

# АЛГОРИТМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

**Этап 1. Выделение конечных элементов** (разбиение заданной области на конечные элементы).

**Этап 2. Определение аппроксимирующей функции** для каждого элемента (определение функции элемента).

**Этап 3. Объединение конечных элементов в ансамбль** ( $\varphi = N\Phi$ ).

**Этап 4. Определение вектора узловых значений функции.**

# Определение вектора узловых значений функции

**Алгоритм вычисления вектора  $\Phi$ , основанный на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи.**

- \* *Этап 1.* Выбор функционала  $F$ , зависящего для стационарных задач от искомой функции  $\varphi$  и ее частных производных по вектору пространственных координат:

$$F = \int_V f\left(\varphi, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z\right) dV$$

Функционал  $F$  представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам:

$$F = \sum_{a=1}^N F^{(a)} = \sum_{a=1}^N \int_{V^{(a)}} f\left(\varphi^{(a)}, \dot{\varphi}_x^{(a)}, \dot{\varphi}_y^{(a)}, \dot{\varphi}_z^{(a)}\right) dV^{(a)}$$

# Определение вектора узловых значений функции

- \* **Этап 2.** Подстановка аппроксимирующего выражения и вычисление производных по формулам вида

$$\dot{\varphi}_x^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} = \left( \frac{\partial N^{(e)}}{\partial x} \right) \Phi^{(e)}$$

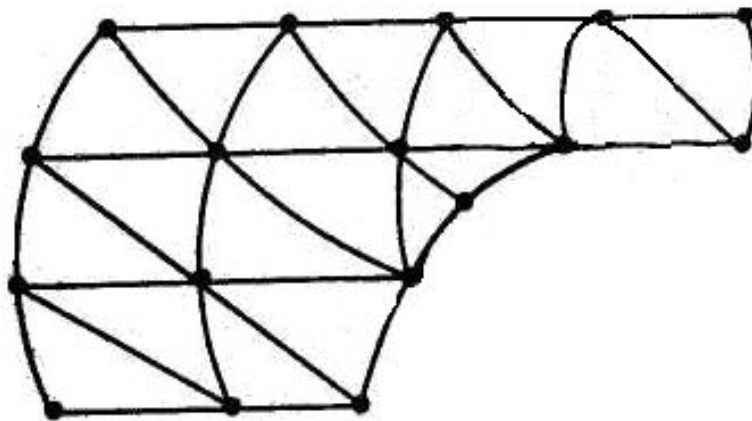
- \* **Этап 3.** Минимизация по вектору  $\Phi$  функционала  $F$ .

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \Phi^{(e)}} = 0$$

- \* Суммирование выражений по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений  $K\Phi = B$ , где  $K$  — матрица коэффициентов — матрица жесткости;  $B$  — вектор нагрузки.
- \* **Этап 4.** Решение системы, позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

# ВЫДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

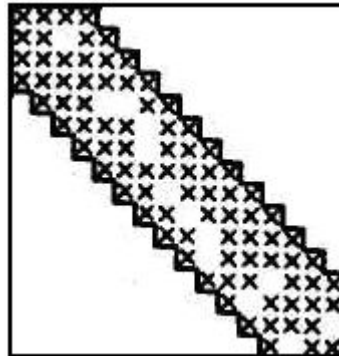
Разбиение двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами



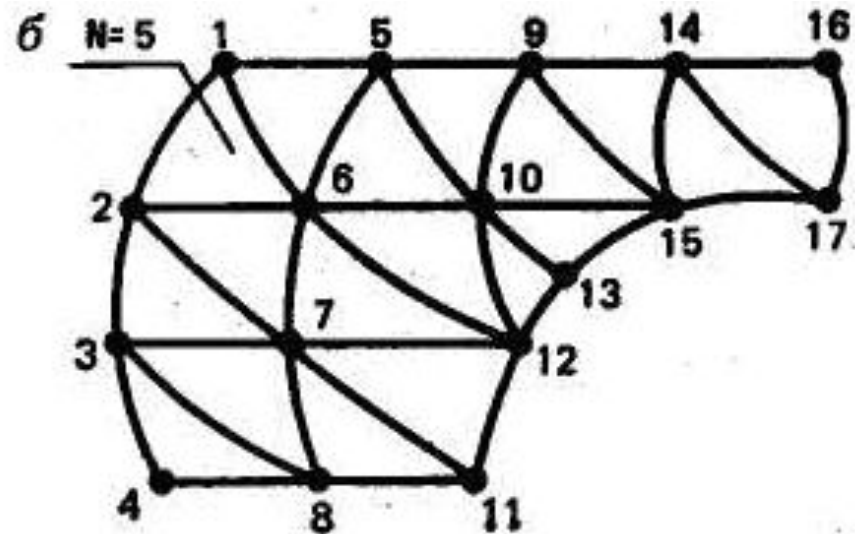
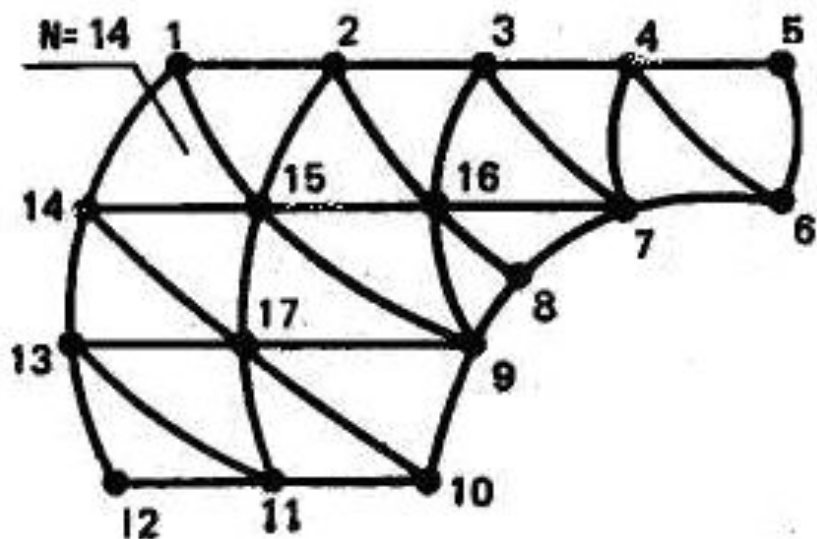
# Нумерация узлов элементов

- \* Порядок нумерации имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений.
- \* Матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, - сильно разреженная матрица ленточной структуры. Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали.

Матрица ленточной структуры



# Способы нумерации узлов при разбиении двухмерной области на конечные элементы



# ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

- \* тип конечного элемента;
- \* его порядковый номер;
- \* номера узлов элемента;
- \* координаты узлов,
- \* информацию о соединении элементов между собой;
- \* значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента.

# Алгоритм работы препроцессора

- \* **Этап 1.** Нанесение на заданную область некоторого множества узлов.
- \* **Этап 2.** Формирование узловых связей с целью заполнения области конечными элементами «наилучшей» формы.
- \* **Этап 3.** Нумерация узлов, минимизирующая ширину полосы в матрице коэффициентов системы уравнений.

Последняя процедура поддается алгоритмизации особенно просто и реализована практически во всех крупных программных комплексах на основе МКЭ.

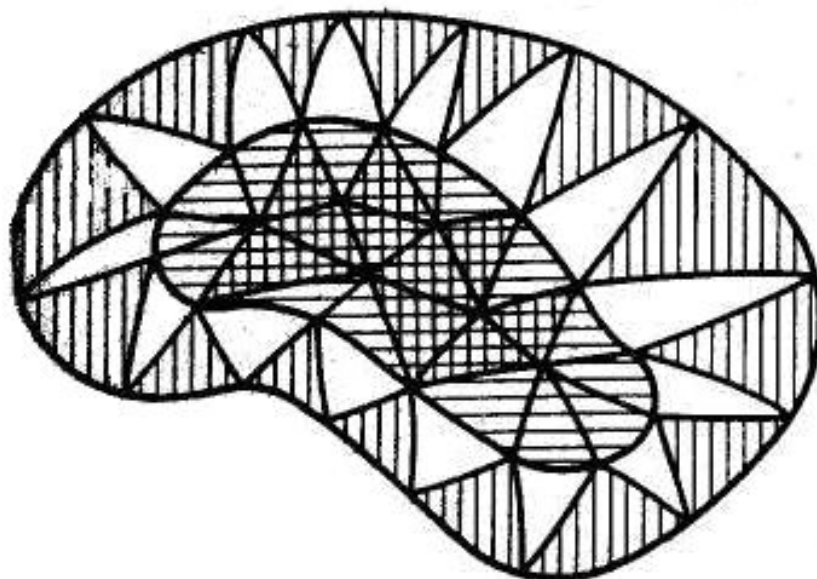


# Алгоритм разбиения области произвольной формы на треугольные конечные элементы

- \* **Этап 1.** Аппроксимация границы области совокупностью отрезков, представляемых номерами узлов.
- \* **Этап 2.** Выбор вершин треугольников, основаниями которых служат полученные на этапе 1 отрезки (при этом выбор вершин разрешен только с одной вполне определенной стороны).
- \* **Этап 3.** Соединение основания с выбранной вершиной отрезками, которые на следующем шаге сами будут рассматриваться как основания новых треугольников.

Алгоритм повторяется до тех пор, пока остается возможным строить новые элементы на базе проведенных отрезков, т. е. до полного заполнения области элементами.

# Пример использования алгоритма автоматического разбиения произвольной области на треугольные конечные элементы



Слой:



– первый



– второй



– третий

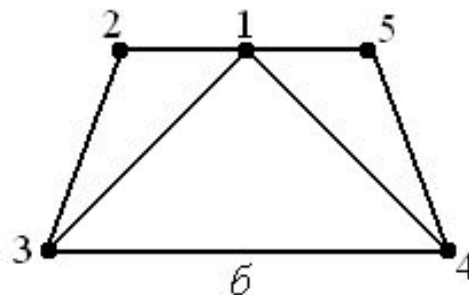
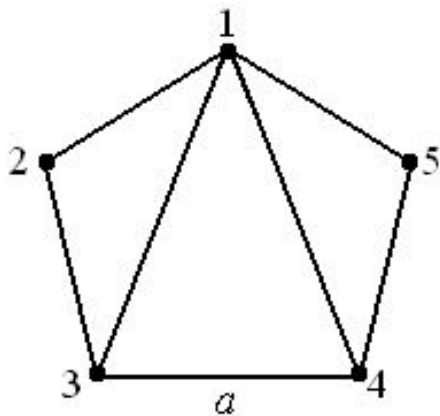


– четвертый

# Алгоритм разбиения области на элементы

- \* Определение граничных узлов области.
- \* Построение регулярной сетки с тем же числом узлов, что и в заданной области.
- \* Использование полученной схемы соединения узлов для области произвольной формы.

Пример автоматического разбиения области с пятью граничными узлами на треугольные элементы:  
а — регулярная сетка; б — сетка в заданной области



# Алгоритм построения регулярной сетки

- \* Окружение исходной точки кольцом равносторонних треугольников так, чтобы число внешних узлов было предельно близким к заданному числу граничных узлов.
- \* Если желаемый результат не достигнут, то добавим еще один ряд колец.

# Пример использования алгоритма автоматического построения сетки наилучшего вида в области с девятью граничными узлами

