Евклидовы пространства 2

Тест 2-3. Задача № 8-1

Даны координаты векторов ***a=(-3,1; -2; 5), b=(2,3; -3; 2)*** (в ортонормированном базисе). Найти числовую ***проекцию*** вектора ***a*** на вектор ***b***.

Ответ укажите с точностью до 0,1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Формула для нахождения проекции вектора a на вектор b выглядит как:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(a,b)}{|b|}$$

Найдем $(a,b) = -3,1 \cdot 2,3 + (-2)\cdot(-3) + 5 \cdot 2 = -7,13 + 6 + 10 = 8,87.$

$$\overline{|b|} = \sqrt{\bar{b}\cdot\bar{b}} = \sqrt{2,3\cdot 2,3 + (-3)\cdot(-3) + 2\cdot 2} = \sqrt{5,29 + 9 + 4} = \sqrt{18,29} \approx 4,28.$$

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(a,b)}{|b|} = \frac{8,87}{4,28} \approx 2,074$$

Тест 2-3. Задача № 8-2

Вопрос **8**

Верно

Баллов: 1,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Даны координаты векторов ***a=(-0,1; -2; 5), b=(0,0; -3; 2)*** (в ортонормированном базисе). Найти числовую ***проекцию*** вектора ***a*** на вектор ***b.***

Ответ укажите с точностью до 0,1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ: 4.4

Формула для нахождения проекции вектора a на вектор b выглядит как:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(a,b)}{|b|}$$

Найдем $(a,b) = -0{,}1\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) + 5\cdot 2 = 0 + 6 + 10 = 16$

$$\overline{|b|} = \sqrt{\bar{b}\cdot\bar{b}} = \sqrt{0\cdot 0 + (-3)\cdot(-3) + 2\cdot 2} = \sqrt{0+9+4} = \sqrt{13} \approx 3{,}61.$$

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(a,b)}{|b|} = \frac{16}{3{,}61} \approx 4{,}43$$

Тест 2-3. Задача № 9-1

Даны координаты векторов ***a=(-2; -2; 5)***, ***b=(-1; -3; 2)*** (в ортонормированном базисе). Найти **векторную *проекцию*** вектора ***a*** на вектор ***b***.

В ответе укажите **1-ю координату** полученного вектора с точностью до 0,1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Формула для нахождения **векторной** проекции вектора a на вектор b выглядит как:

$$\overline{np_{\bar{b}}\bar{a}} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{(\bar{b},\bar{b})}\cdot\bar{b}$$

$$(a,b) = -2\cdot(-1)+(-2)\cdot(-3)+5\cdot 2 = 2+6+10 = 18.$$

Найдем

$$\bar{b}\cdot\bar{b} = (-1)\cdot(-1)+(-3)\cdot(-3)+2\cdot 2 = 14$$

$$\overline{np_{\bar{b}}\bar{a}} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{(\bar{b},\bar{b})}\cdot\bar{b} = \frac{18}{14}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} = 1,29\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1,29\\-3,87\\2,58\end{pmatrix}$$

Тест 2-3. Задача № 9-2

Вопрос 9

Неверно

Баллов: 0,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Даны координаты векторов ***a=(4,5; -2; 5), b=(-3,6; -3; 2)*** (в ортонормированном базисе). Найти **векторную *проекцию*** вектора ***a*** на вектор ***b***.

В ответе укажите **1-ю координату** полученного вектора с точностью до 0,1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ: -93.4

Формула для нахождения **векторной** проекции вектора a на вектор b выглядит как:

$$\overline{np_{\bar b}\bar a} = \frac{(\bar a, \bar b)}{(\bar b, \bar b)} \cdot \bar b$$

$$(a,b) = 4,5 \cdot (-3,6) + (-2) \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = -16,2 + 6 + 10 = -0,2.$$

Найдем

$$\bar b \cdot \bar b = (-3,6) \cdot (-3,6) + (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 25,96$$

$$\overline{np_{\bar b}\bar a} = \frac{(\bar a, \bar b)}{(\bar b, \bar b)} \cdot \bar b = \frac{-0,2}{25,96} \cdot \begin{pmatrix} -3,6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -0,01 \cdot \begin{pmatrix} -3,6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,036 \\ 0,03 \\ -0,02 \end{pmatrix}$$

Тест 2-3. Задача № 10-1

Новые базисные вектора **vi** в старом базисе имеют следующие координаты:

v1=(6, -1, 0), v2=(0, 1; -1), v3=(0, 0, 1)

Но один из векторов неортогонален двум другим. Необходимо определить этот вектор ***vj*** и, применив ортогонализацию Грама-Шмидта, найти координаты нового вектора **vj'**, который ортогонален остальным двум векторам и получается после вычитания из ***vj*** его проекции на плоскость остальных двух векторов. Обратите внимание, что не требуется ортонормированность базиса! И вектора **vi** не являются все единичными. Поэтому при проецировании это надо учесть.

В ответе укажите 1-ю координату получившегося вектора. Ответ укажите с точностью до 0.01. Целую часть от дробной отделяйте точкой.

При записи числового ответа важно, чтобы записанное число отличалось от точного значения меньше, чем на 0.01

Ответ:

Сначала проверим, который из векторов не перпендикулярен остальным. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равняется нулю.

$$v1\cdot v2 = 6\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-1) = -1 \Rightarrow \not\perp$$

$$v1\cdot v3 = 6\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \Rightarrow \perp$$

$$v2\cdot v3 = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -1 \Rightarrow \not\perp$$

Так как два вектора ортогональны, будем проводить ортогонализацию только третьего вектора по методу Грама-Шмидта:

$$v_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 - \frac{v_2 \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0}{6 \cdot 6 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1}{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{37} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{6}{37} + 0 \\ 1 - \frac{1}{37} + 0 \\ -1 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{37} \\ \frac{36}{37} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, ортогональность еще раз:

$$v1 \cdot v2 = 6 \cdot \frac{6}{37} + (-1) \cdot \frac{36}{37} + 0 \cdot 0 = \frac{36}{37} - \frac{36}{37} = 0 \Rightarrow \perp$$

$$v1 \cdot v3 = 6 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \perp$$

$$v2 \cdot v3 = \frac{6}{37} \cdot 0 + \frac{36}{37} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \perp$$

Тест 2-3. Задача № 10-2

Вопрос **10**

Верно

Баллов: 1,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Новые базисные вектора **vi** в старом базисе имеют следующие координаты:

v1=(8, -1, 0), v2=(0, 1; -1), v3=(0, 0, 1)

Но один из векторов неортогонален двум другим. Необходимо определить этот вектор ***vj*** и, применив ортогонализацию Грама-Шмидта, найти координаты нового вектора **vj'**, который ортогонален остальным двум векторам и получается после вычитания из ***vj*** его проекции на плоскость остальных двух векторов. Обратите внимание, что не требуется ортонормированность базиса! И вектора **vi** не являются все единичными. Поэтому при проецировании это надо учесть.

В ответе укажите 1-ю координату получившегося вектора. Ответ укажите с точностью до 0.01. Целую часть от дробной отделяйте точкой.

При записи числового ответа важно, чтобы записанное число отличалось от точного значения меньше, чем на 0.01

Ответ: 0.12

Сначала проверим, который из векторов не перпендикулярен остальным. Скалярное произведение перпендикулярных векторов равняется нулю.

$$v1 \cdot v2 = 8 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow \not\perp$$

$$v1 \cdot v3 = 8 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \perp$$

$$v2 \cdot v3 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1 \Rightarrow \not\perp$$

Так как два вектора ортогональны, будем проводить ортогонализацию только третьего вектора по методу Грама-Шмидта:

$$v_2{}' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 - \frac{v_2 \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0}{8 \cdot 8 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1}{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{65} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \dfrac{8}{65} + 0 \\ 1 - \dfrac{1}{65} + 0 \\ -1 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{65} \\ \dfrac{64}{65} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{8}{65} \approx 0{,}12$$

Проверим, ортогональность еще раз:

$$v1 \cdot v2 = 8 \cdot \frac{8}{65} + (-1) \cdot \frac{64}{65} + 0 \cdot 0 = \frac{64}{65} - \frac{64}{65} = 0 \Rightarrow \perp$$

$$v1 \cdot v3 = 8 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \perp$$

$$v2 \cdot v3 = \frac{8}{65} \cdot 0 + \frac{64}{65} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \perp$$

Тест 2-4. Задача № 4 -1

Вопрос **4**

Неверно

Баллов: 0,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Даны координаты вектора ***a=(3; 6)*** (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования ***произвольного*** вектора ***b*** на вектор ***a*** .

В ответе укажите сумму **элементов** полученной матрицы с точностью до **0.1**. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ: 1.5 ✗

Правильный ответ: 1,8

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как: $\overline{np_{\bar a}\bar b} = M\cdot\bar b$

Где $M = \dfrac{a\cdot a^T}{a^T\cdot a}$

Найдем M в нашем случае:

$$M = \frac{a\cdot a^T}{a^T\cdot a} = \frac{\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix}9 & 18\\18 & 36\end{pmatrix}}{9+36} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix}9 & 18\\18 & 36\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\frac{1+2+2+4}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$$

Тогда $\overline{np_{\bar a}\bar b} = M\cdot\bar b = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}x+2y\\2x+4y\end{pmatrix}$

Тест 2-4. Задача № 4 -2

Даны координаты вектора ***a=(1; 6)*** (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования ***произвольного*** вектора ***b*** на вектор ***a*** .

В ответе укажите сумму **элементов** полученной матрицы с точностью до **0.1.** Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как:

$$\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b}$$

Где $M = \dfrac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a}$

Найдем M в нашем случае:

$$M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix}1 & 6\\6 & 36\end{pmatrix}}{1+36} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix}1 & 6\\6 & 36\end{pmatrix}$$

$$\frac{1+6+6+36}{37} = 1.32$$

Тогда

$$\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix}1 & 6\\6 & 36\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix}x+6y\\6x+36y\end{pmatrix}$$

Векторное пространство

Множество V элементов u, v, w, ... произвольной природы, в котором определены операции сложения ($u + v$, где $u, v \in V$) и умножения на число (αv, где α — число, $v \in V$), подчиняющиеся определенным аксиомам, называется линейным пространством. Элементы произвольного линейного пространства V часто называют векторами.

Указанные операции над векторами подчиняются следующим аксиомам:

а) $u + v = v + u$ — это свойство операции сложения векторов линейного пространства V называется коммутативностью сложения векторов;

б) $(u + v) + w = u + (v + w)$ — это свойство операции сложения называется ассоциативностью сложения векторов;

в) существует нулевой элемент 0, такой, что $u + 0 = u$ для любого элемента u множества;

г) для каждого элемента u существует противоположный элемент -u, такой, что $u + (- u) = 0$;

д) для любого элемента u справедливо равенство $1 \cdot u = u$;

е) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;

ж) $(\lambda + \mu) u = \lambda u + \mu u$;

з) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, где λ, μ — числа.

Примеры:

1. Множество V3 свободных векторов в трехмерном пространстве. Операцией сложения является операция сложения двух векторов, в результате которой получается вектор из этого же множества, а операцией умножения на число —операция умножения вектора на число α, в результате которой получается коллинеарный вектор множества V3 "удлиненный" в α раз. Операции над векторами сводятся к операциям над действительными числами (координатами вектора). В качестве нулевого элемента в этом множестве можно взять нулевой вектор, а в качестве элемента $-u$ вектор, имеющий равную с вектором u длину и противоположно ему направленный.

2. Множество вещественных матриц размерности $m \times n$ также является линейным пространством. Операции сложения и умножения на число элементов этого пространства соответствуют операциям сложения двух матриц и умножению матрицы на число. В этом множестве нулевая матрица будет нулевым элементом. Матрица, полученная из матрицы A умножением всех ее элементов на число -1, будет являться для матрицы A противоположным элементом. Остальные аксиомы выполняются, так как они сводятся к операциям над числами (элементами матриц).

3. Множество всех многочленов степени, не превышающей натурального числа n, с операциями сложения многочленов и умножения их на число, — линейное пространство, в котором нулевым элементом является многочлен **со всеми нулевыми коэффициентами**, а противоположный элемент для каждого многочлена получается его умножением на число −1. Действительно, многочлен степени не выше n является алгебраической суммой нескольких одночленов, каждый из которых есть произведение, составленное из числового множителя и заданной буквы в степени: $a0 + a1*x + a2*x^2 + ... + a^n*x^n$. Операции сложения и умножения на число многочленов сводятся к операциям над числами, являющимися коэффициентами (множителями) при соответствующих степенях букв.

4. Множество всех функций $y = f(x)$, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, для которых обычными правилами математического анализа определены операции сложения таких функций и умножения их на число, является линейным пространством. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a, b]$, тогда их сумма $f(x) + g(x) = h(x)$ — определенная и непрерывная во всех точках отрезка $[a, b]$ функция. Аналогично, при умножении функции на любое число получаем функцию, определенную и непрерывную на отрезке $[a, b]$, т. е. принадлежащую рассматриваемому множеству. В качестве нулевого элемента в этом множестве берем функцию, имеющую значение нуль во всех точках отрезка $[a, b]$, т. е. функцию $y = 0$ — часть оси Ox, а именно отрезок $a \le x \le b$. Противоположным элементом для функции $f(x)$, будет функция $-f(x)$. Остальные аксиомы будут выполняться в силу того, что все операции над функциями сводятся в каждой конкретной точке отрезка к операциям над числами, для которых эти аксиомы верны. Следовательно, совокупность функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число является линейным пространством, которое называют пространством непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ и обозначают $C[a, b]$.

Подпространство векторного пространства.

Определение: L называется **подпространством пространства** V, если оно само является **векторным пространством** над полем P. Если L является **подпространством** V, то оно само **векторное пространство**, поэтому и должно быть замкнуто относительно сложения векторов и умножения их на скаляры.

Иначе говоря, применение линейных операций к векторам, принадлежащим этому подмножеству, не выводит результат за пределы подмножества.

Примеры подпространств:

- Множество {0} является подпространством в любом пространстве **V**.
- Множество компланарных какой-нибудь плоскости α векторов-подпространство в пространстве трёхмерных векторов.

Примеры:

1. В линейном пространстве V3 свободных векторов трехмерного пространства линейное подпространство образуют: а) все векторы, параллельные заданной плоскости; б) все векторы, параллельные данной прямой. Это вытекает из следующих соображений. Из определения суммы свободных векторов следует, что два вектора a , b и их сумма a + b принадлежат одной плоскости. Поэтому, если a и b параллельны некоторой заданной плоскости, то этой же плоскости будет параллельна их сумма. Если вектор умножить на число, получится вектор, параллельный исходному, а следовательно, параллельный заданной плоскости. Тем самым установлено, что для случая а) оба условия определения подпространства выполняются. Случай б) обосновывается аналогично.

2. В линейном пространстве квадратных матриц порядка n линейное подпространство образуют: а) все симметрические матрицы; б) все верхние (нижние) треугольные матрицы. При сложении таких матриц или умножении на число получаем матрицу того же вида. Напротив, подмножество вырожденных матриц не является линейным подпространством, так как сумма двух вырожденных матриц может быть невырожденной матрицей.

3. В линейном пространстве C[0, 1] функций , непрерывных на отрезке [0, 1] , можно выделить следующие линейные подпространства: а) множество функций, непрерывных на отрезке [0, 1] и непрерывно дифференцируемых в интервале (0, 1) (в основе этого утверждения лежат свойства дифференцируемых функций: сумма дифференцируемых функций является дифференцируемой функцией, произведение дифференцируемой функции на число также дифференцируемая функция);

б) множество всех многочленов;

в) множество всех многочленов степени не выше n.

Напротив, множество всех монотонных функций, непрерывных на отрезке [0, 1], очевидно, является подмножеством C[0, 1], но не является линейным подпространством, так как сумма двух монотонных функций может и не быть монотонной функцией.

Вопрос **1**

Верно

Баллов: 1,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Укажите, какие из приведенных ниже подмножеств ***L*** являются подпространством векторного пространства **V**

Выберите один или несколько ответов:

- [ ] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (R^3) .
L - множество троек чисел вида $(x_1, x_2, 1), x_1, x_2 \in R$.

- [ ] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (R^3) .
L - множество троек чисел вида $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + a_3 * x_3 = 1, x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3 \in R$.

- [x] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (R^3) .
L - множество троек чисел вида $(x_1, 0, x_2), x_1, x_2 \in R$.

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

- [x] **V** - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й (**P_2(x)**) над полем вещественных чисел.
L - множество многочленов вида $a * (x - 1) + b * (x^2 + 1), a, b \in R$.

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

- [x] **V** - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й (**P_2(x)**) над полем вещественных чисел.
L - множество многочленов вида $a * x + b * x^2, a, b \in R$ (x*P1(x)).

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

1. Умножим тройку на число α. $(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot 1) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha) \notin L$

2. Возьмем тройку: $(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3)$

Проверим выполнение условия, определяющего подпространство

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 1$$

$$a_1 \cdot (\alpha \cdot x_1) + a_2 \cdot (\alpha \cdot x_2) + a_3 \cdot (\alpha \cdot x_3) = \alpha (a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3) = \alpha \neq 1$$

3. $(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot x_3) = (y_1, 0, y_3) \in L$

$$(x_1, 0, x_3) + (y_1, 0, y_3) = (x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3) = (z_1, 0, z_3) \in L$$

4.

$$a \cdot (x - 1) + b \cdot (x^2 + 1)$$

$$\alpha \cdot \left(a \cdot (x-1) + b \cdot (x^2+1)\right) = (\alpha \cdot a) \cdot (x-1) + (\alpha \cdot b) \cdot (x^2+1) = c \cdot (x-1) + d \cdot (x^2+1) \in L$$

$$a_1 \cdot (x-1) + b_1 \cdot (x^2+1) + a_2 \cdot (x-1) + b_2 \cdot (x^2+1) = (a_1 + a_2) \cdot (x-1) + (b_1 + b_2) \cdot (x^2+1) =$$

$$= a_3 \cdot (x-1) + b_3 \cdot (x^2+1) \in L$$

5.

$$a \cdot x + b \cdot x^2$$

$$\alpha \cdot \left(a \cdot x + b \cdot x^2\right) = (\alpha \cdot a) \cdot x + (\alpha \cdot b) \cdot x^2 = c \cdot x + d \cdot x^2 \in L$$

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + b_2 \cdot x^2 = (a_1 + a_2) \cdot x + (b_1 + b_2) \cdot x^2 = a_3 \cdot x + b_3 \cdot x^2 \in L$$