Введение в анализ

§ 1. Предел функции

- **п. 1.1. Предел функции в точке**

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Определение 1. (на «языке последовательностей», или по Гейне).

Число А называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в *точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, n ∈ N ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0 (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, n ∈ N, сходится к числу А (т. е. $\lim_{n\to\infty} f\,(x_n)$ = А).

В этом случае пишут:

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = \mathrm{A}$$

или

$$\mathrm{f}(x) \to \mathrm{A} \text{ при } x \to x_0.$$

- **Определение 2. (на «языке $\varepsilon - \delta$», или по Коши)**.

Число А называется ***пределом функции в точке*** x_0 (или при $x \to x_0$), если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x$, такое что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству

$|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции:

$A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, если для любой ε окрестности точки А найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки А.

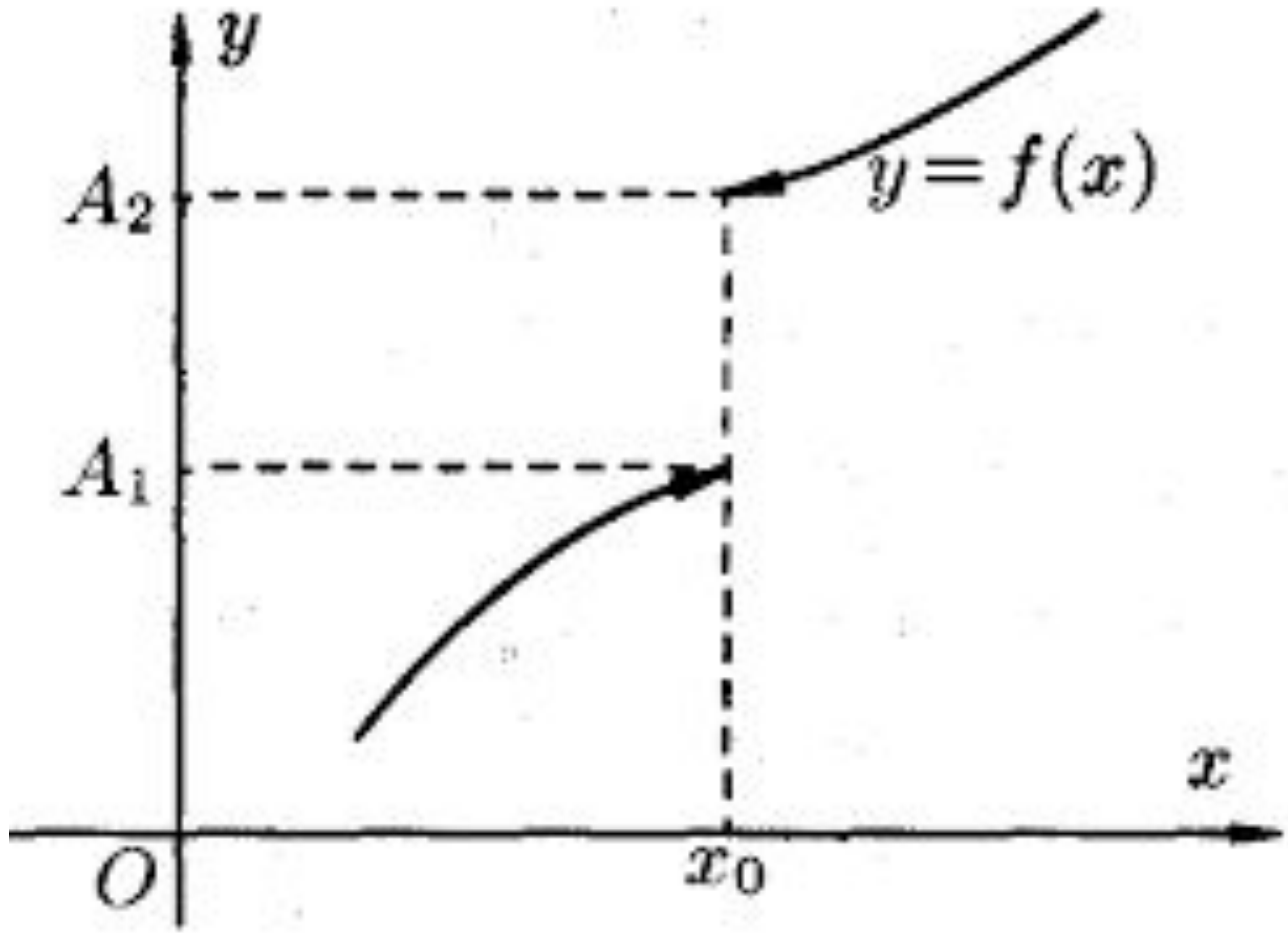


Рис. 1

п. 1.2. Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim_{x \to x_0} f(x)$ = A считается, что $x \to x_0$ любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

- Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

- Число $А_1$ называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева (левосторонним пределом)*** в точке x_0, если для любого число $\varepsilon >$ о существует число $\delta = \delta(\varepsilon) >$ о такое, что при $x \in (x_0 - \delta ; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - А_1| < \varepsilon$.

- Предел слева записывают так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \mathrm{A}_1$$

или:

$f(x_0 - 0) = \mathrm{A}_1$ (обозначение Дирихле)

(см. рис. 1)

Аналогично определяется *предел функции справа.*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \mathrm{A}_2$$

или:

$f(x_0 + 0) = \mathrm{A}_2$

- Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim_{x \to x_0} f(x)$ = А, то существуют и оба односторонних предела, причем А = A_1= A_2 .

- Справедливо и обратное **утверждение:** если существуют оба предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и они равны, то $\exists$ предел

A = $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и A= $f(x_0-0)$.

Если же A $\neq \mathrm{A}_1 \neq \mathrm{A}_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

п. 1. 3. Предел функции при $x \to \infty$

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число А называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ $\exists$ M = M $(\varepsilon) > \mathbf{0}$, что $\forall$ x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают: $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \infty} f(x)}$ **= A.**

Если $x \to \infty$, то пишут А = $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$,

если $x \to -\infty$, то – А = $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

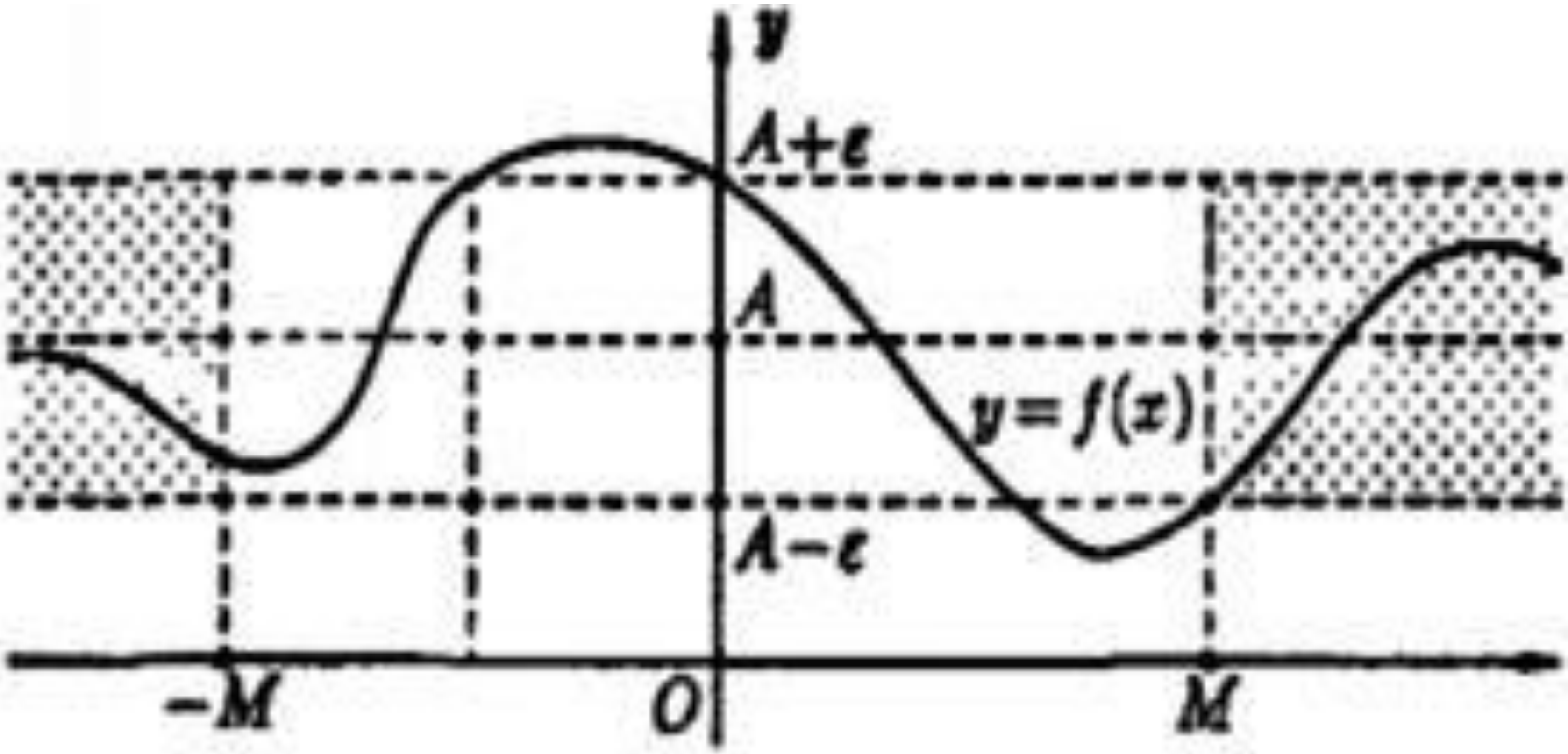


рис. 2

Геометрический смысл этого определения таков:

для $\forall\varepsilon > \exists\mathrm{M} > 0$, что при всех $x \in (-\infty; -\mathrm{M})$

или $x \in (\mathrm{M}; +\infty)$ соответствующие значения

функции $f(x)$ попадают в ε-окрестность точки А,

т. е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямым и y = A $+\varepsilon$ y =A$-\varepsilon$
(см. рис. 2).

п. 1. 4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой (б.б.) при*** $x \to x_0$, если для любого числа М > 0 ∃ число δ = δ(М) > 0, что ∀ x, удовлетворяющих неравенству

0< I x - x_0 I <δ, выполняется неравенство

I $f(x)$I >М .

Записывают:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Например, функция $y = \frac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Замечание:

Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$;

если лишь отрицательные значения, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

- Функция $y = f(x)$заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой при*** $x \to \infty$, если для любого числа M > 0 $\exists$ такое число N = N(M) > 0, что $\forall$ x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

§2.Бесконечно малые функции (б.м.ф.)

п. 2. 1.Определения и основные теоремы

Функция $y = \alpha(x)$называется ***бесконечно малой (б.м.) при*** $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \qquad (2.1)$$

- Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и т. д.

Теорема 2. 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция .

Теорема 2. 2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

- **Теорема 2. 2.** Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

- **Следствие 2. 1.** Так как всякая б.м.ф . ограничена, то из теоремы (2.2) вытекает : произведение двух б.м.ф . есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. 2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 2. 3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

Теорема 2.4.

Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha \neq 0$), то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ — бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая.

***Пример* 2. 1**. Показать, что функция

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x-1}$$

При $x \to 1$ является бесконечно малой.

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$, то функция $\varphi(x) = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$. Функция $g(x) = \sin^3 \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, ограничена $\left|\sin^3 \frac{1}{x-1}\right| \leq 1$.

Функция $f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x-1}$ представляет собой произведение ограниченной функции (g(x))на бесконечно малую (φ(x)). Значит, $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to 1$.

Теорема 2. 5.

Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Теорема 2. 6.

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Теорема 2. 7.

Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}\quad\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right)$$

Следствие 2. 3. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Доказательство: пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ = A и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ =B. По теореме 2.5 имеем:

$$0 = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x)) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{A} - \mathrm{B}.$$

Отсюда A $-$B$=0$, т. е. $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, ч. т. д.

- **Следствие 2. 4.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела :

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

$$c = const$$

- **Следствие 2. 5**. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \to x_0} f(x))^n.$$

В частности, $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0{}^n, \mathrm{n} \in N$

***Пример* 2. 2.** Вычислить:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7).$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7) =$$

$$= \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 7 =$$

$$= 3(\lim_{x\to 1} x)^2 - 2(\lim_{x\to 1} x) + 7 = 3 \cdot 1 - 2 + 7 = 8.$$

***Пример* 2. 3**. Вычислить:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}.$$

Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x \to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$.

- Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x - 2 \neq 0$

$(x \to 2, \text{но } x \neq 2)$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left[\frac{0}{0}\right] \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{\lim_{x \to 2}(x+16)}{\lim_{x \to 2}(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} == -9.$$

***Пример* 2. 4**. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Решение: для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{2}.$$

При решении подобного вида примеров удобно пользоваться правилом:

$$\begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}$$

п 2. 2. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция y = sin x при $x \to \infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В. таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема 2. 8. (о пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу.

т. е. если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = A,$$

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{, то}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Теорема 2. 9. (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то $\exists$ соответственно её левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ или её правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$.

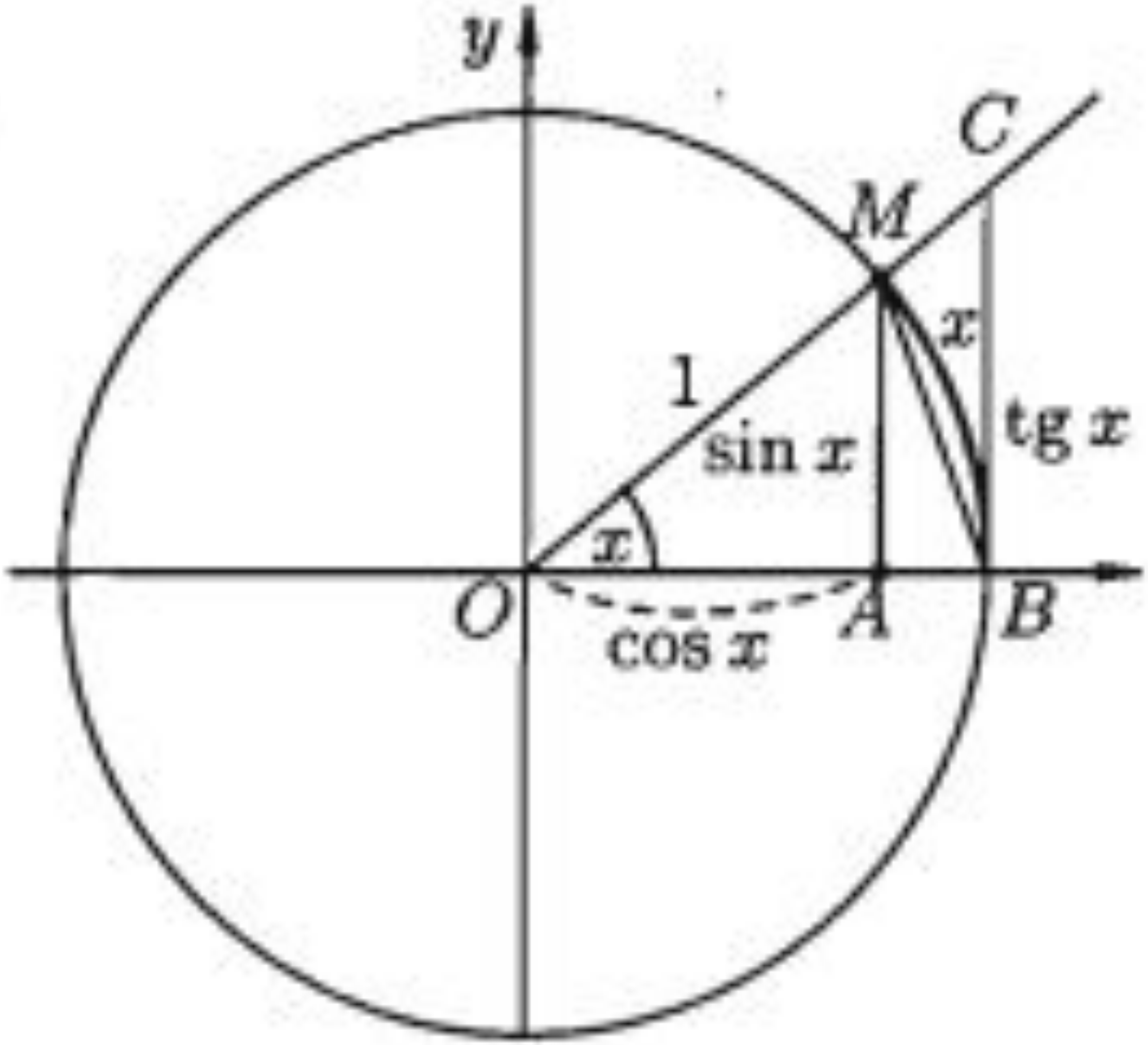
- **Следствие 2. 6**. Ограниченная монотонная последовательность x_n, n Є N, имеет предел.

п 2. 3. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Называемый ***первым замечательным пределом***. Читается: *предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.*


y
C
M
x
1
tg x
sin x
x
O
A
B
cos x

Доказательство:

Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x .

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке IAMI = sin x, дуга MB численно равна центральному углу x, $|\mathrm{BC}|$= tg$x$. Очевидно, имеем $S \, \Delta \, \text{мов}$ < S сектора MOB < S$_{\Delta \, COB}$

- Из геометрии известно:

$$\frac{1}{2}sinx \ < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx \ |: \frac{1}{2}sinx \ > 0,$$

получим $1 < \dfrac{x}{sinx} < \dfrac{1}{cosx}$.

- То, по рассмотренной выше теореме 2.8 **(о пределе промежуточной функции существования пределов)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пусть теперь $x<0$. Имеем: $\dfrac{sinx}{x}=\dfrac{\sin(-x)}{-x}$, где $-\mathrm{x}>0$.

Поэтому $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, ч. т. д.

***Пример* 2. 5.**

Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$.

Решение :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left\{\begin{matrix} 3x = t \\ x \to 0 \Rightarrow t = 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{2\frac{t}{3}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{3}{2} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} .$$

п. 2. 4. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = (1+\frac{1}{n})^n, n \in N$:

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e\,. \qquad (2.5)$$

Неопределенность вида [1^∞].

- Докажем, что к числу **е** стремится и функция

$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ при $x \to \infty$ ($x \in R$):

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e. \qquad (2.6)$$

- Доказательство:

пусть $x \to +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leq x \leq n+1$, где $n = |x|$- это целая часть x. Отсюда следует

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n},$$

- поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

- По признаку **(о пределе промежуточной функции)** существования пределов

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e. \qquad (2.7)$$

Пусть $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\left\{\begin{matrix}-x=t\\ x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty\end{matrix}\right\}=$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{1} =$$

$$= e \cdot 1 = e. \qquad (2.8)$$

Из равенств (2.7) и (2.8) вытекает равенство (2.6).

Если в равенстве (2.6) положить $\frac{1}{x} = \alpha$

($\alpha \to 0$ при $x \to \infty$), то оно равенство (2.6) запишется в виде

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \qquad (2.9)$$

- Равенства (2.6) и (2.9) называются ***вторым замечательным пределом***. Они широко используются при вычислении пределов. В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием ***e***. Функция $y = e^x$ называется ***экспоненциальной***, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

***Пример* 2.6.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}$.

Решение:

Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x} = \left\{\begin{array}{c} x = 2t \\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \end{array}\right\} =$

$= \lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{2t} =$

$= \lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{t} \cdot \lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^{t} = e\cdot e = e^{2}.$

п. 3. 1. Сравнение бесконечно малых функций

Две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б.м.ф. т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0.$$

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \mathrm{A} \neq 0(\mathrm{A} \in \mathrm{R})$, то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка.*

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется *бесконечно малой более высокого порядка,* чем β.

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется *бесконечно малой белее низкого порядка*, чем β.

4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называют *несравнимыми бесконечно малыми*.

п. 3. 2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x \to x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например,

$sinx \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$;

$tgx \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$.

- **Теорема 3. 1.** Предел отношения двух бесконечно малых функций ***не изменится***, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Доказательство:

Пусть $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta'}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} ,$$

т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

- Очевидно также, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta'}.$$

***Пример 3*. 1**. Покажем, что

$1 - cosx \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{2sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ (\frac{x}{2} \to 0)}} \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

п. 3. 3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Вычисление пределов

Для раскрытия неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ часто бывают полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

- Как известно, $sinx \sim x$ при $x \to 0$, $tgx \sim x$ при $x \to 0$. Приведем еще примеры эквивалентных б.м.ф.

Пример 3. 2.

Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsinx}{x}$.

Решение: Обозначим $arcsinx = t$. Тогда $x = sint$ и $\mathrm{t} \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = \lim_{\mathrm{t} \to 0} \frac{t}{sint} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{sint}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $arcsinx \sim x$ при $x \to 0$.

Ниже приведены важнейшие эквивалентности, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
8. $\ln(1 + x) \sim x$ $(x \to 0)$;
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
10. $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$;

 в частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

Пример 3. 3. Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg2x}{sin3x} =$

$$= \left\{ \begin{array}{c} x \to 0 \\ 2x \to 0 \\ 3x \to 0 \\ sin3x \sim 3x \\ tg2x \sim 2x \end{array} \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Приближенные вычисления

Если $\alpha \sim \beta$, то, отбрасывая в равенстве $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$бесконечно малую более высокого порядка, т. е. $\alpha - \beta$, получим приближенное равенство $\alpha \approx \beta$.

Оно позволяет выражать одни бесконечно малые через другие.

- Приведенные выше важнейшие эквивалентности служат источником ряда приближенных формул. Приведенные формулы справедливы при малых x, и они тем точнее, чем меньше x.

- Например, графики функций $y = tgx$ и $y = x$ в окрестности точки 0 практически не различимы (см. рис. 4), а кривая $y = \sin x$ в окрестности точки 0 сливается с прямой $y = x$ (см. рис. 5).

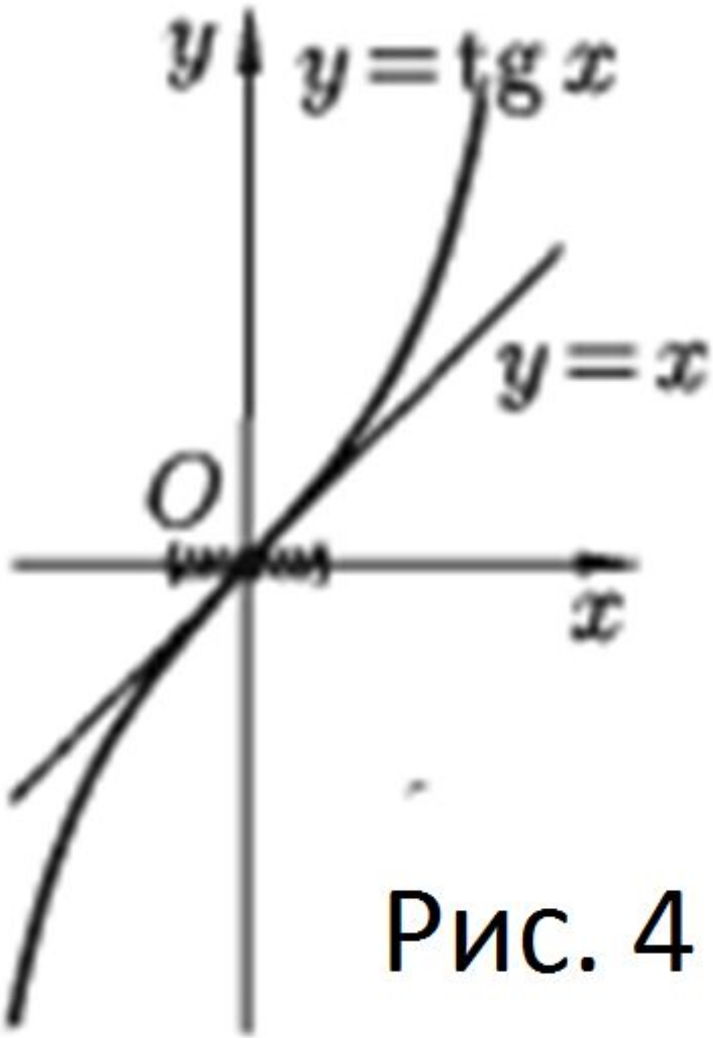
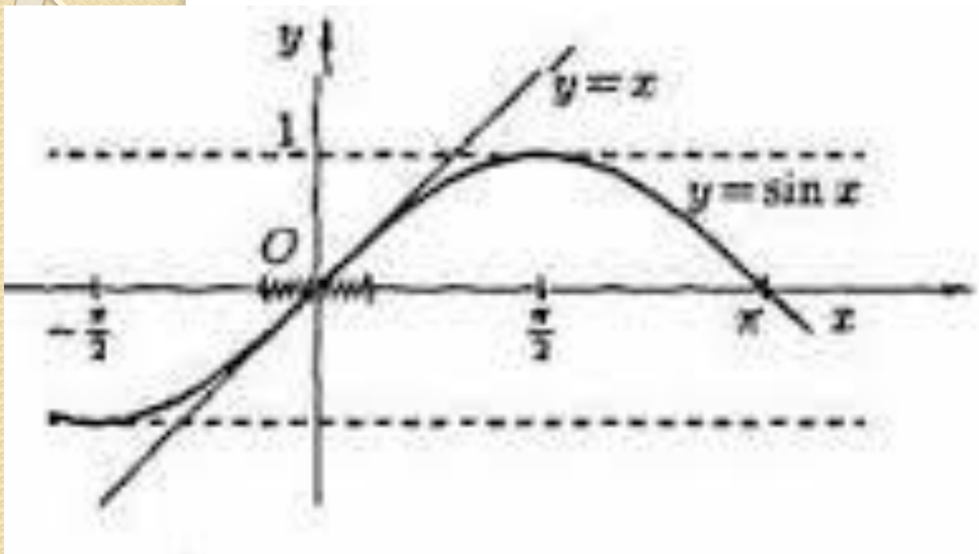


Рис. 4

$$tgx \approx x (x \to 0)$$

На рисунке 6 проиллюстрированы некоторые из важнейших эквивалентностей, о которых говорилось выше.



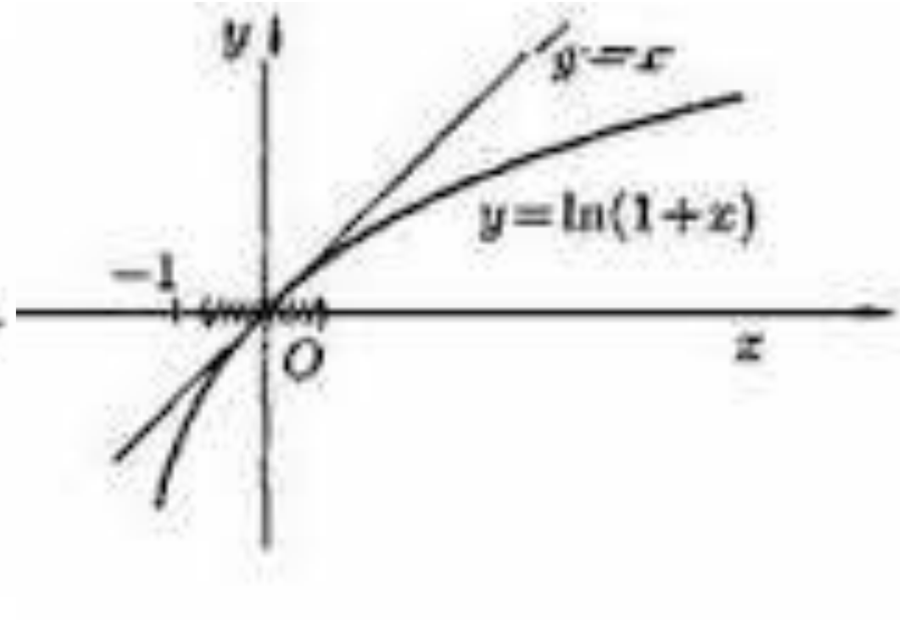


Рис.5

$sinx \approx x(x \to 0)$

Рис.6

$ln(1 + x) \approx x(x \to 0)$

***Пример 3*. 4**. Найти приближенное значение для $ln1{,}032$.

Решение:

$\ln 1{,}032 = \ln(1 + 0.032) \approx 0.032$

Для сравнения результата по таблице логарифмов находим, что $ln1{,}032 = 0{,}031498 \ldots$

п. 4. 1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, если ∃ предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (4.1)

Равенство (4.1) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. выполняется равенство (4.1).

- Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство (4.1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0). \qquad (4.2)$$

Это означает, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Например, $\lim_{x\to 0} e^{\frac{sinx}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}} = e$.

В первом равенстве функция и предел поменялись местами (см. (4.2))

в силу непрерывности функции $\boldsymbol{e^{x}}$.

Пример 4. **1**. Вычислить $A = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln(\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

- Отметим, что $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$.Для любого $x \in (a; b)$ разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** *x в точке x_0* и обозначается Δx: $\Delta x = x - x_0$.

Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

- Разность соответствующих значений функций $f(x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции*** *$f(x)$ в точке* x_0 и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$):
$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$(см. рис. 7).

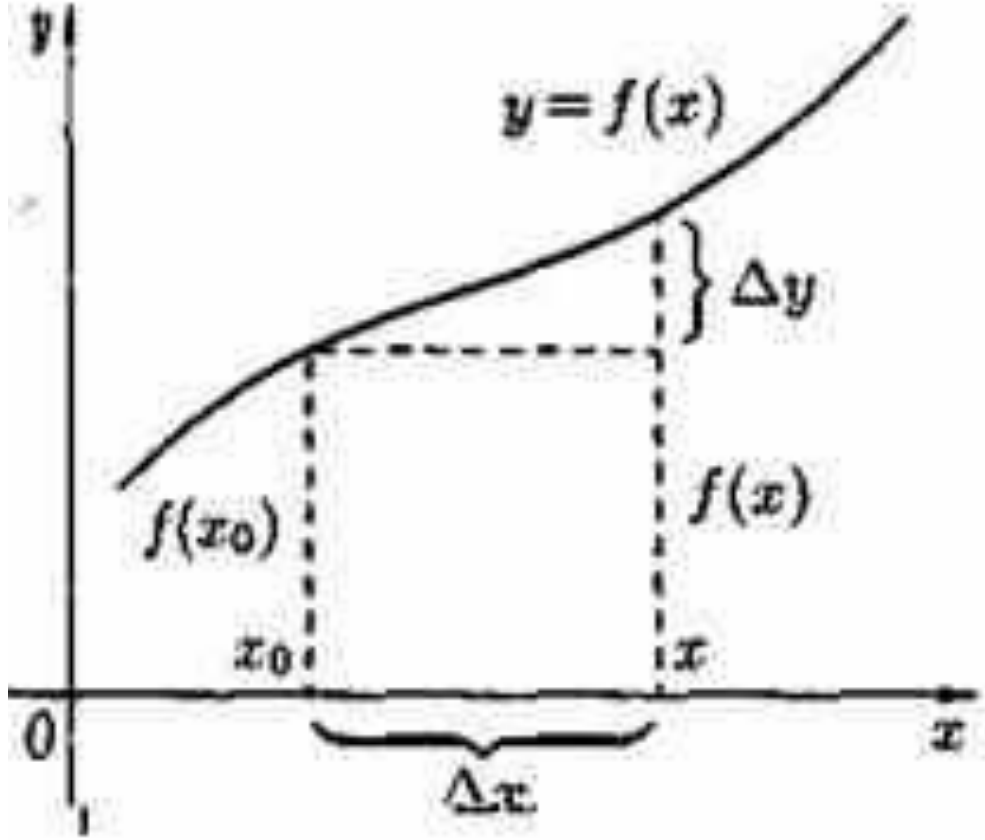


рис.7

Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Запишем равенство (4.1) в новых обозначениях. Так как условия $x \to x_0$ и $x - x_0 \to 0$ одинаковы, то равенство (4.1) принимает вид $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (4.3)$$

Определение 3.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется равенство ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$), т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

***Пример* 4. 2**. Исследовать на непрерывность функцию $y = sinx$.

Решение: Функция $y = sinx$ определена при всех $x \in R$. Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - sinx =$$

$$= 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot sin\frac{\Delta x}{2}.$$

- Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot sin\frac{\Delta x}{2} = 0,$$

так как произведение ограниченной функции и б.м.ф есть б.м.ф. Согласно определению (4.3), функция $y = sinx$ непрерывна в точке x. Аналогично доказывается, что функция $y = cosx$ также непрерывна.

п. 4. 2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале (а, Ь)*, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

- Функция $y = f(x)$ ***называется непрерывной на отрезке*** *[a, Ь]*, если она непрерывна на интервале (а, Ь) и в точке $x = \text{a}$ ***непрерывна справа***

(т.е. $\lim\limits_{x \to a+o} f(x) = f(\text{a})$) , а в точке

$x = b$ ***непрерывна слева***

(т.е. $\lim\limits_{x \to b-o} f(x) = f(\text{b})$).

п. 4. 3. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются ***точками разрыва этой функции***.

Если $x = x_0$- точка разрыва функции $y = f(x)$,то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции:

1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0. Например, функция $y = \frac{1}{x-2}$ не определена в точке $x_0 = 2$.

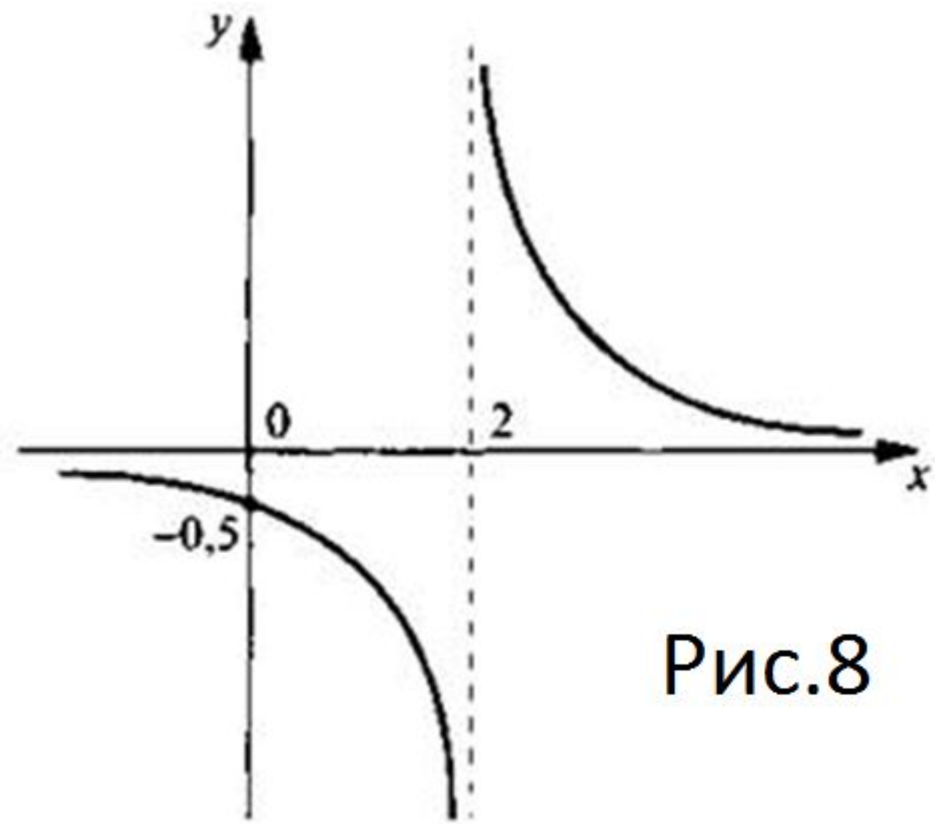


Рис.8

2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to x_0$.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ 2 - x, & \text{если } \quad 2 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

- определена в точке $x_0 = 2$ и ($f(2)$=0), однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв, т. к. эта функция не имеет предела при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 1, \qquad \text{а} \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = 0.$$

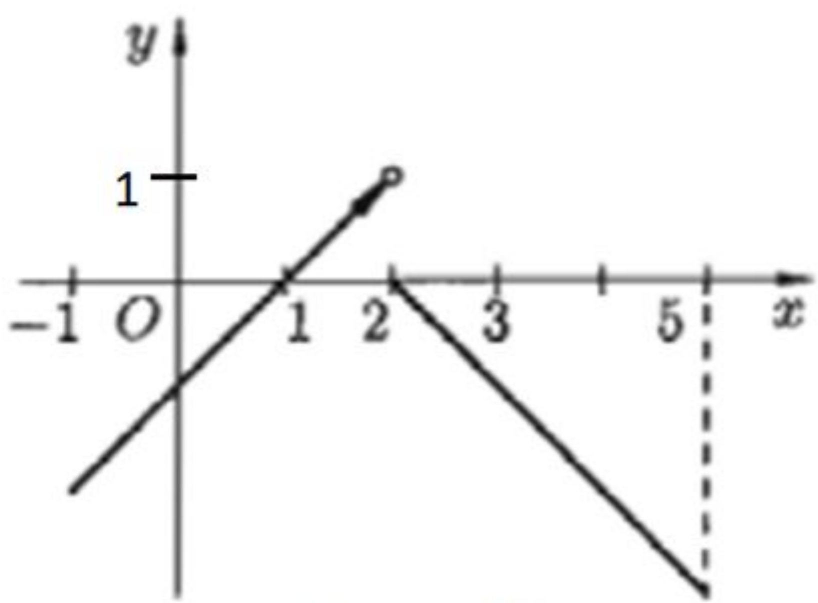


Рис. 9

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Например, функция

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, \text{если } x \neq 0; \\ 2, \quad\quad \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 0$ - точка разрыва:

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$, а $g(x_0) = g(0) = 2$.

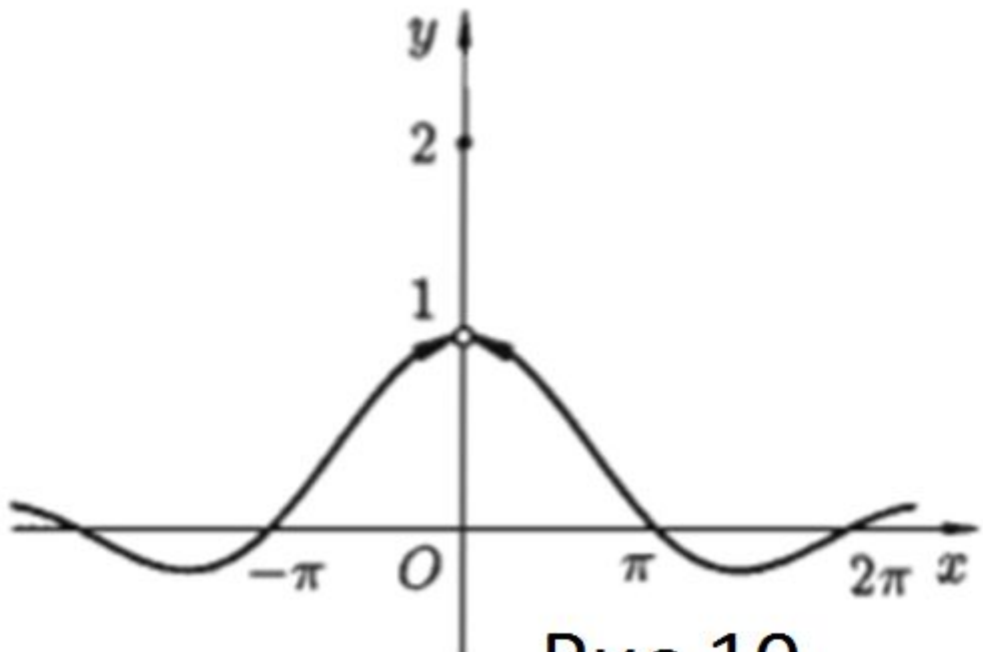


Рис.10

- Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва*** первого рода функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \text{А1} \quad (4.4.) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \text{А2} \quad (4.5.).$$

- При этом:

а) если A1=A2, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва;*

б) если A1$\neq$ A2, то точка x_0 называется *точкой конечного разрыва или точкой скачка.* Величину |A1-A2| называют ***скачком*** функции в точке разрыва I рода.

- Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва II рода*** функции $y = f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен $\boldsymbol{\infty}$.

- 1. Обратимся к функциям, рассмотренным выше: $y = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$ – точка разрыва второго рода. (См. рис. 8).

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } -1 \le x < 2, \\ 2 - x, & \text{если } \quad 2 \le x \le 5, \end{cases}$$

$x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода, скачок функции равен $|1 - 0| = 1$. (См. рис. 9).

3. Для функции

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, \text{если } x \neq 0; \\ 2, \quad\quad \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$x_0 = 0$ является точкой устранимого разрыва первого рода. Положив $g(x) = 1$ (вместо $g(x) = 2$) при $x = 0$, разрыв устранится , функция станет непрерывной . (См. рис. 10).

***Пример* 4. 3**. Дана функция $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$.

Найти точки разрыва, выяснить их тип.

Решение: Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$. Очевидно,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 3; \\ -1, & \text{при } x < 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = -1$.

Поэтому в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода . Скачек функции в этой точке равен $1 - (-1) = 2$.

п. 4. 4. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций

***Теорема* 3. 2.** Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых знаменатель равен нулю).

Теорема $\mathbf{3.3.}$ Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f\big(\varphi(x)\big)$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

<u>Замечание.</u> *Можно доказать, что* ***все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях*** x***, для которых они определены.***

Элементарной называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций.

Доказательство.

В силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. при $x \to x_0$ имеем $u \to u_0$. Поэтому вследствие непрерывности функции $y = f(u)$ имеем:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{x \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Это и доказывает , что сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

- ***Теорема* $\mathbf{3.4}$.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[\mathrm{a}; b]$ оси Ox , то обратная функция $y = \varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[\mathrm{c}; d]$ оси Oy (без доказательства).

Из приведенных выше теорем следует:
всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, где они определены.

Пример 4. 4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{ctgx}$.

Решение: Функция 2^{ctgx} непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$, поэтому

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 2^{ctg\,x} = 2^{ctgx\frac{\pi}{4}} = 2^1 = 2.$$

п. 4. 5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств.

Теорема 3. 5.(Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего (нб) и наименьшего (нм) значений.

- Изображенная на рисунке функция $y = f(x)$непрерывна на отрезке [а; Ь], принимает свое наибольшее значение М в точке x_1, а наименьшее m - в точке x_2. Для любого $x \in$ [а; Ь] имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

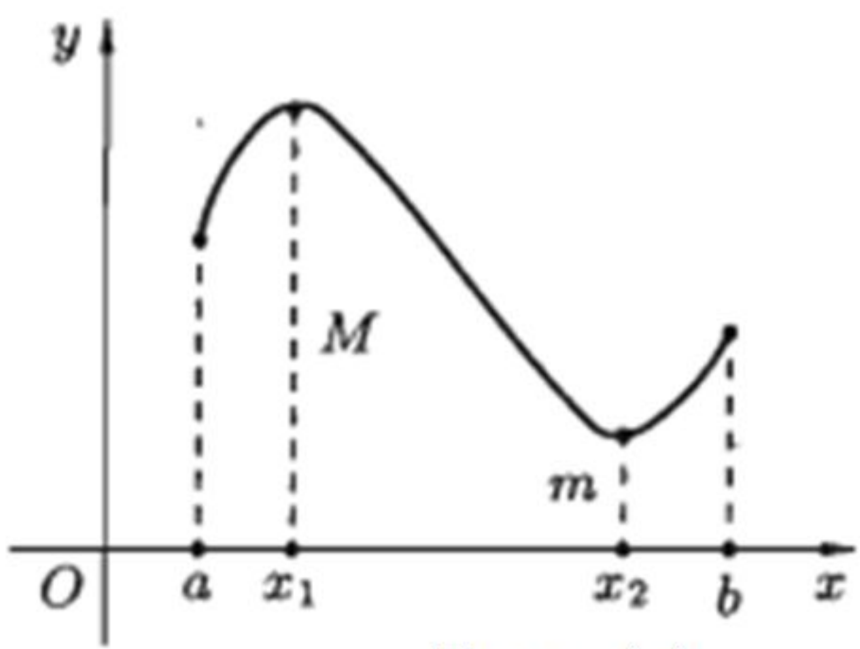


Рис. 11

Следствие 2.7

Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема* 3. 6. *(Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$непрерывна на отрезке [а; Ь] и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между А и В.

Геометрически теорема очевидна на рисунке. Для любого числа C, заключенного между A и B, найдется точка c внутри этого отрезка такая, что $f(c) = C$.

Прямая $y = c$ пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

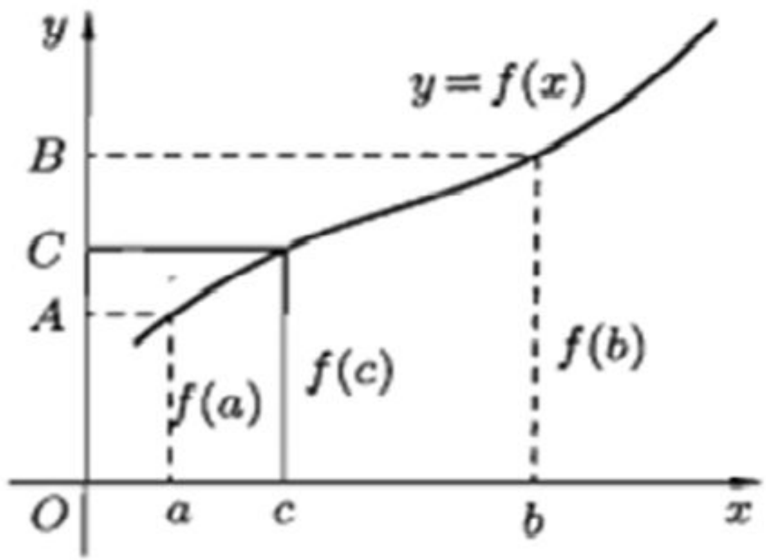


Рис. 12

Следствие 2.8. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a; Ь] и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка [a; Ь] найдется хотя бы одна точка с, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль : $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox.

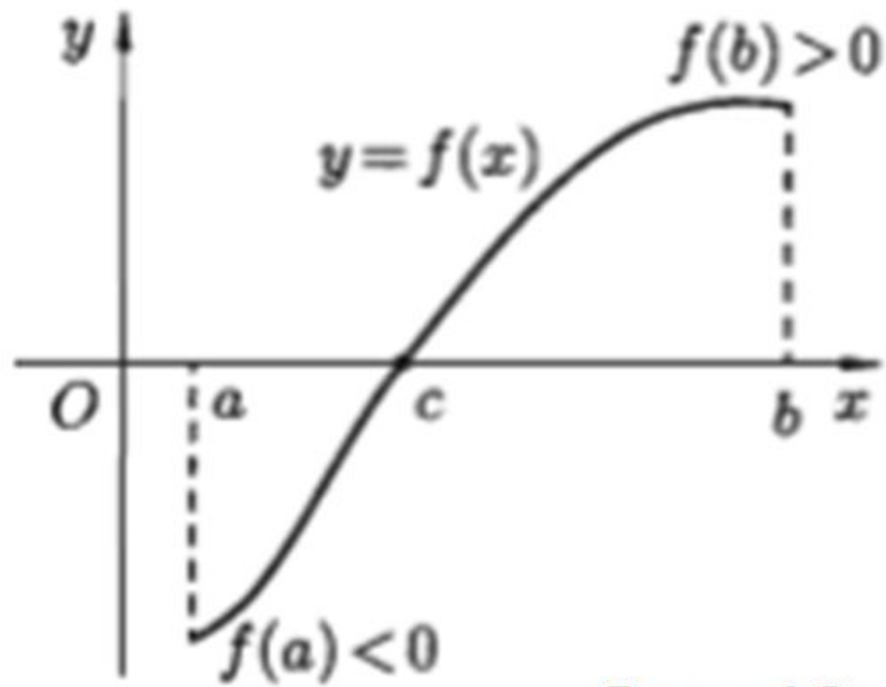


Рис. 13

Следствие 2.9. лежит в основе так называемого " *метода половинного деления*", который используется для нахождения корня уравнения $f(c) = 0$.

Замечание. Утверждения теорем 3.6 и 3.7, вообще говоря, делаются неверными, если нарушены какие-либо из ее условий: функция непрерывна не на отрезке [a; b], а в интервале (a; b), либо функция на отрезке [a; b] имеет разрыв.

- Рисунок показывает это для следствия теоремы 3.7: график разрывной функции не пересекает ось Ox.

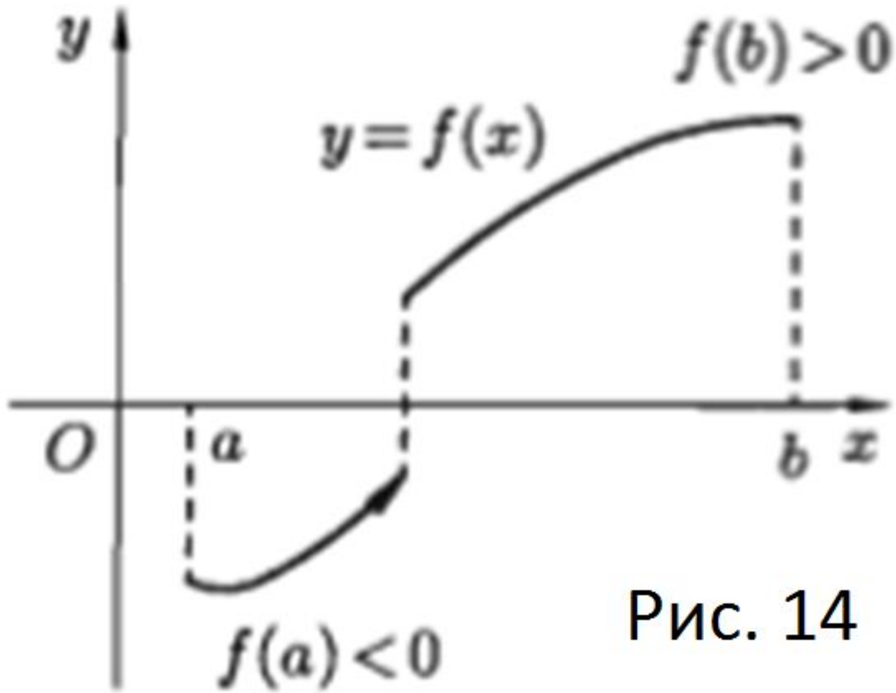


Рис. 14

Спасибо за внимание!