МАТЕМАТИКА

ТРИНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Наталья Владимировна Крупина

Москва, 2021

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, является нечётной и периодической с периодом π. Поэтому достаточно построить её график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, используя периодичность, построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения.

Прежде чем строить график функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что на этом промежутке функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает.

● * Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Покажем, что $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, т. е. $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$.

По условию $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, откуда по свойствам функции $y = \sin x$ имеем $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$, а по свойствам функции $y = \cos x$ также имеем $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. ○

Зная, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, найдём несколько точек, принадлежащих графику, и построим его на этом промежутке (рис. 93).

Исходя из свойства нечётности функции $y = \operatorname{tg} x$, отразим построенный на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ график симметрично относительно начала координат,

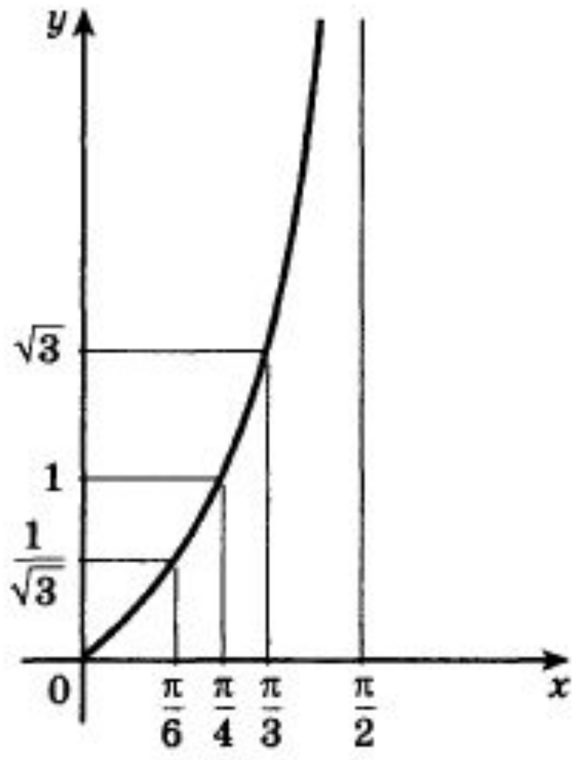


Рис. 93

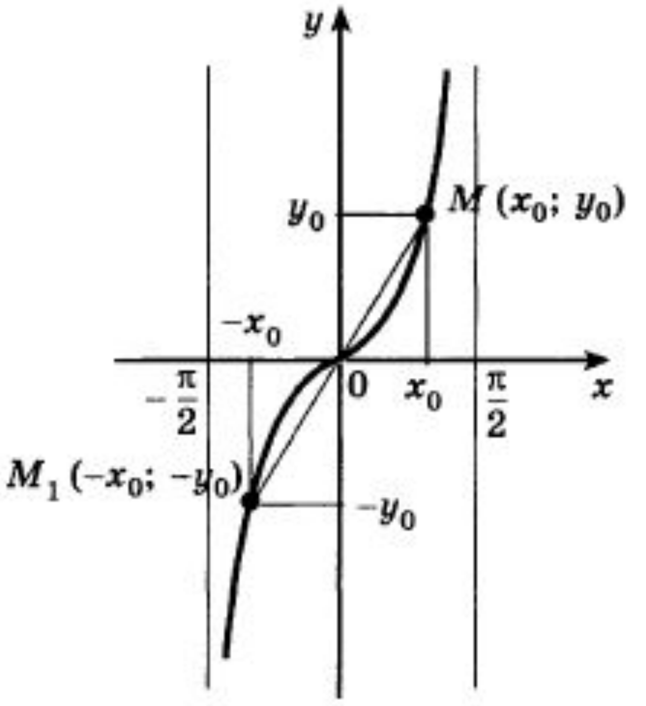


Рис. ***94***

получим график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94).

Напомним, что при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает, и поэтому график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Аналогично при отрицательных значениях x, больших $-\frac{\pi}{2}$ и приближающихся к $-\frac{\pi}{2}$, график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, т. е. прямые $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ являются вертикальными

Перейдём к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π. Следовательно, график этой функции получается из её графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94) сдвигами вдоль оси абсцисс на πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 95).

Итак, весь график функции $y = \operatorname{tg} x$ строится с помощью геометрических преобразований его части, построенной на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, так как эта функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является нечётной.

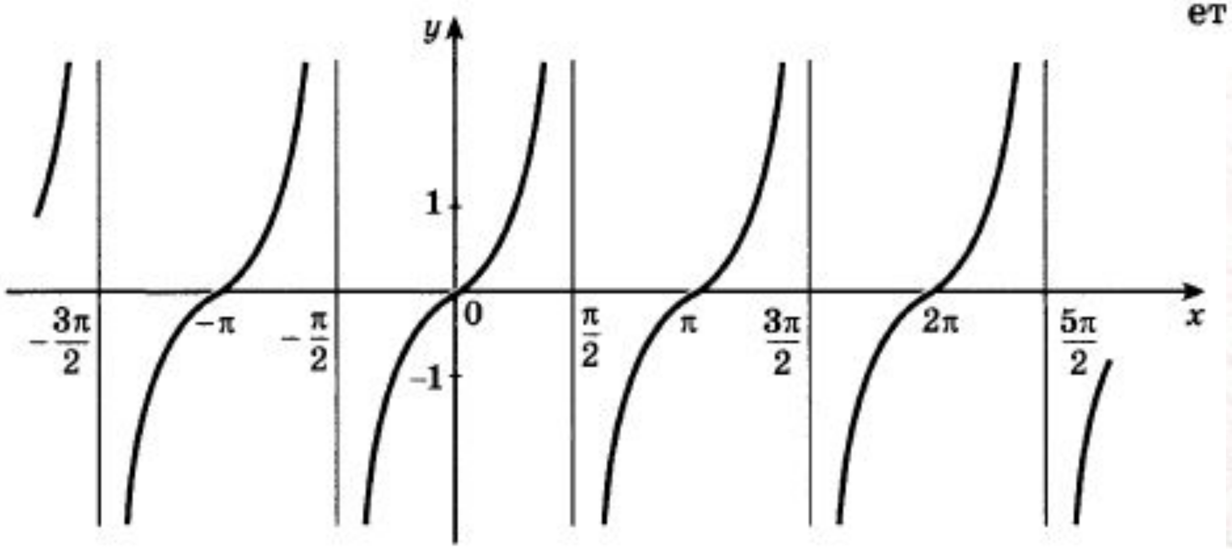


Рис. 95

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3) Периодическая с периодом π.

4) Нечётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— положительные значения на интервалах $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6) Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ на данном отрезке (рис. 96, *а*). Эти графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение имеет корень $x_1 = \operatorname{arctg} 2$.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

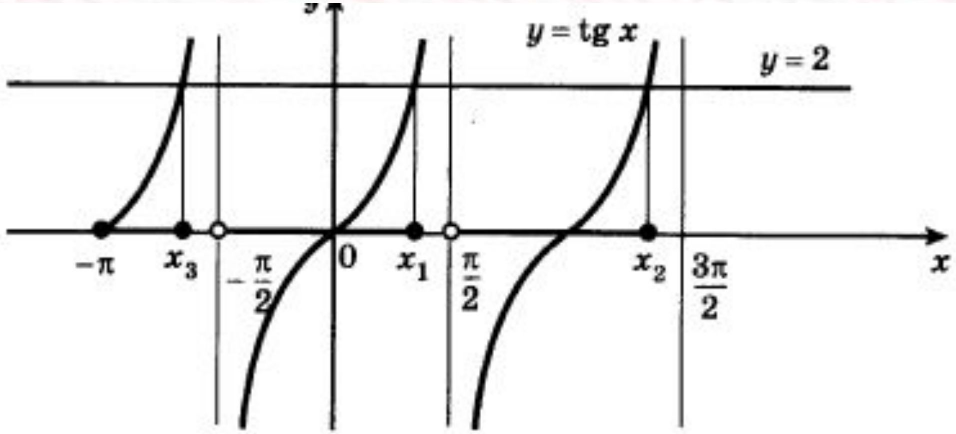
Ответ $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

▶ Из рисунка 96, *а* видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y = 2$ на промежутках $[-\pi; x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}; x_2\right]$.

Ответ $-\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \operatorname{arctg} 2$;

$\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2$. ◁

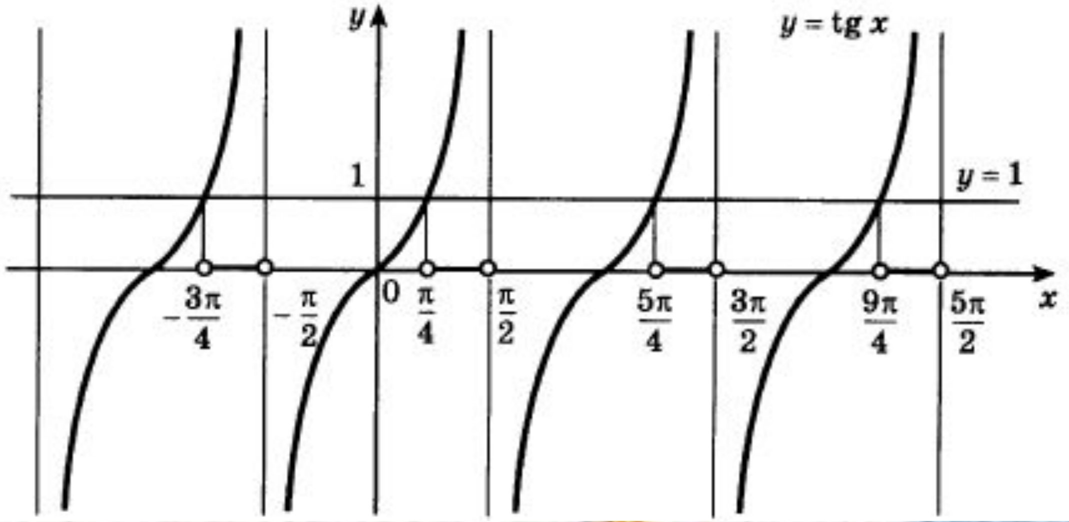


а)

Задача 3 Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 96, *б*). Рисунок показывает, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. ◁



б)

Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие как колебания струны, маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функцией, которая задаётся формулой $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*, а описывающие их функции — гармониками (от греч. harmonikos — соразмерный). График функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ получается из синусоиды $y = \sin x$ сжатием или растяжением её вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox.

Картинка маятник

Обычно гармоническое колебание является функцией времени: $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

733 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $[-\pi; 2\pi]$ функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:

1) значение, равное 0; 2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

734 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:

1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2; 3]$.

735 С помощью свойства возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ сравнить числа:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$.

736 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -1$.

737 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi,\ 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x < -1$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

738 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < 1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x > -1$.

739 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x = 3$; 2) $\operatorname{tg} x = -2$.

740 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x > 4$; 2) $\operatorname{tg} x \leqslant 5$; 3) $\operatorname{tg} x < -4$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -5$.

741 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 4$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -4$; 4) $\operatorname{tg} x > -3$.

742 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3x = -1$.

743 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$.

744 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

745 Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0;\ \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции (**746—748**).

746 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

747 1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$.

748 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$.

749 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 3$; 3) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.