ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определение

Матрицей порядка (mxn) называется таблица элементов, состоящая из m – строк и n - столбцов.

Обозначаются матрицы заглавными латинскими буквами: A, B, C, D…

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ - - & - - & - - - & - - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Значения m и n называются ее ***размерностью***.

Виды матриц:

- Матрица называется ***квадратной***, если количество столбцов равно количеству строк, т.е. $m = n$. Элементы $a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы.
- Квадратная матрица называется ***диагональной***, если все ее элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.
- Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все ее элементы, стоящие над или под диагональю, равны нулю.
- Диагональная матрица называется ***единичной***, если все ее элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1.

- Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.
- Матрица называется *транспонированной к данной*, если элементы строк и столбцов исходной матрицы поменять местами.

Например:

исходная матрица *транспонированная*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами.

1) Матрицы ***с одинаковой размерностью*** можно ***складывать*** путем алгебраического сложения соответствующих элементов матриц ***A*** и ***B***, т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \text{где } i = 1,2,\dots m; j = 1,2 \dots n$$

2) ***Любую матрицу*** можно ***умножить на число***, для этого достаточно каждый элемент матрицы умножить на это число.

3) Две матрицы можно ***перемножать***, если ***количество столбцов одной матрицы равно количеству строк другой матрицы***.

Если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет размерность (mxn), а матрица $\boldsymbol{B}$ имеет размерность (nxk), то размерность матрицы произведения $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, равна ($mxk$), а элементы вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

где i=1,2,…m, j=1,2,…k.

Примеры:

1) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -11 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

Примеры:

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислить произведение матриц

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+25 & 1-15-5 & -3-6+0 \\ 0+0+15 & 0+10-3 & 0+4+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & -19 & -9 \\ 15 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Для каждой *квадратной матрицы* можно вычислить *определитель*.

Определитель – это **число.**

Обозначается определитель греческой буквой

Δ или det

Пусть дана ***квадратная матрица 2-ого порядка***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

тогда ее определитель равен

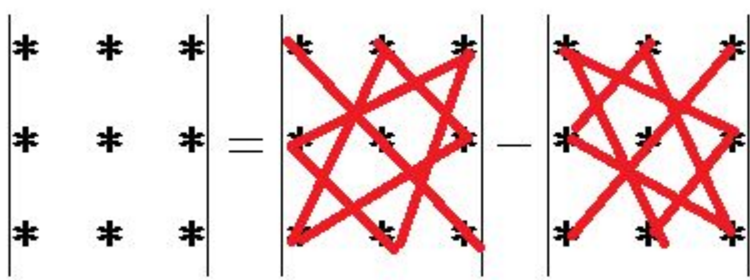
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель ***квадратной матрицы 3-ого*** порядка равен

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} -$$

$$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Схематично можно представить в виде:



Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot (-2) -$$

$$-\left(1 \cdot 7 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1)\right) =$$

$$= 14 - 5 + 0 - (-14 + 0 - 3) = 26$$

Свойства определителей.

1. Определитель *не меняется* при транспонировании.
2. Если две строки или два столбца определителя поменять местами, то определитель *меняет знак*.
3. Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.
4. Если элементы какой-либо строки (или столбца) равны элементам другой строки (или столбца), то данный определитель *равен нулю*.

5. Если элементы какой-либо строки (или столбца) пропорциональны элементам другой строки (или столбца), то данный определитель *равен нулю*.

6. Если элементы какой-либо строки (или столбца) определителя равны нулю, то данный определитель *равен нулю*.

Минором элемента a_{ij} матрицы ***A*** называется определитель, полученный вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.
Обозначается минор M_{ij}.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

минор элемента a_{33} будет иметь вид

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента матрицы a_{ij} называется значение минора этого элемента, взятого с тем же знаком, если *i+j* четное и с противоположным знаком, если *i+j* нечетное, т.о.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

7) *Определитель равен* сумме произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + A_{13}a_{13}$$

Такой способ вычисления определителя называется ***разложением по строке*** (или по столбцу).
Этот способ является универсальным в том смысле, что вычислять можно определители любого порядка.

Пример.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5 & -2\\ 0 & 7 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=17-5+14=26$$

МАТРИЦА, ОБРАТНАЯ К ДАННОЙ

Матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель ***не равен нулю***.

Матрица A^{-1} называется, обратной к данной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

если она удовлетворяет условию:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

где E – единичная матрица.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно доказать, что любая **невырожденная** матрица имеет обратную.

Нахождение обратной матрицы с помощью союзной

Дана невырожденная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу ***из алгебраических дополнений*** элементов матрицы А и ***транспонируем*** ее.
В результате получим матрицу, которая называется ***союзной:***

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Пример

Найти матрицу, обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

1)Вычислим определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 0 - (1 + 0 + 0) = -2 \neq 0$$

значит, матрица А - невырожденная и имеет обратную матрицу.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -3$$

тогда союзная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Выполним проверку, согласно определению:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -1 & -2 & 3 \\ -0,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Условие выполнено, значит, матрица найдена верно.

Ответ: обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -1 & -2 & 3 \\ -0,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системой *m* линейных уравнений с *n* неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + \cdots \quad a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 + \cdots \quad a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + \quad a_{n2}x_2 + \cdots \quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матрица коэффициентов при неизвестных,

$X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$- неизвестные переменные системы,

$B = (b_1, b_2, \ldots b_n)$- свободные коэффициенты.

Решить систему *линейных уравнений* (СЛУ), значит, найти такие значения $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ которые при подстановке в уравнения системы дают верное равенство.

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Таким образом, система может иметь ***единственное решение, множество решений или не иметь решения.***

Матрица *A* называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю.

Если матрица коэффициентов при неизвестных является невырожденной, то СЛУ имеет единственное решение.

В противном случае СЛУ может иметь множество решений (является неопределенной) или не иметь решения (является несовместной).

Если свободные коэффициенты СЛУ равны нулю, то СЛУ называется ***однородной*** (ОСЛУ).

Если матрица коэффициентов при неизвестных ОСЛУ является ***вырожденной***, то система имеет ***множество решений***.

Если матрица коэффициентов при неизвестных является ***невырожденной***, то ОСЛУ имеет ***единственное нулевое решение.***

Решение СЛУ методом Крамера.

Дана СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Пусть определитель матрицы коэффициентов при неизвестных не равен нулю:

$$detA = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

т.е. матрица *A* –невырожденная.

Значит, система имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Тогда решение системы линейных уравнений будет единственным и вычисляется по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

Пример

Решить СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 8 - 3 - (2 + 30 + 2) = -34 \neq 0$$

Вычислим определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25 + 16 - 1 - (4 + 10 + 10) = -10 - 24 = -34$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 20 - 12 - (-2 + 75 + 8) = 13 - 81 = -68;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 15 - (-10 + 24 + 1) = 0$$

Тогда решение СЛУ имеет вид

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-34}{-34} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-68}{-34} = 2; \qquad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{0}{-34} = 0$$

При подстановке полученных значений в заданную систему получаем верное тождество:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 - 0 = 5 \\ 3\cdot 1 - 2 + 2\cdot 0 = 1 \\ 2\cdot 1 + 2 + 5\cdot 0 = 4 \end{cases}$$

Значит, решение найдено верно.

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 0.$

Решение СЛУ с помощью обратной матрицы

СЛУ можно представить в матричном форме

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- невырожденная матрица коэффициентов при неизвестных X;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- столбец неизвестных искомых переменных;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- столбец свободных коэффициентов.

По условию, матрица А - невырожденная, то обратная к ней существует и решение СЛУ будет ***единственным***.

Тогда из матричного уравнения

$$A \cdot X = B \text{ следует, что } A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ или}$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ или } X = A^{-1} \cdot B$$

Итак, чтобы найти решение СЛУ, необходимо найти обратную матрицу, а затем умножить ее на столбец свободных коэффициентов.

Пример 1.

Решить СЛУ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

Решение:

Вычислим определитель коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 8 - 3 - (2 + 30 + 2) = -34 \neq 0$$

Найдем решение системы с помощью обратной матрицы)

Исходная матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу к данной с помощью *союзной* матрицы.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

Союзная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & -11 & 3 \\ -11 & 7 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-34} \begin{pmatrix} -7 & -11 & 3 \\ -11 & 7 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Находим решение заданной системы линейных уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-34}\begin{pmatrix} -7 & -11 & 3 \\ -11 & 7 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 0.$