Основное логарифмическое тождество

Определение логарифма

$$a^x = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$x = \log_a b$$

Логарифмом числа b по основанию a называется *показатель степени*, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0$$

Частные случаи: $\lg x = \log_{10} x$ **- десятичный логарифм**

$\ln x = \log_e x$ **- натуральный логарифм**

Свойства логарифмов

Свойства логарифмов вытекают из свойств степени:

Свойства степени:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
5. $(a^x)^y = a^{xy}$

Рассмотрим уравнения:

решить уравнение $3^x = 81$.

$3^x = 3^4$

$x = 4$

Ответ: 4.

Уравнение $3^x = 80$

таким способом решить не удается.

Однако это уравнение имеет корень.

Чтобы уметь решать такие уравнения,

вводится понятие логарифма числа.

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа b по основанию a,

где a>0, a≠0

называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Определение логарифма можно кратко записать так: $$a^{\log_a b} = b$$

Основное логарифмическое тождество

Это равенство справедливо
при $b>0, a>0, a\neq 1$.
Его называют основным
логарифмическим тождеством.

$$a^{\log_a b} = b$$

Действие нахождения логарифма числа называют логарифмированием.

$$a^{\log_a x} = x$$

$$а)\ 2^{\log_2 13} = 13$$

$$б)\ \frac{70}{2^{\log_2 5}} = \frac{70}{5} = 14$$

$$в)\ \frac{7^{\log_7 13}}{52} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

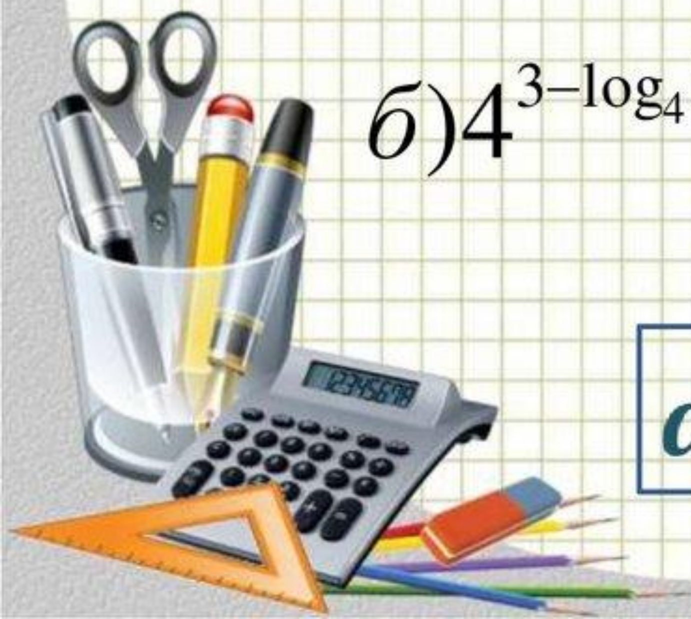
$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

$$а)\ 2^{3+\log_2 9} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 9} = 8 \cdot 9 = 72$$

$$\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$$

$$б)\ 4^{3-\log_4 32} = 4^3 : 4^{\log_4 32} = 64 : 32 = 2$$

$$\boxed{a^{m-n} = a^m : a^n}$$



Свойства, следующие из определения логарифма

- 1. $\log_a a = 1;\qquad a^1 = a.$
- 2. $\log_a 1 = 0;\qquad a^0 = 1.$
- 3. $\log_a a^c = c;\qquad a^c = a^c.$

Взаимосвязь операции возведения в степень и логарифмирования

- Возведение в степень

$$7^2 = 49;$$

$$10^3 = 1000;$$

$$0{,}2^5 = 0{,}0032;$$

$$5^{-3} = \frac{1}{125};$$

- Логарифмирование

$$\log_7 49 = 2.$$

$$\log_{10} 1000 = 3.$$

$$\log_{0{,}2} 0{,}00032 = 5.$$

$$\log_5 \frac{1}{125} = -3.$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$

$$3^{\log_3 5} = \mathbf{5}$$

$$7^{3\log_7 2} = (7^{\log_7 2})^3 = 2^3 = 8$$

$$8^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$$

$$10^{1+\lg 5} = 10 \cdot 10^{\lg 5} = 10 \cdot 5 = 50$$

$$2^{\log_2 7 - 1} = 2^{\log_2 7} : 2 = 7 : 2 = 3{,}5$$

Домашняя работа

Вычислить:

1) $2^{2\log_4 17}$; 2) $2^{3\log_8 75}$; 3) $125^{\log_5 2}$; 4) $27^{\log_3 4}$.

Посмотрите, как правильно нужно решать и решите новые примеры

Вычислить:

1) $2^{2\log_4 17}$; 2) $2^{3\log_8 75}$; 3) $125^{\log_5 2}$; 4) $27^{\log_3 4}$.

1) $2^{2\log_4 17} = (2^2)^{\log_4 17} = 4^{\log_4 17} = 17$

2). $2^{3\log_8 75} = (2^3)^{\log_8 75} = 8^{\log_8 75} = 75$;

3). $125^{\log_5 2} = 5^{3\log_5 2} = (5^{\log_5 2})^3 = 2^3 = 8$;

4). $27^{\log_3 4} = 3^{3\log_3 4} = (3^{\log_3 4})^3 = 4^3 = 64$.

Вычислить:

$8^{2\log_8 3}$

$\log_{11} \sqrt[3]{121}$

$36^{\log_6 5}$

$5^{\log_{25} 49}$