

МАТЕМАТИКА

ТРИНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Наталья Владимировна
Крупина

Москва,
2021

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, является нечётной и периодической с периодом π . Поэтому достаточно построить её график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, используя периодичность, построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения.

Прежде чем строить график функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что на этом промежутке функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает.

● * Пусть $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Покажем, что $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$,

$$\text{т. е. } \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}.$$

По условию $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, откуда по свойствам функции $y = \sin x$ имеем $0 \leq \sin x_1 < \sin x_2$, а по свойствам функции $y = \cos x$ также имеем $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. ○

Зная, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, найдём несколько точек, принадлежащих графику, и построим его на этом промежутке (рис. 93).

Исходя из свойства нечётности функции $y = \operatorname{tg} x$, отразим построенный на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ график симметрично относительно начала координат,

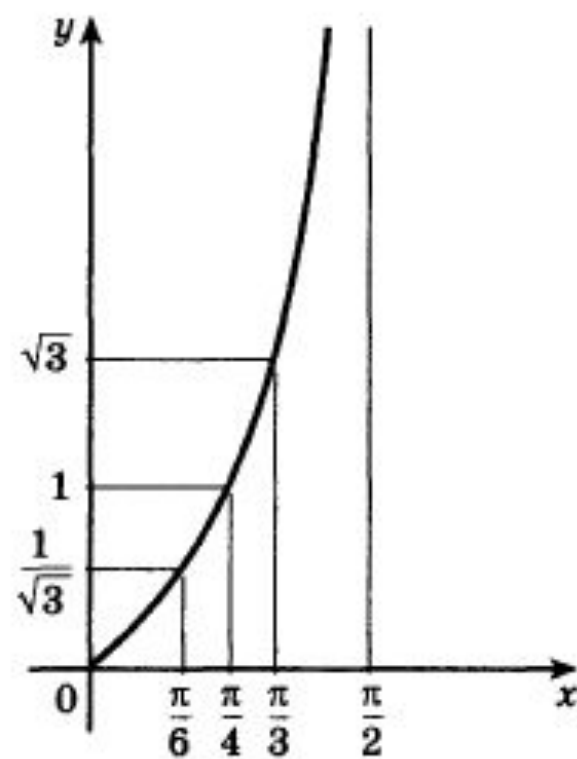


Рис. 93

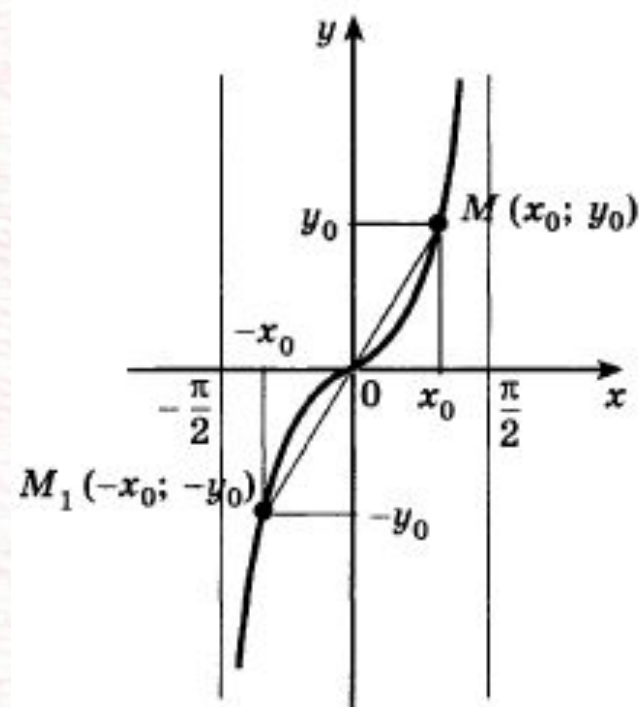


Рис. 94

получим график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94).

Напомним, что при $x = \pm \frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то

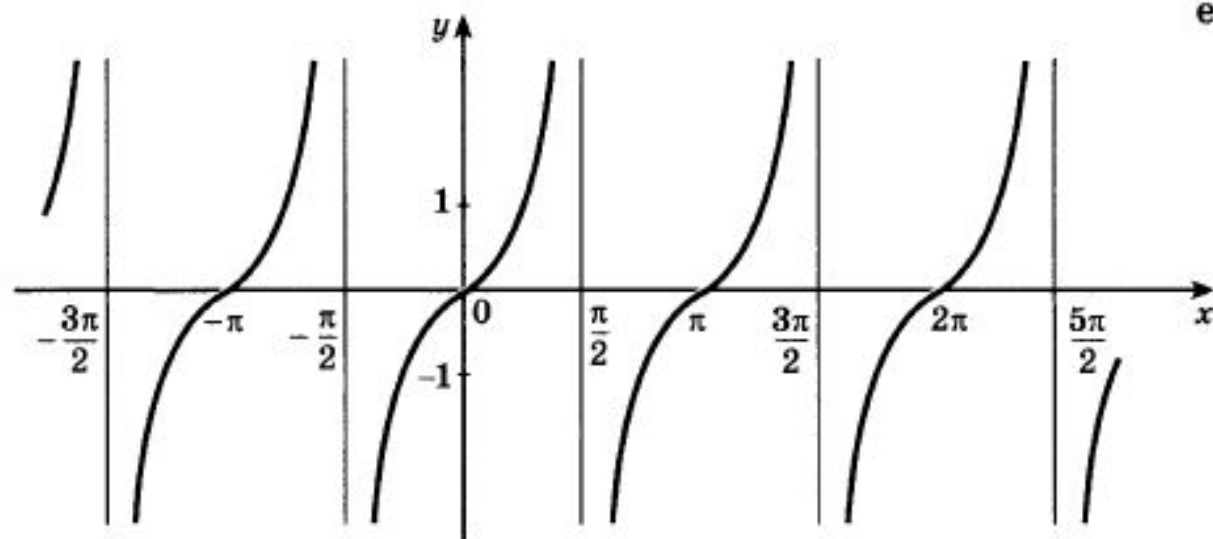
$\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает, и поэтому

график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Аналогично при отрицательных значениях x , больших $-\frac{\pi}{2}$ и приближающихся к $-\frac{\pi}{2}$, график функции $y = \operatorname{tg} x$ прибли-

жается к вертикальной прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, т. е.

прямые $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ являются вертикальными

Перейдём к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π . Следовательно, график этой функции получается из её графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94) сдвигами вдоль оси абсцисс на πn , $n \in \mathbf{Z}$ (рис. 95).



Итак, весь график функции $y = \operatorname{tg} x$ строится с помощью геометрических преобразований его части, построенной на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, так как эта функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является нечётной.

Рис. 95

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

2) Множество значений — множество \mathbf{R} всех действительных чисел.

3) Периодическая с периодом π .

4) Нечётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n, n \in \mathbf{Z}$;

— положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$;

— отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

6) Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ на данном отрезке (рис. 96, а). Эти графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение имеет корень $x_1 = \operatorname{arctg} 2$.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π , то $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

Ответ $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$. ◁

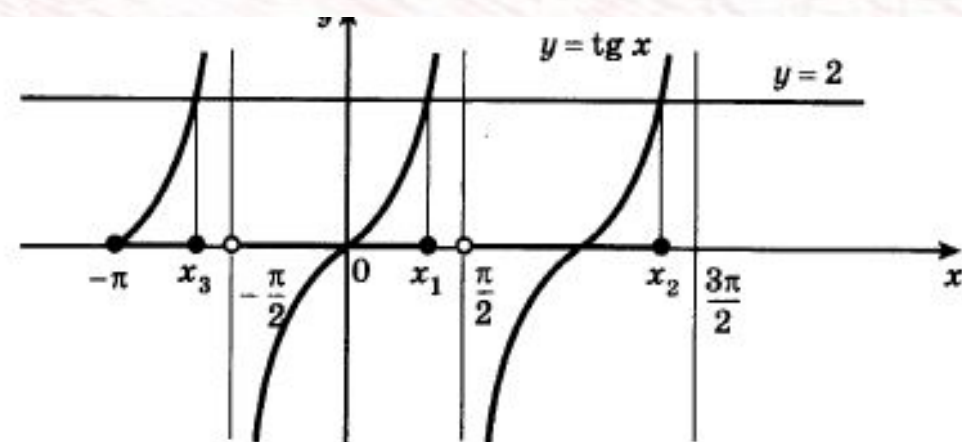
Задача 2 Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leq 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

► Из рисунка 96, а видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y = 2$ на промежутках $[-\pi; x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}; x_2\right]$.

Ответ

$$-\pi \leq x \leq -\pi + \operatorname{arctg} 2, \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq \operatorname{arctg} 2;$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi + \operatorname{arctg} 2. \quad \triangleleft$$



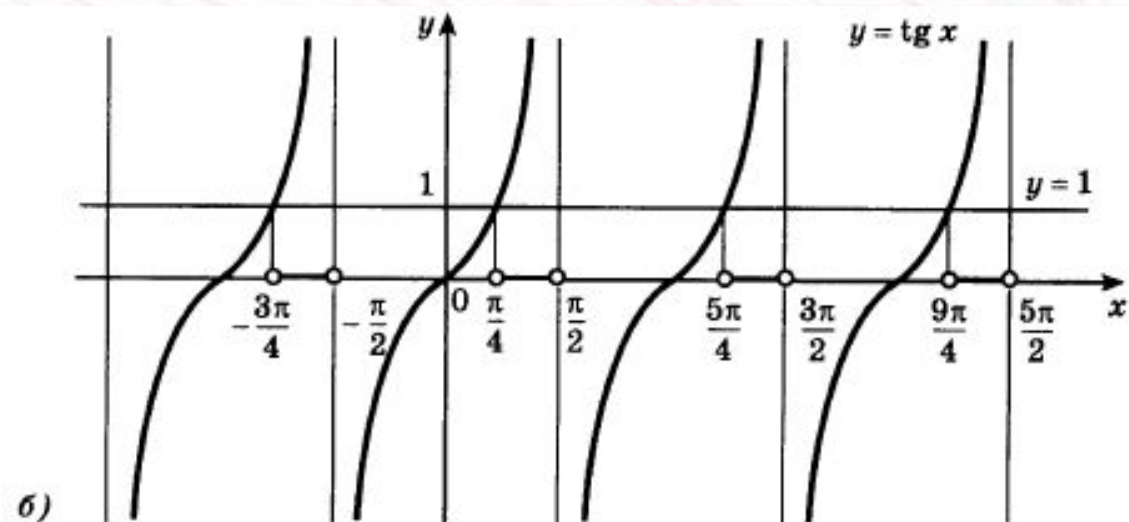
Задача 3

Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

- Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 96, б). Рисунок показывает, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на π , 2π , 3π , $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$



Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие как колебания струны, маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функцией, которая задаётся формулой $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*, а описывающие их функции — гармониками (от греч. *harmonikos* — соразмерный). График функции $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ получается из синусоиды $y = \sin x$ сжатием или растяжением её вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox .

Картинка маятник

Обычно гармоническое колебание является функцией времени: $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

- 733** (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $[-\pi; 2\pi]$ функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:
- 1) значение, равное 0;
 - 2) положительные значения;
 - 3) отрицательные значения.
- 734** (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:
- 1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$;
 - 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;
 - 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$;
 - 4) $[2; 3]$.
- 735** С помощью свойства возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ сравнить числа:
- 1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$;
 - 2) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}$;
 - 3) $\operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;
 - 4) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{7}\right)$;
 - 5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$;
 - 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1,5$.

736 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -1$.

737 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi, 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x \geq 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x < -1$; 4) $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$.

738 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < 1$; 2) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x > -1$.

739 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x = 3$; 2) $\operatorname{tg} x = -2$.

740 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x > 4$; 2) $\operatorname{tg} x \leq 5$; 3) $\operatorname{tg} x < -4$; 4) $\operatorname{tg} x \geq -5$.

741 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x \geq 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 4$; 3) $\operatorname{tg} x \leq -4$; 4) $\operatorname{tg} x > -3$.

742 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3x = -1$.

743 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x \leq 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$.

744 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

745 Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0; \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции (746—748).

746 1) $y = \operatorname{tg} |x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

747 1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$.

748 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$.

749 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geq 3$; 3) $\operatorname{ctg} x \geq -1$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.