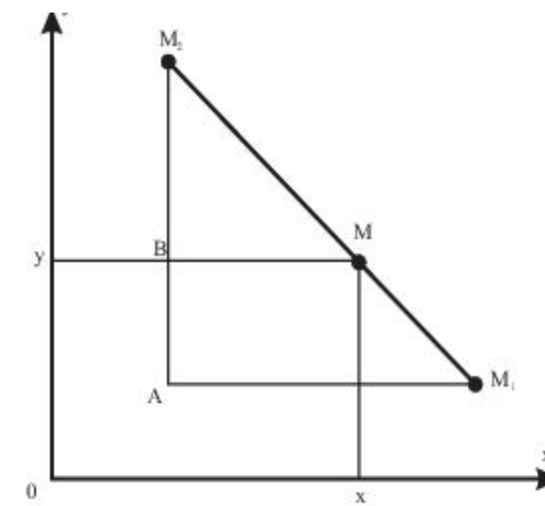

Рис. 17. *Координатная плоскость* Oxy

Выразив из последних соотношений x и y, получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \qquad (2.7)$$

В частности, при делении отрезка пополам $\lambda = 1$ и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пример 2.3. *Даны точки* $M_1(2; -3)$ *и* $M_2(-1; 2)$. *Найти координаты точки* $M(x; y)$, *делящей отрезок* M_1M_2 *в отношении* $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda = 5$.

Р е ш е н и е: По формулам (2.7) $x = \dfrac{2 + 5 \cdot (-1)}{6} = -\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{-3 + 5 \cdot 2}{6} = \dfrac{7}{6}$.

2.7. Параллельный перенос осей координат

Мы будем предполагать, что обе системы – декартовы (прямоугольные), причём одноимённые оси этих систем параллельны и одинаково направлены, и на каждой из осей выбрана одна и та же масштабная единица. На рис. 20 изображены две такие системы Oxy и O_1XY. Система O_1XY может быть получена параллельным переносом осей Ox и Oy.

$$x = X + x_0, \; y = Y + y_0. \qquad (2.8)$$

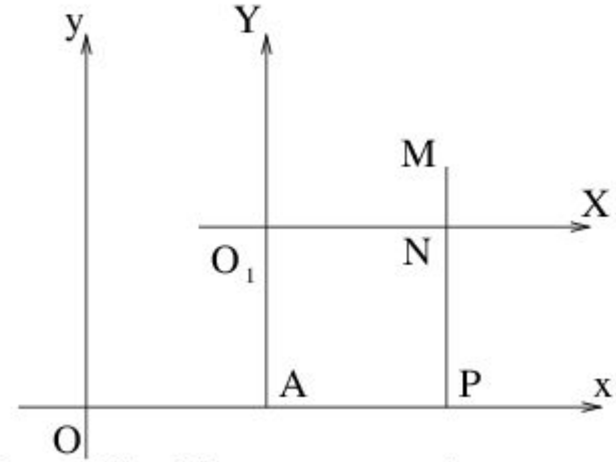

Рис. 20. *Параллельный перенос осей координат*

Пример 2.4. *Дана точка $M(2;-1)$ в системе Oxy. Найти её новые координаты X и Y при параллельном переносе осей, если новое начало в старой системе имеет координаты -1 и 3.*

Р е ш е н и е: По формулам (2.8) получим $2 = X - 1, \; -1 = Y + 3$, откуда $X = 3, Y = -4$.

2.8. Полярные координаты

Наряду с декартовыми координатами на плоскости употребляются полярные координаты, в которых положение точки M на плоскости задаётся (рис. 21) полярным углом φ и полярным радиусом r, называемыми полярными координатами точки M : $M(r;\varphi)$. Пусть на плоскости задана числовая ось l. Назовем её полярной осью, а её начало — точку O – полюсом.

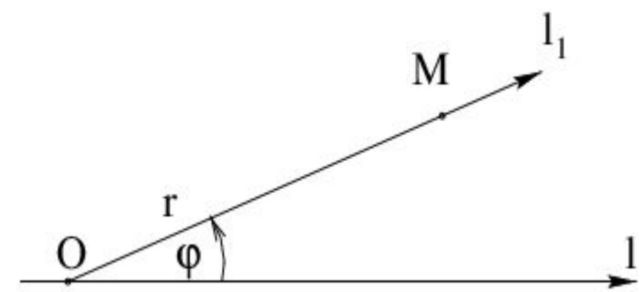

Рис. 21. *Полярные координаты*

Проведем через точку M и полюс ось l_1, начало которой совпадает с O (рис. 21), а положительное направление от O к M. Полярный угол φ – это угол между полярной осью l и осью l_1, отсчитываемый со знаком «+» против часовой стрелки и со знаком «−» по часовой стрелке. Полярный радиус r – это расстояние от O до точки M по оси $l_1 (r \geqslant 0)$. Если значение полярного угла φ ограничить промежутком $-\pi \leqslant \varphi < \pi$, то между точками плоскости и упорядоченными парами полярных координат $(r;\varphi)$ будет существовать взаимно-однозначное соответствие.

Пример 2.5. *Построить в полярной системе координат точки* $M_1(3; \frac{\pi}{6})$; $M_2(3; \frac{\pi}{2})$; $M_3(4; \pi)$; $M_4(3; 0)$.

Решение: Точки M_1, M_2, M_3, M_4, отмечены на рис. 22.

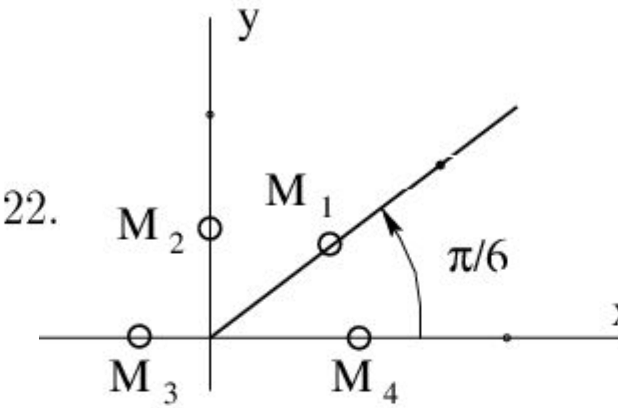

Рис. 22. *Решение примера 2.5*

Выведем формулы, связывающие декартовы и полярные координаты точки на плоскости, для чего расположим полярную ось l, совпадающую с осью Ox, а полюс O – с началом координат O (рис. 23).

Из $\triangle\, OMM'$ находим: $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \sin\varphi = \dfrac{y}{r},\ \ r^2 = x^2 + y^2,$ откуда :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2.9)$$

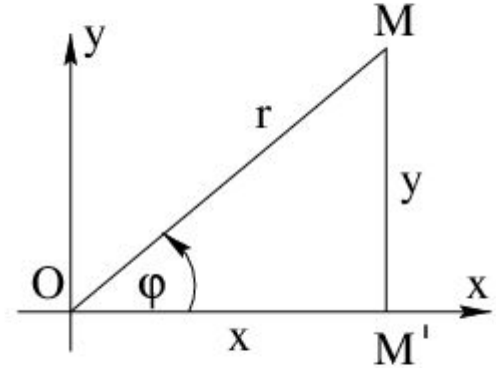

Рис. 23. *Связь декартовых и полярных координат*

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \ \ \text{при} \ \ x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \ \ \text{при} \ \ x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \ \ \text{при} \ \ y > 0,\ x = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \ \ \text{при} \ \ y < 0,\ x = 0. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Пример 2.6. *Найти полярные координаты точки M с декартовыми координатами $x = 2,\ y = -2$.*

Р е ш е н и е: По формулам (2.10) находим : $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$. По формуле (2.11) $\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $M\left(2\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Определение 35.1. *Поверхность, для которой одна из координат является постоянной, называется координатной поверхностью.*

Определение 35.2. *Линия, для которой все координаты, кроме одной, являются постоянными, называется координатной линией.*

Для декартовой системы координат координатными поверхностями являются плоскости, параллельные координатным плоскостям. Действительно, в соответствии с определением (35.1) их уравнения имеют вид: $x = x_0$, $y = y_0$ или $z = z_0$, это есть уравнения плоскостей, параллельных плоскостям Oyz, Oxz, Oxy соответственно.

Координатными линиями для декартовой системы координат являются прямые, параллельные координатным осям, получающиеся как пересечение координатных плоскостей.

Вообще можно заметить, что координатные линии являются пересечением координатных поверхностей.

Для сферических координат координатными поверхностями являются сферы с центром в начале координат ($\rho = \rho_0$), полуплоскости,

Цилиндрическая система координат

Наряду с декартовыми координатами часто применяются цилиндрические координаты. В этих координатах положение точки M в пространстве определяется заданием полярных координат r и φ её проекции M' на плоскость Oxy и аппликаты z точки M. Эти три числа r, φ и z называются цилиндрическими координатами точки M. Они связаны с её декартовыми координатами x, y, z следующими соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{35.1}$$

Для цилиндрических координат координатными поверхностями являются плоскости, перпендикулярные координатной оси Oz ($z = z_0$), полуплоскости, ограниченные осью Oz ($\varphi = \varphi_0$), и цилиндрические поверхности, осью которых является ось Oz ($r = r_0$). Последний факт объясняет название системы координат. Координатными линиями будут линии пересечения этих поверхностей.

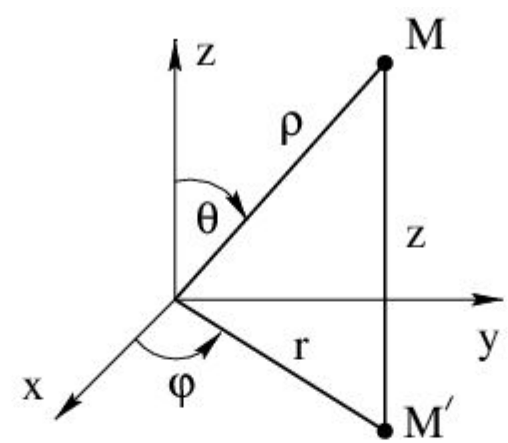

Рис. 2. *Цилиндрическая и сферическая системы координат*

Сферическая система координат

Кроме декартовых и цилиндрических координат в пространстве также применяются сферические координаты. В этих координатах положение точки M в пространстве определяется длиной ρ радиуса-вектора этой точки (полярный радиус), её долготой φ и широтой θ (рис. 2).

Долготой φ точки M называется полярный угол φ её проекции M' на плоскость Oxy; широтой θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ называется угол радиуса-вектора точки M с положительным направлением оси Oz.

Сферические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{35.2}$$

Для сферических координат координатными поверхностями являются сферы с центром в начале координат $(\rho = \rho_0)$, полуплоскости, ограниченные осью Oz $(\varphi = \varphi_0)$, и конусы с вершиной в начале координат и осью Oz в качестве оси симметрии $(\theta = \theta_0)$. Координатными линиями будут линии пересечения этих поверхностей. Название системы координат объясняется наличием сфер среди координатных поверхностей.

Спасибо за внимание