

Свойства числовых функций.

Функцию $y=f(x)$ называют **возрастающей** на **множестве $X \subset D(f)$** , если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Другими словами, функция **возрастает**, если **большему** значению аргумента соответствует **большее** значение функции.

Функцию $y=f(x)$ называют **убывающей** на **множестве $X \subset D(f)$** , если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Другими словами, функция убывает, если **большему** значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции.

Термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют **исследованием функции на монотонность**.

Если функция возрастает (или убывает) на своей области определения, то говорят, что функция **возрастающая (убывающая)**.

Пример

Исследовать на монотонность функцию $y=5-2x$

Решение:

$$f(x)=5-2x$$

$$x_1 < x_2$$

$$-2x_1 > -2x_2$$

$$5-2x_1 > 5-2x_2$$

То есть $f(x_1) > f(x_2)$.

Из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция **убывает** на всей числовой прямой.

$$a > b$$

$$c \cdot a < c \cdot b, \text{ если } c < 0$$

Пример

Исследовать на монотонность функцию $y=x^3 + 2$

Решение:

$$f(x)=x^3 + 2$$

$$x_1 < x_2$$

$$x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2$$

То есть $f(x_1) < f(x_2)$.

Из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, а это означает, что заданная функция **возрастает** на всей числовой прямой.

$$a > b$$
$$a^n > b^n$$

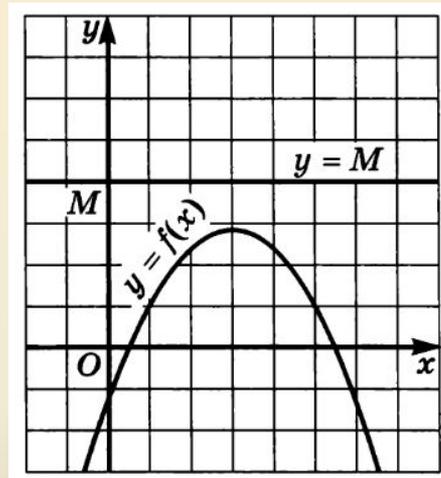
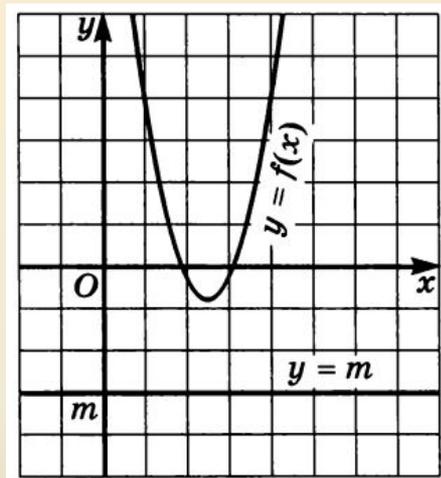
Функцию $y=f(x)$ называют **ограниченной снизу** на **множестве $X \subset D(f)$** , если все значения этой функции на множестве X **больше некоторого числа**, то есть если существует число m такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Функцию $y=f(x)$ называют **ограниченной сверху** на **множестве $X \subset D(f)$** , если все значения этой функции на множестве X **меньше некоторого числа**, то есть если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции сверху или снизу на всей области ее определения.

Если функция ограничена и сверху и снизу на всей области определения, то ее называют **ограниченной**.

Ограниченность функции легко читается по графику:



Пример

Исследовать на ограниченность функцию:

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

Решение:

По определению арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{16 - x^2} \geq 0$$

Это значит, что функция ограничена снизу.

С другой стороны $16 - x^2 \leq 16$, а поэтому

$$\sqrt{16 - x^2} \leq 4$$

$$\begin{array}{l} a > b \\ \sqrt{a} > \sqrt{b} \end{array}$$

Это означает, что функция ограничена сверху.

Итак, функция ограничена и сверху и снизу;
или другими словами: ограниченная
функция.

Число m называют **наименьшим значением** функции $f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

- 1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = m$;
- 2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$

Наименьшее значение функции обозначают символом $y_{\text{наим}}$

Число M называют **наибольшим значением** функции $f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$, если:

- 1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$;
- 2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$

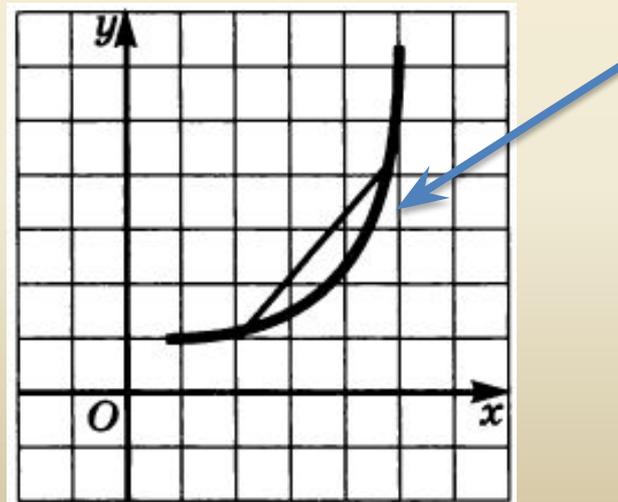
Наибольшее значение функции обозначают СИМВОЛОМ $Y_{\text{наиб}}$

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об поиске наименьшего или наибольшего значения функции на всей области ее определения.

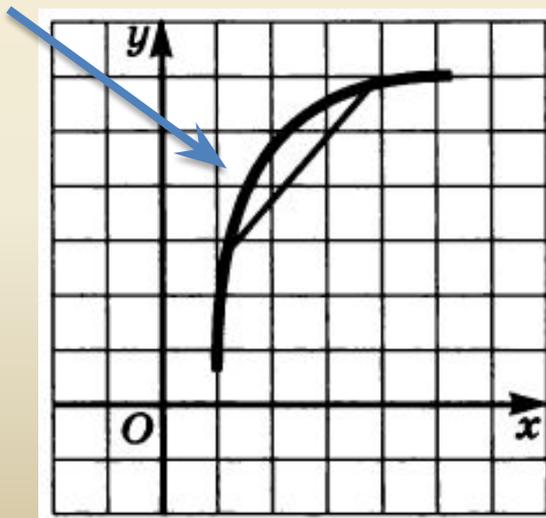
Утверждения:

- 1) Если у функции существует $y_{\text{наим}}$, то она ограничена снизу.
- 2) Если у функции существует $y_{\text{наиб}}$, то она ограничена сверху.
- 3) Если функция не ограничена снизу, то у нее не существует $y_{\text{наим}}$.
- 4) Если функция не ограничена сверху, то у нее не существует $y_{\text{наиб}}$.

Функция **выпукла вниз** на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит **ниже** проведенного отрезка



Функция **выпукла вверх** на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит **выше** проведенного отрезка



Если график функции $f(x)$ на промежутке X не имеет точек разрыва (то есть представляет собой сплошную линию), то это значит, что функция $f(x)$ **непрерывна на промежутке X** .

Замечание: Обсуждая последние два свойства, мы будем пока по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления. Доказательство этих свойств будет рассмотрено нами позже.

Функцию $f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x)$$

Функцию $f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x)$$

В определениях идет речь о значениях функции в точках $-x$ и x . Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x и в точке $-x$. Это значит, что точки x и $-x$ одновременно принадлежат области определения функции. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то такое множество называют **симметричным множеством**.

Например: отрезок $[-5, 5]$ —симметричное множество, а отрезок $[-4, 5]$ — не симметричное множество (в него входит число 5, но не входит противоположное ему -5)

Если функция $y=f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X – симметричное множество.

Если же X – несимметричное множество, то функция $y=f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной ни нечетной.

Алгоритм исследования функции

$y=f(x)$, $x \in X$ на четность.

- 1) Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что **функция не является ни четной, ни нечетной**. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
- 2) Составить выражение $f(-x)$.
- 3) Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
 - а) если $f(-x)=f(x)$, то **функция четная**;
 - б) если $f(-x)=-f(x)$, то **функция нечетная**;
 - в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то **функция не является ни четной, ни нечетной**.

Пример

Исследовать на четность функцию: $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$

Решение:

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – симметричное множество

$$2. \quad f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ – **четная** функция

Пример

Исследовать на четность функцию: $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$

Решение:

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – симметричное множество

$$2. \quad f(-x) = (-x)^3 - \frac{3}{(-x)^5} = -x^3 - \frac{3}{-x^5} = -\left(x^3 - \frac{3}{x^5}\right)$$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$ – **нечетная** функция

Пример

Исследовать на четность функцию: $y = \frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение:

1. $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$ – симметричное множество.

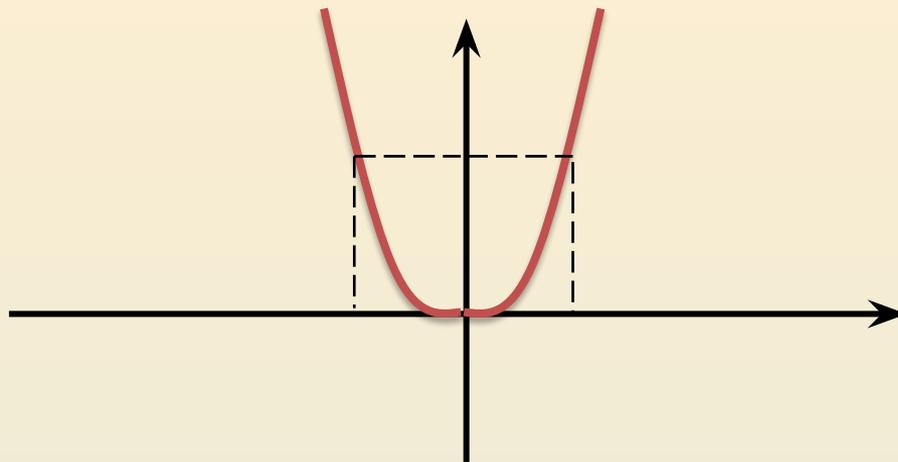
$$2. f(-x) = \frac{(-x)-4}{(-x)^2-9} = -\frac{x+4}{x^2-9}$$

3. Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x)=f(x)$, ни тождество $f(-x)=-f(x)$.

Например, $x=4$, $f(4)=0$, $f(-4)=-\frac{8}{7}$, то есть $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$.

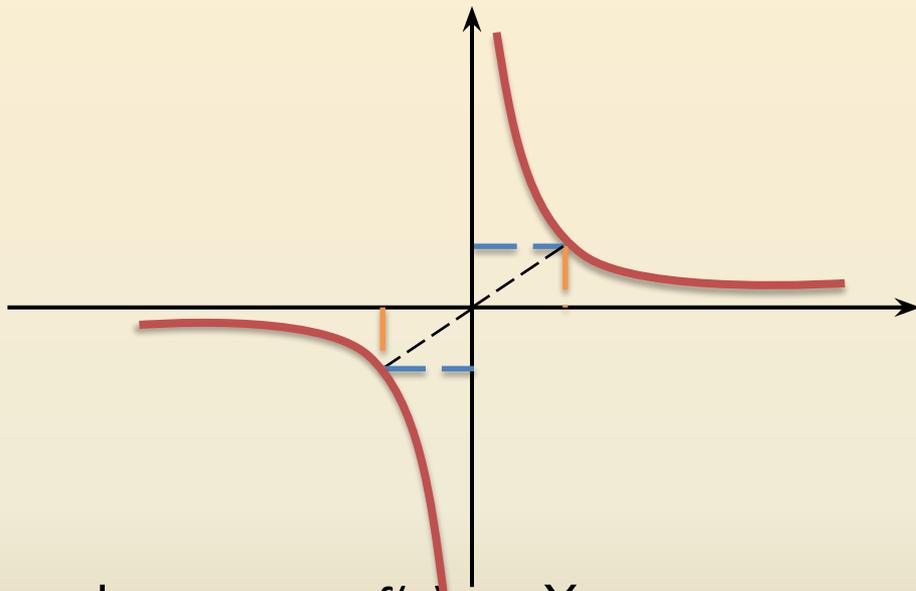
Таким образом, функция не является **ни четной ни нечетной**.

График четной функции симметричен относительно **оси**
у.



Если график функции $y=f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно **оси ординат**, то $y=f(x)$, $x \in X$ – **четная функция**.

График нечетной функции симметричен относительно **начала координат**.



Если график функции $y=f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно **начала координат**, то $y=f(x)$, $x \in X$ - **нечетная функция**

Прочитать функцию:

- ✓ Найти область определения функции $D(f)$
- ✓ Найти область значения функции $E(f)$
- ✓ Исследовать функцию на монотонность
- ✓ Исследовать функцию на ограниченность
- ✓ Найти наибольшее и наименьшее значение функции, если это возможно
- ✓ Исследовать функцию на четность