Простейшие тригонометрические уравнения

Мы приступаем к изучению тригонометрических уравнений — центральной темы всего тригонометрического раздела.

Пусть a — некоторое число. **Простейшие тригонометрические уравнения** — это уравнения следующих видов:

$$\cos x = a, \quad \sin x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Решить простейшее тригонометрическое уравнение — это значит описать множество значений переменной x, для которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение a.

Решение любого тригонометрического уравнения сводится, как правило, к решению одного или нескольких простейших тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения мы будем решать с помощью тригонометрической окружности.

Уравнение $\cos x = a$

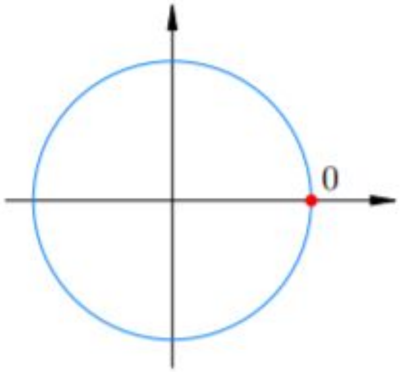
Напомним, что по определению $\cos x$ — это абсцисса точки x тригонометрической окружности, которая отвечает углу x. Этого достаточно для рассмотрения уравнения $\cos x = a$.

Если $a > 1$ или $a < -1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет решений. В самом деле, косинус не может принимать значений, по модулю превосходящих единицу.

Если же $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\cos x = a$ имеет решения, причём решений будет бесконечно много (вспомните предыдущую статью «Обратные тригонометрические функции»: прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \cos x$ в бесконечном множестве точек). Сейчас мы научимся описывать все эти решения.

1. $\cos x = 1$.

Нас интересуют точки тригонометрической окружности, которые имеют абсциссу 1. Легко видеть, что имеется лишь одна такая точка:



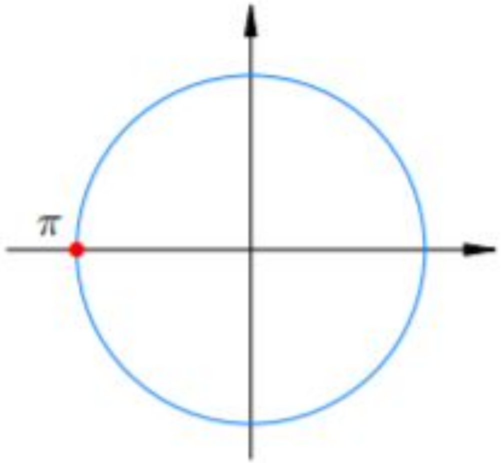
Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: $0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, 6\pi, -6\pi, \ldots$ Все перечисленные углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных углов 2π (то есть нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону).

Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой:

$$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

2. $\cos x = -1$.

На тригонометрической окружности имеется лишь одна точка с абсциссой -1:



Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающихся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, то есть на целое число полных углов. Следовательно, все решения уравнения $\cos x = -1$ записываются формулой:

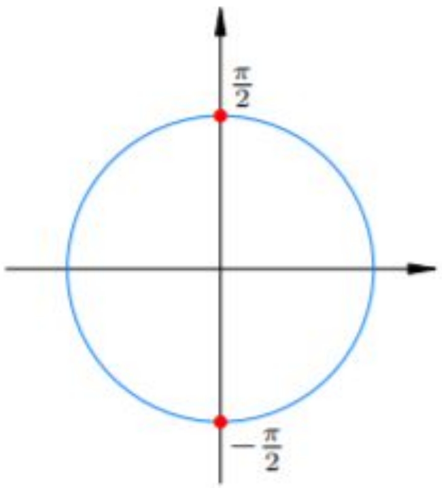
$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Заодно вспоминаем первое правило, сформулированное нами в статье «Тригонометрическая окружность»:

- *для описания множества углов, отвечающих одной точке тригонометрической окружности, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить $2\pi n$.*

3. $\cos x = 0$.

Отмечаем на тригонометрической окружности точки с нулевой абсциссой. Их две:



Эти точки образуют диаметральную пару (то есть служат концами диаметра тригонометрической окружности). Все углы, отвечающие точкам диаметральной пары, отличаются друг от друга на целое число углов π (то есть на целое число полуоборотов как в одну, так и в другую сторону).

Соответственно, вспоминаем второе правило из статьи «Тригонометрическая окружность»:

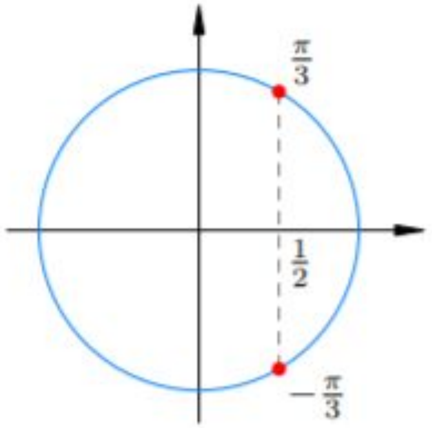
- *для описания множества углов, отвечающих диаметральной паре точек тригонометрической окружности, нужно взять один угол из этого множества и прибавить* πn.

Следовательно, все решения уравнения $\cos x = 0$ описываются формулой:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

4. $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой 1/2:



Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

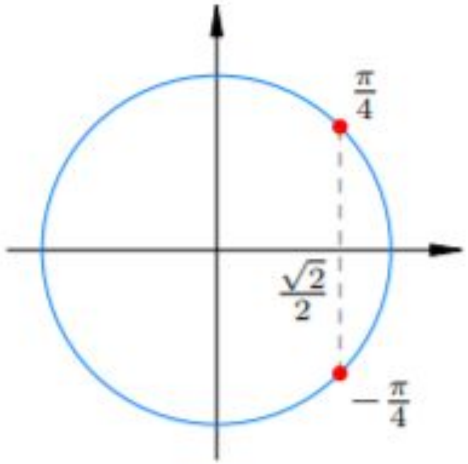
Все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Обе серии решений можно описать одной формулой:

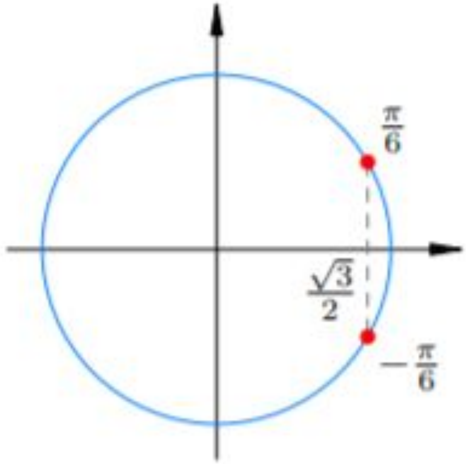
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

5. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



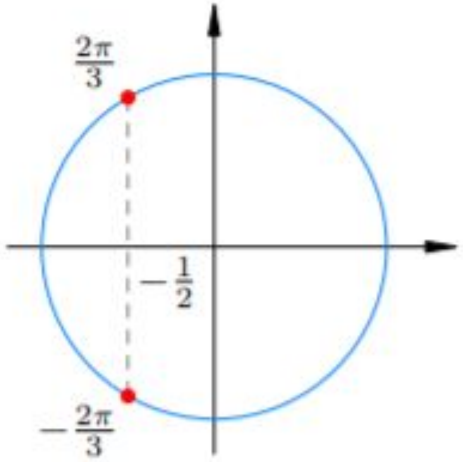
$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

6. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



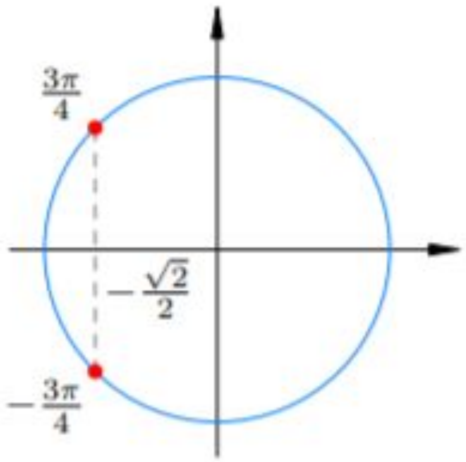
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

7. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.



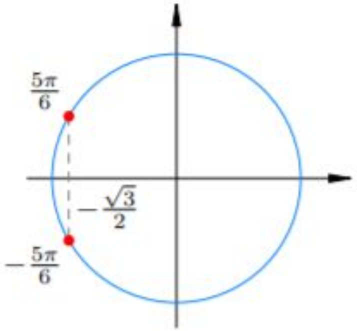
$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

8. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

9. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

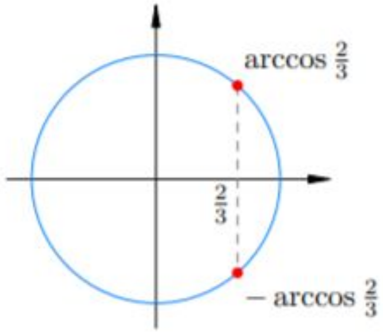


$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

До сих пор мы рассматривали уравнения, в правой части которых стояли табличные значения косинуса (а именно, 0, ± 1, $\pm 1/2$, $\pm\sqrt{2}/2$, $\pm\sqrt{3}/2$). Как быть в иных случаях?

10. $\cos x = \dfrac{2}{3}$.

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $2/3$:

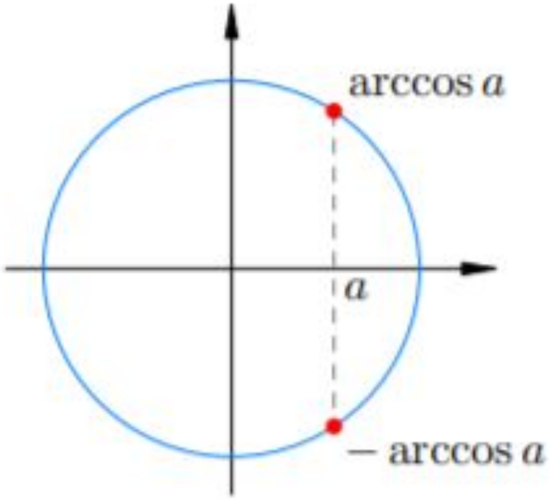


Верхняя точка отвечает углу $\arccos\frac{2}{3}$ (напомним, что значения арккосинуса принадлежат отрезку $[0;\pi]$). Стало быть, решения данного уравнения описываются формулой:

$$x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

12. $\cos x = a$.

Теперь ясно, как выглядит решение уравнения в общем случае (разумеется, при $|a| \leqslant 1$).



$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Данная формула обобщает все случаи, рассмотренные выше.

Уравнение $\sin x = a$

Для рассмотрения уравнения $\sin x = a$ достаточно определения синуса: $\sin x$ — это ордината точки x тригонометрической окружности, которая отвечает углу x.

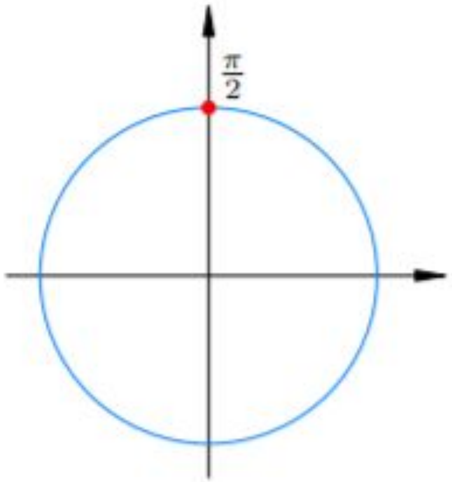
При $a > 1$ или $a < -1$ уравнение $\sin x = a$ не имеет решений, поскольку синус не может принимать значений, по модулю превосходящих единицу.

Если же $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет бесконечно много решений (снова вспомните статью «Обратные тригонометрические функции»: прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \sin x$ в бесконечном множестве точек).

Мы начинаем с уравнений, в правой части которых стоит табличное значение синуса.

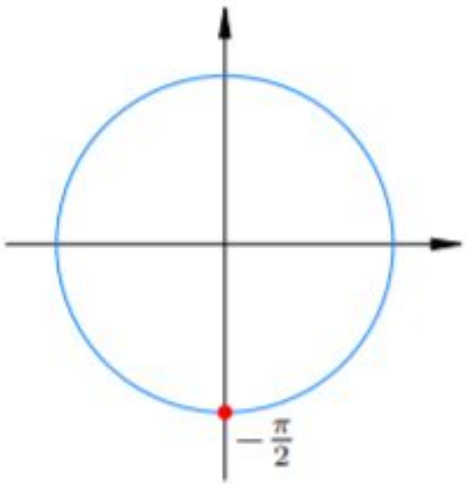
1. $\sin x = 1$.

На тригонометрической окружности имеется единственная точка с ординатой 1:



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

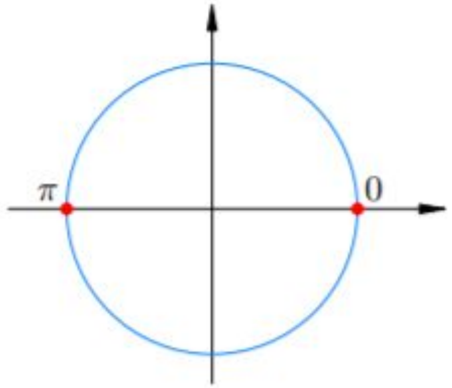
2. $\sin x = -1$.



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

3. $\sin x = 0$.

На тригонометрической окружности имеются две точки с нулевой ординатой:

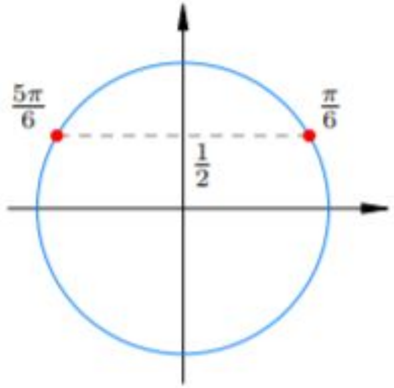


Решения данного уравнения описываются простой формулой:

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

4. $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Возникает горизонтальная пара точек с ординатой $1/2$:



Правой точке соответствуют углы:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Левой точке соответствуют углы:

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Обе серии решений x_1 и x_2 можно записать в виде совокупности:

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Оказывается, существует одна-единственная формула, объединяющая обе серии. Выглядит она так:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Давайте посмотрим, что получается при чётных k. Если $k = 2n$, то

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

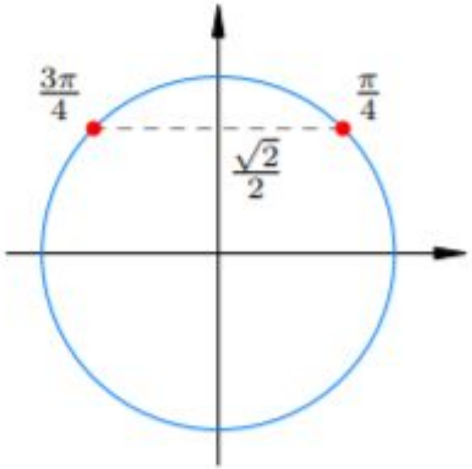
Мы получили первую серию решений x_1. А если k нечётно, $k = 2n + 1$, то

$$x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Это вторая серия x_2.

В качестве множителя при $(-1)^k$ обычно ставится правая точка, в данном случае $\pi/6$.

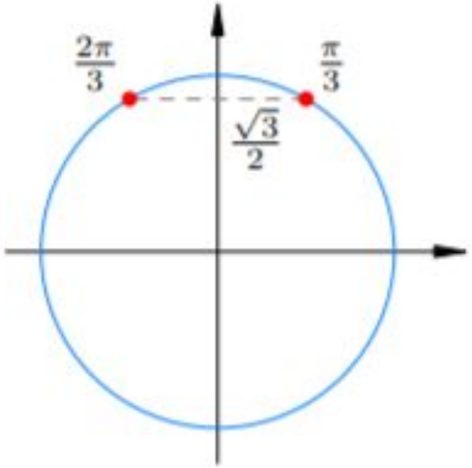
5. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

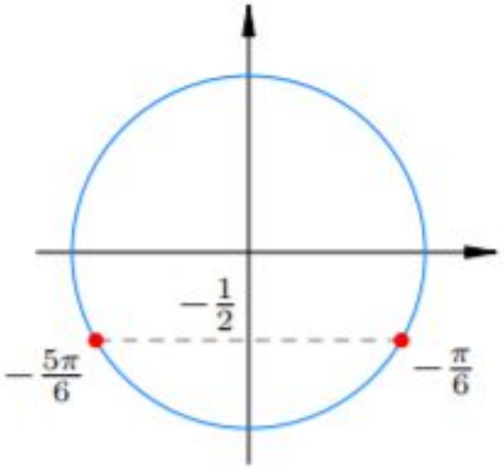
6. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

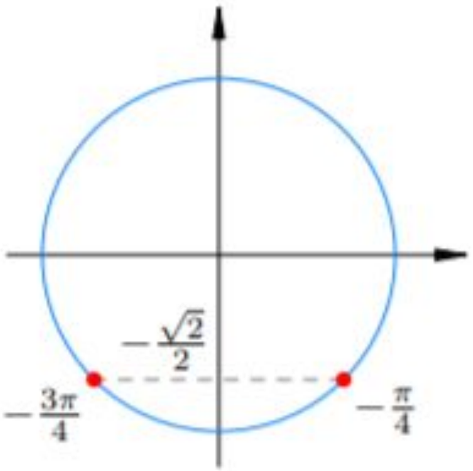
7. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.



$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

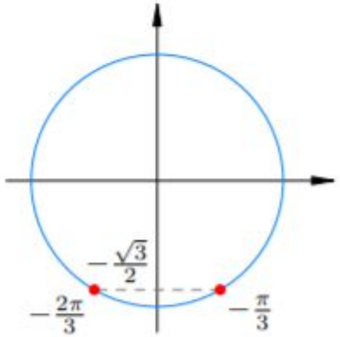
8. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ &x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

9. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



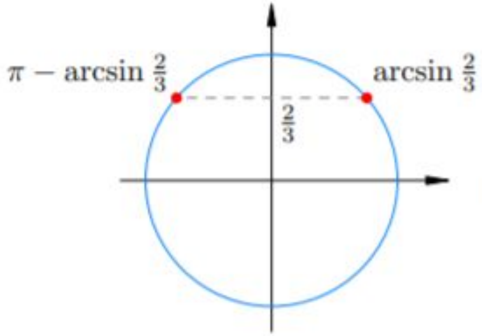
$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ &x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь перейдём к уравнениям с нетабличным значением синуса в правой части.

10. $\sin x = \dfrac{2}{3}$.

Имеем горизонтальную пару точек с ординатой $2/3$:



Правая точка отвечает углу $\arcsin\frac{2}{3}$ (напомним, что значения арксинуса принадлежат о
резку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). Обратите внимание на выражение для угла, отвечающего левой точке!

Записываем решения данного уравнения в виде совокупности:

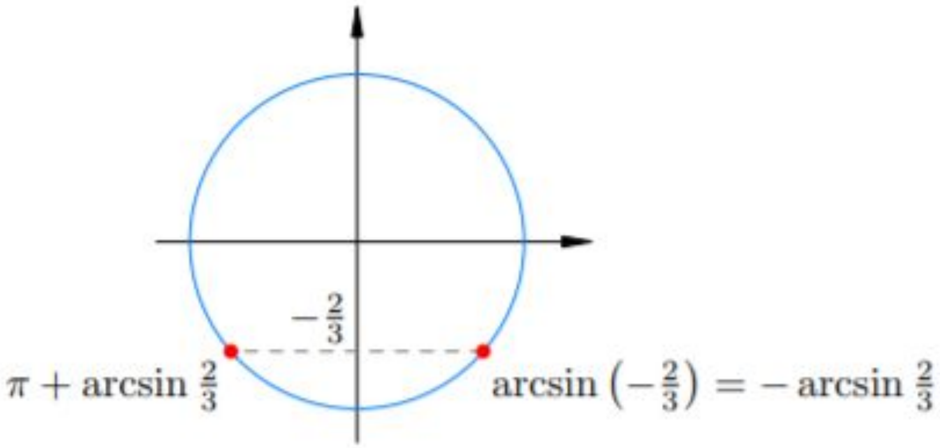
$$\left[\begin{aligned} &x = \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, \\ &x = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Объединяющая формула:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

11. $\sin x = -\frac{2}{3}$.

Смотрите рисунок и формулы. Вам уже не составит труда разобраться в этой ситуации. Мы воспользовались здесь нечётностью аркинуса.

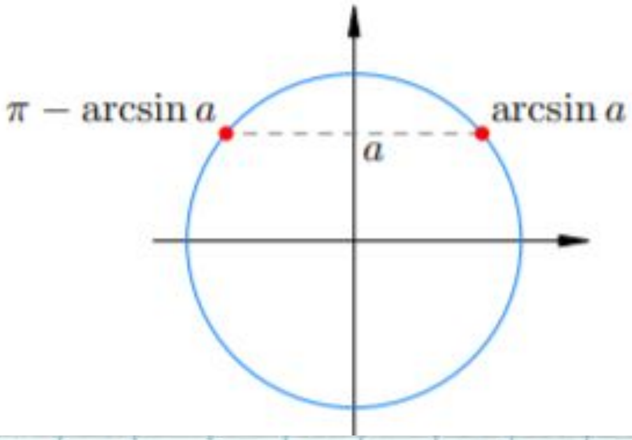


$$\left[\begin{aligned} &x = -\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, \\ &x = \pi + \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

12. $\sin x = a$.

Теперь нам ясно, как выглядят решения в общем случае (разумеется, при $|a| \leqslant 1$).



$$\left[\begin{aligned} &x = \arcsin a + 2\pi n, \\ &x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Вспомним, что тангенс может принимать любые значения (область значений функции $y = \operatorname{tg} x$ есть всё множество $\mathbb{R}$). Стало быть, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом a.

1. $\operatorname{tg} x = 0$.

Будучи записано в виде

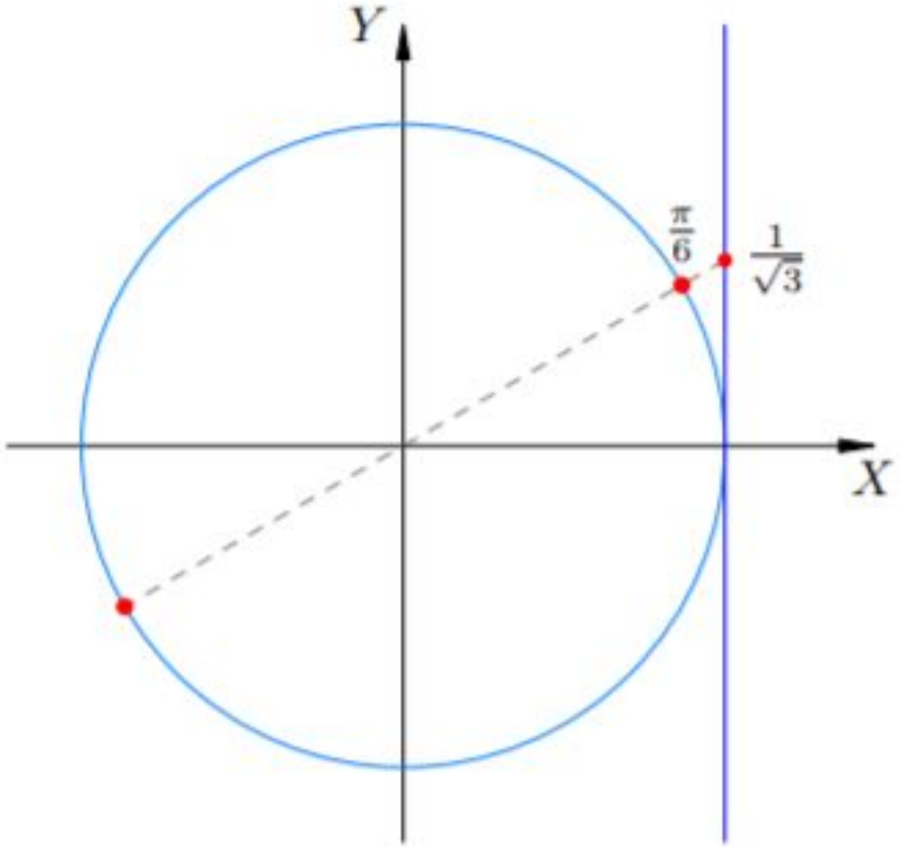
$$\frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$

данное уравнение равносильно уравнению $\sin x = 0$. Его решения, как мы знаем, имеют вид:

$$x = \pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

2. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

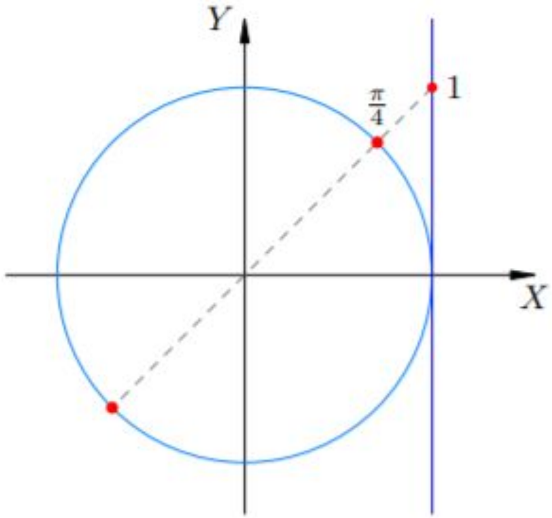
Здесь нам уже понадобится линия тангенсов. Имеем диаметральную пару:



Пишем ответ:

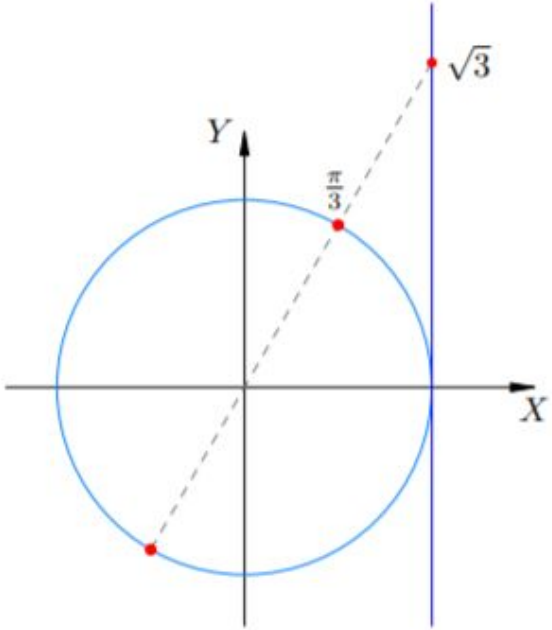
$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

3. $\operatorname{tg} x = 1.$



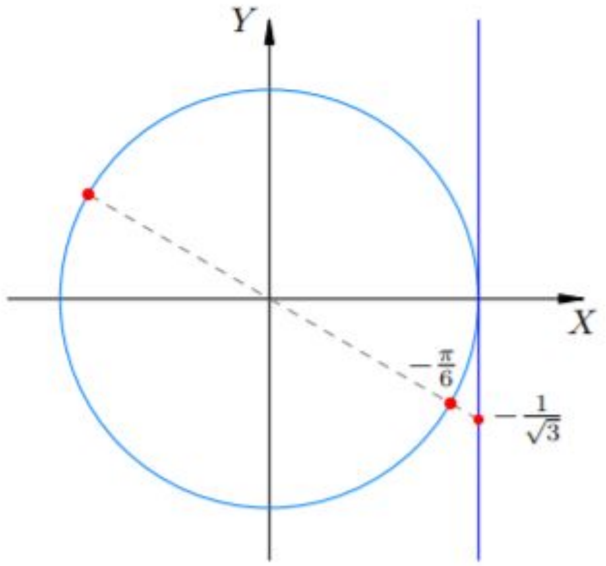
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

4. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$



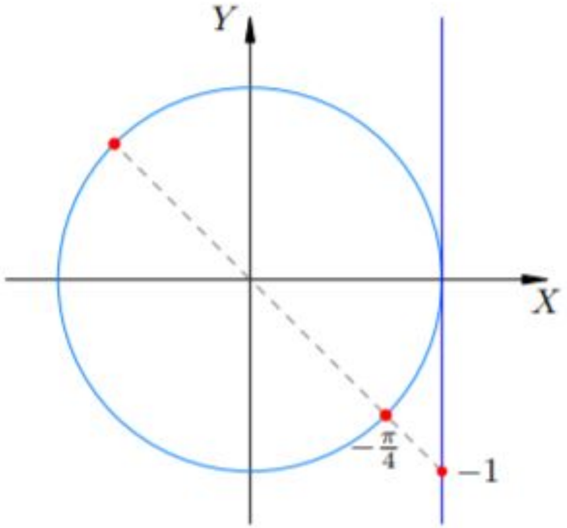
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

5. $\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



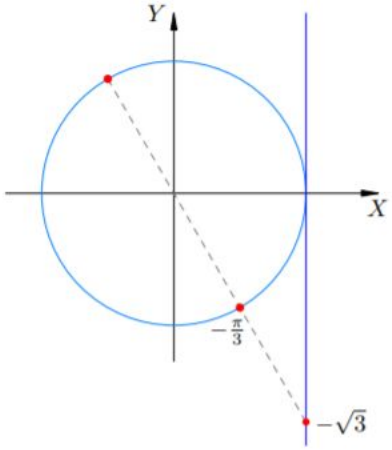
$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

6. $\operatorname{tg} x = -1$.



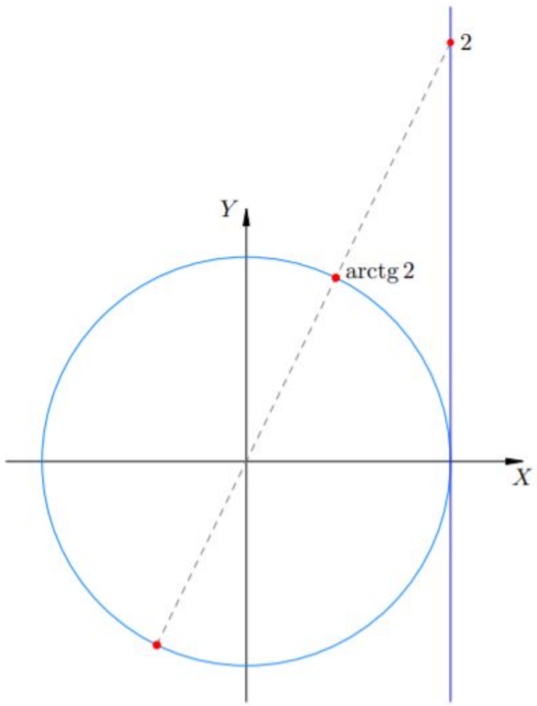
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

7. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.



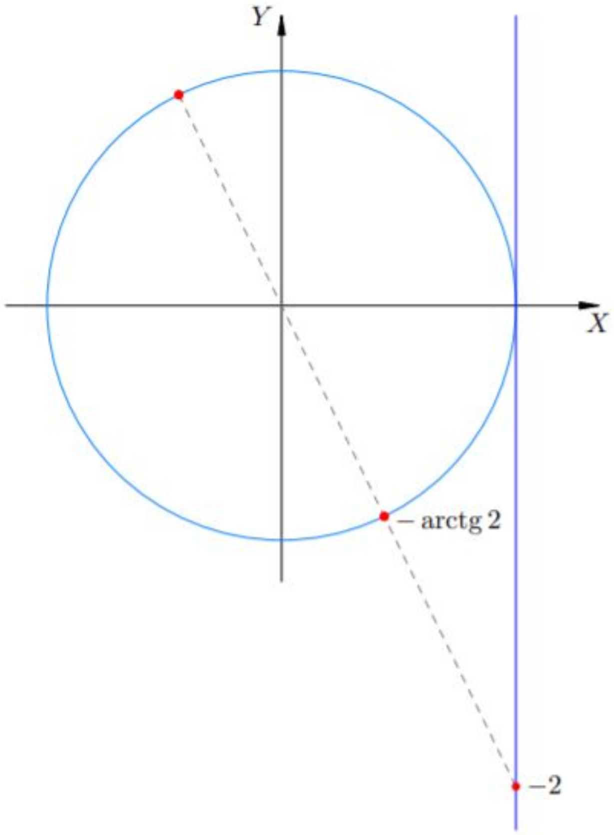
$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

8. $\operatorname{tg} x = 2$.



$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

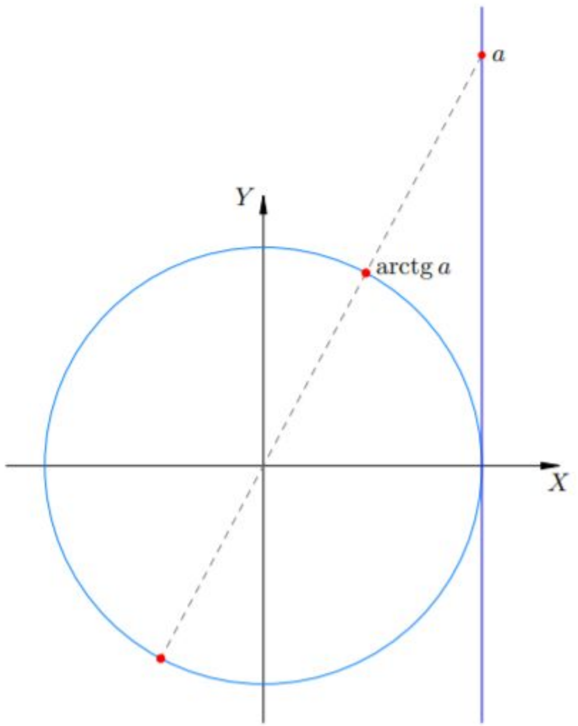
9. $\operatorname{tg} x = -2$.



$$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь мы воспользовались нечётностью арктангенса: $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$.

10. $\operatorname{tg} x = a$.



$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ можно не рассматривать отдельно, поскольку:

- уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$, будучи записано в виде $\cos x / \sin x = 0$, равносильно уравнению $\cos x = 0$ и потому имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$;
- при $a \neq 0$ уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$ и потому имеет решения $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

1. Решите уравнение:

а) $\cos 2x = 1$;

б) $\cos 3x = -1$;

в) $\sin \frac{x}{2} = -1$;

г) $\sin \frac{2x}{3} = 1$;

д) $\cos \frac{x}{4} = 0$;

е) $\sin 5x = 0$.

2. Решите уравнение:

а) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1;$

б) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1;$

в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1;$

г) $\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -1;$

д) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = 0;$

е) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0.$

3. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$;

б) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$;

в) $\operatorname{tg}2x=-1$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-1$;

д) $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=0$;

е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{9}\right)=0$.

4. Найдите решения уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $\sin x > 0$.

5. Найдите решения уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$.

6. Найдите решения уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие условию $\sin x > 0$.

7. Найдите решения уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$.

8. Найдите решения уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие условию $\sin x > 0$.

9. Найдите решения уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$.

10. Найдите решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $\cos x > 0$.

11. Найдите решения уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

12. Найдите решения уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие условию $\cos x > 0$.

13. Найдите решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

14. Найдите решения уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие условию $\cos x > 0$.

15. Найдите решения уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

16. Найдите решения уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, удовлетворяющие условию $\sin x > 0$.

17. Найдите решения уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

18. Найдите решения уравнения $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, удовлетворяющие условию $\sin x > 0$.

19. Найдите решения уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

20. Найдите решения уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, удовлетворяющие условию $\sin x > 0$.

21. а) Решите уравнение:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

22. а) Решите уравнение:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

23. а) Решите уравнение:

$$\sin 5x\cos 3x-\cos 5x\sin 3x=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$.

24. а) Решите уравнение:

$$\cos 6x \cos 4x + \sin 6x \sin 4x = -1.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[3\pi; 4\pi]$.

25. а) Решите уравнение:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

26. а) Решите уравнение:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 2\pi]$.

27. а) Решите уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

28. а) Решите уравнение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

29. а) Решите уравнение:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

30. а) Решите уравнение:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

31. Решите уравнение:

а) $|\sin x| = \dfrac{1}{2}$; б) $|\cos x| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

32. Решите уравнение:

а) $\sin x \cdot \sqrt{\cos x} = 0$; б) $\cos x \cdot \sqrt{-\sin x} = 0$;

в) $\sin \dfrac{3x}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$; г) $\cos 3x \cdot \sqrt{-\operatorname{tg} x} = 0$.

33. Решите уравнение:

а) $\sin x \sin 2x = 0$ б) $\cos x \cos 3x = 0$;

в) $(\operatorname{tg} x - 1)\cos 2x = 0$; г) $\cos x \operatorname{tg} 2x = 0$.

34. Решите уравнение:

а) $\sin x \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$; б) $\cos x \cdot \sqrt{6x - x^2 - 5} = 0$.

35. (*МГУ, ДВИ, 2011*) Решите уравнение:

$$(\sin x - \cos x)^2 = 2.$$

36. (*МГУ, химический ф-т, 2008*) Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2}\sin x} = 0.$$

37. (*МГУ, МШЭ, 2006*) Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{1 + 2\cos 2x} = 0.$$