

План

1. Предисловие. Закон сохранения заряда
2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона
3. Электростатическое поле. Напряжённость поля. Принцип суперпозиции
4. Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме
5. Применение теоремы Гаусса
 - 1) Поле бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра)
 - 2) Поле сферы, равномерно заряженной по объёму
 - 3) Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости
 - 4) Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей

Предисловие. Закон сохранения заряда

- Тела при трении способны электризоваться
- Существует 2 сорта зарядов: + и –
- Носители заряда – элементарные частицы (протоны, электроны)
- Все заряженные частицы имеют заряд, кратный элементарному $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл : $q = \pm N \cdot e$
- В электрически нейтральных телах сумма отрицательных зарядов по модулю равна сумме положительных
- При трении электроны переходят с одного тела на другое ; тела заряжаются равными противоположными по знаку зарядами
- Заряд не зависит от системы отсчёта
- Заряды рождаются и исчезают парами:



- В электрически изолированной системе

$$\Sigma q = \text{const}$$

Взаимодействие электрических зарядов в вакууме

Закон Кулона

Определение:

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других тел

Закон Кулона:

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

Только для точечных зарядов

Сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме прямо пропорциональна величине каждого заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

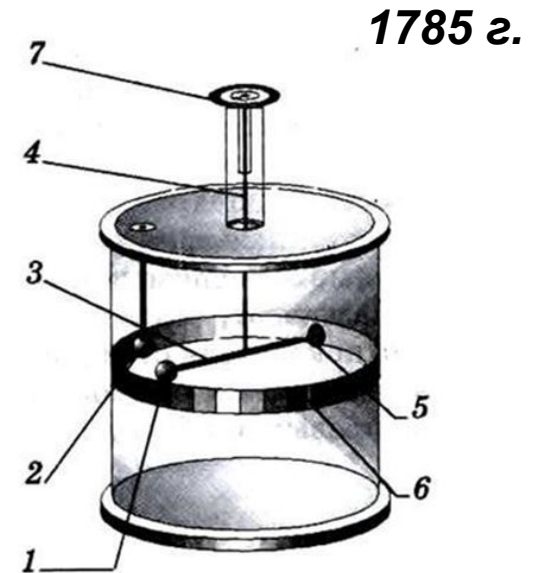
Взаимодействие электрических зарядов в вакууме

Закон Кулона



Крутильные весы:

1. Незаряженная сфера
2. Неподвижная заряженная сфера
3. Легкий изолирующий стержень
4. Упругая нить
5. Бумажный диск
6. Шкала



Сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме прямо пропорциональна величине каждого заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

Закон Кулона:

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

$$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

В системе единиц СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$$

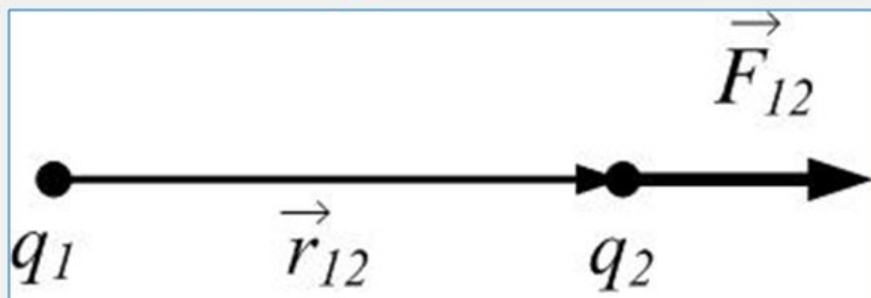
$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

$$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

В системе единиц CGSE $k=1$

Дальше будет только СИ

Закон Кулона в векторном виде:



$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

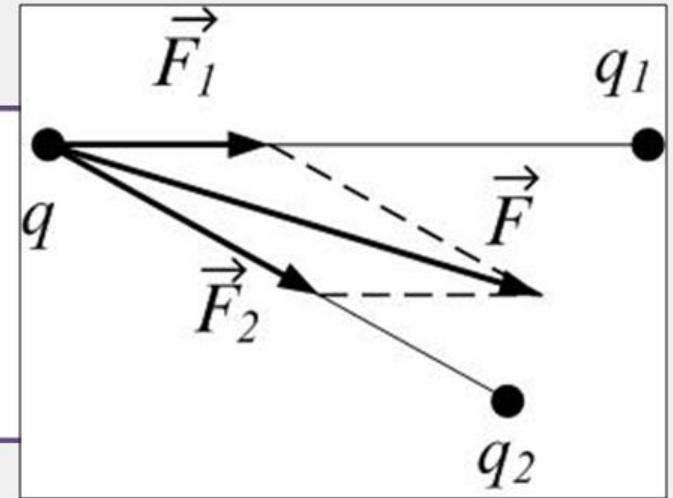
Одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые - притягиваются

Свойства Кулоновских сил:

1. Силы центральные

2. Сила взаимодействия двух зарядов между собой не изменится, если рядом поместить третий; то есть силы можно складывать:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$



3. По теории близкодействия, заряды взаимодействуют посредством полей. На данный заряд действует поле, созданное другим зарядом

Теория дальногодействия (о том, что взаимодействия распространяются мгновенно, без посредников) **неверна**

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Принцип суперпозиции

Во многих случаях заряды можно считать распределёнными непрерывно по объёму, по поверхности или по некоторой линии

Вводят понятия объёмной, поверхностной или линейной плотности заряда

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad \text{Объёмная плотность заряда} - \text{заряд единицы объёма}$$

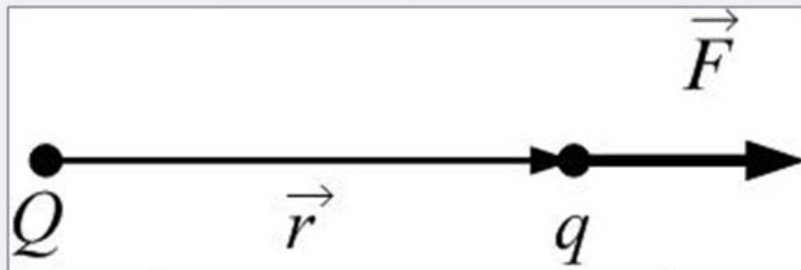
$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad \text{Поверхностная плотность заряда} - \text{заряд единицы площади}$$

$$\tau = \frac{dq}{dl} \quad \text{Линейная плотность заряда} - \text{заряд единицы длины}$$

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Любой заряд создаёт в окружающем пространстве электростатическое поле
Электростатическое поле – это пространство с особыми свойствами: оно действует на другие заряды, помещённые в поле

Пусть поле создаётся точечным зарядом Q , а q – пробный заряд (то есть не искажающий поле)



$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Отношение $\frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ одно и то же для любого пробного заряда

Назовём напряжённостью отношение: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ Характеризует точку ПОЛЯ; не зависит от пробного заряда

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Определение:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$[E] = \frac{H}{Кл} = \frac{В}{м}$$

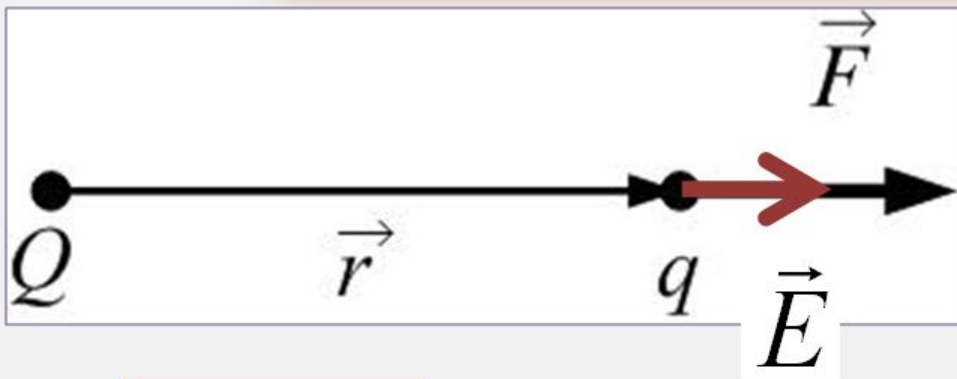
Напряжённость электростатического поля в данной точке численно равна силе, действующей на единичный положительный пробный точечный заряд, помещённый в данную точку поля

Напряжённость – *силовая векторная характеристика поля*

Если в точку поля с напряжённостью \vec{E} поместить точечный заряд q , то на него со стороны поля будет действовать сила, равная $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Напряжённость поля точечного заряда



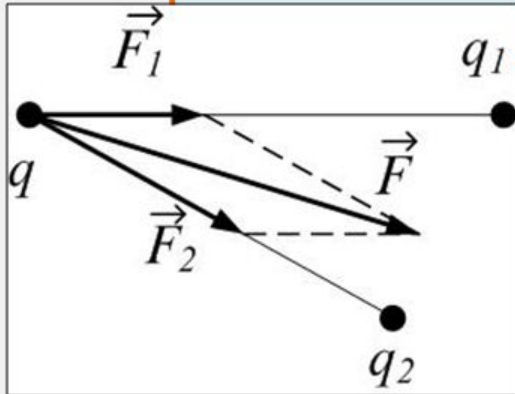
$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E}_{\text{т.з.}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Принцип суперпозиции



Найдём напряжённость поля, созданного системой точечных зарядов q_i

Сила, действующая на пробный заряд q со стороны системы точечных зарядов:

$$\begin{cases} \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (q\vec{E}_i) = q \cdot \sum_i \vec{E}_i \\ \vec{F} = q \cdot \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Это принцип суперпозиции:

Напряжённость поля, созданного в данной точке системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, созданных в этой точке каждым зарядом

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Принцип суперпозиции

Если заряды распределены непрерывно (например, по объёму), выделяют малый (почти точечный) объём dV , несущий точечный заряд $dq = \rho \cdot dV$

Напряжённость поля, созданного зарядом dq , равна:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

По принципу суперпозиции рассчитывают поле, созданное распределённым зарядом:

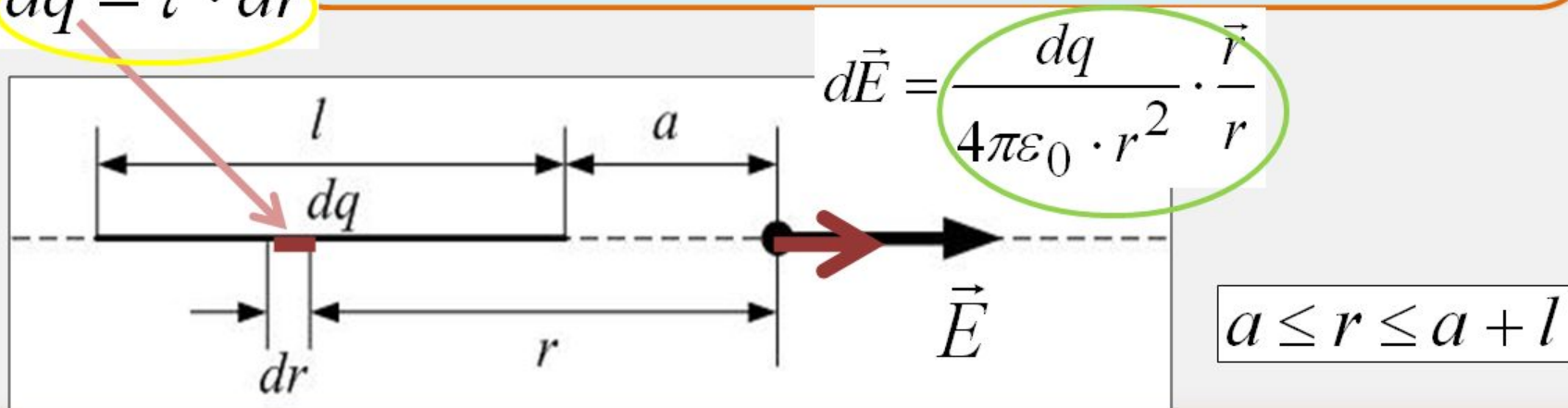
$$\vec{E} = \int_V d\vec{E}$$

Интеграл надо брать по ВСЕЙ области, в которой локализованы создающие поле заряды

Пример:

Расчёт напряжённости поля, созданного зарядом q , равномерно распределённым по тонкому прямому стержню длиной l , в точке, лежащей на продолжении оси стержня на расстоянии a от ближайшего конца

$$dq = \tau \cdot dr$$



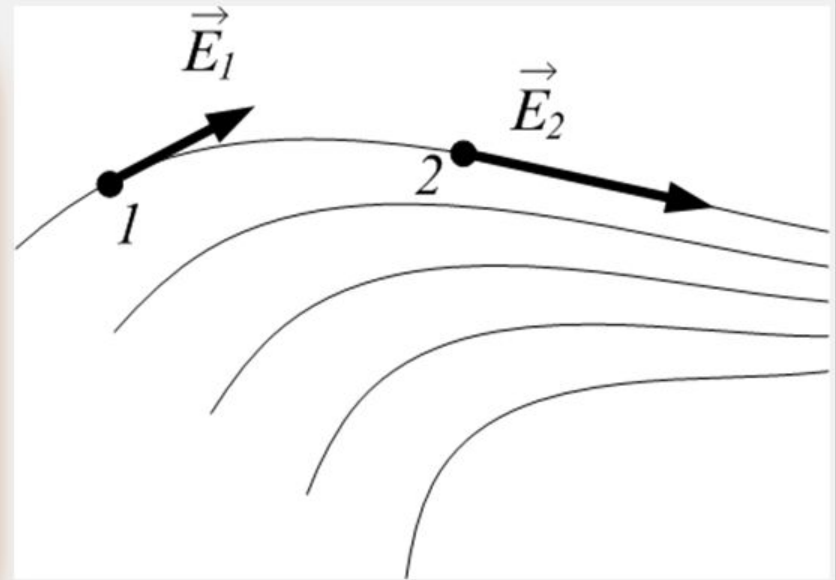
$$E = \int_a^{a+l} dE = \int_a^{a+l} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \int_a^{a+l} \frac{\tau \cdot dr}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^{a+l}$$

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{a+l} + \frac{1}{a} \right) = \frac{q}{l} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot a(a+l)}$$

Электростатическое поле. Линии напряжённости

Поля можно изображать графически
Линии напряжённости проводят так,
что:

- Касательная к линии в каждой точке совпадает по направлению с вектором E
- Густота линий пропорциональна E

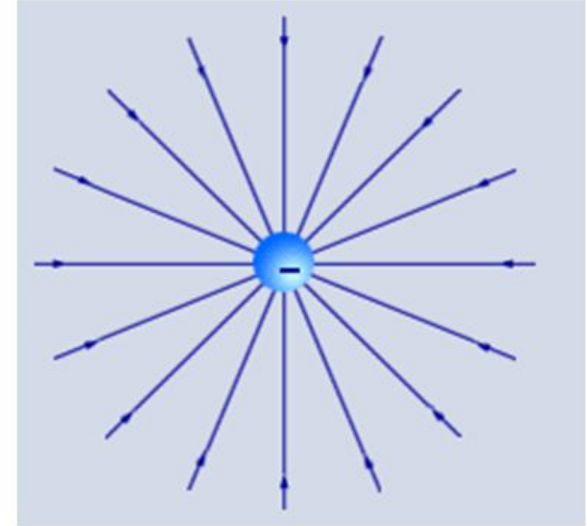
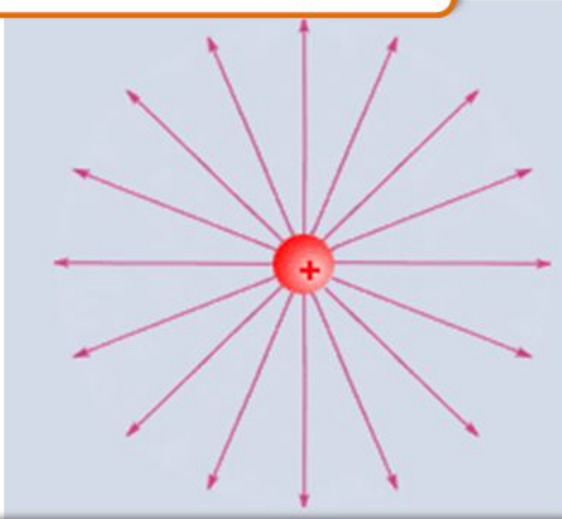


Свойства линий напряжённости:

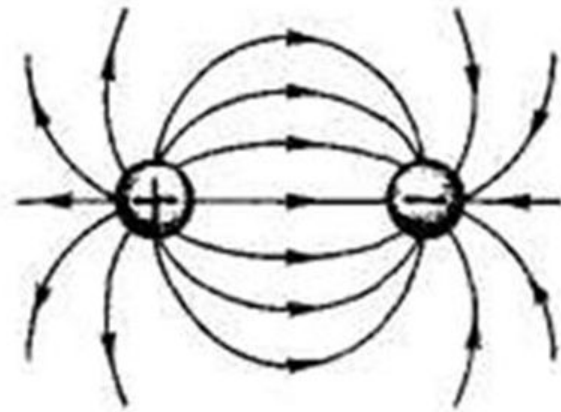
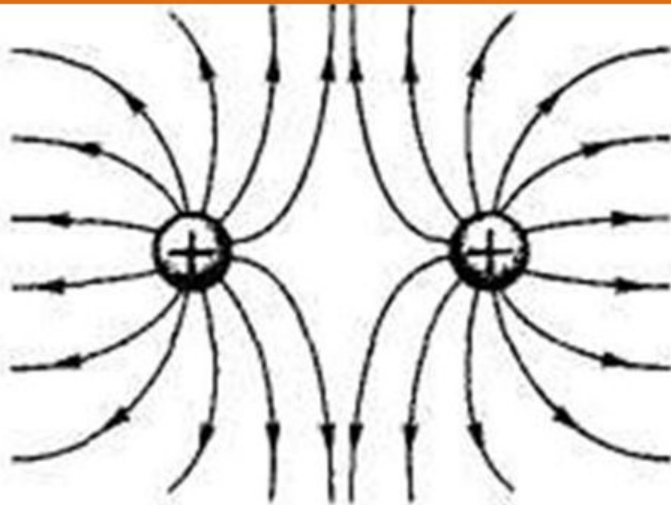
- начинаются на положительных зарядах или в бесконечности;
- заканчиваются на отрицательных зарядах или в бесконечности;
- не могут обрываться нигде, кроме зарядов;
- не могут пересекаться (иначе напряжённость в точке пересечения была бы определена неоднозначно)

Линии напряжённости. Примеры

Поле точечного заряда



Поле системы двух зарядов

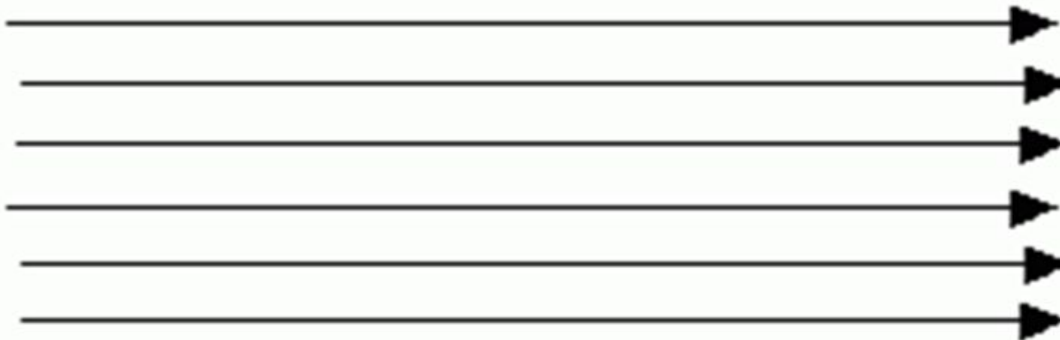


Линии напряжённости. Примеры

Поле конденсатора



Однородное поле: $\vec{E} = \text{const}$



Поток вектора напряжённости

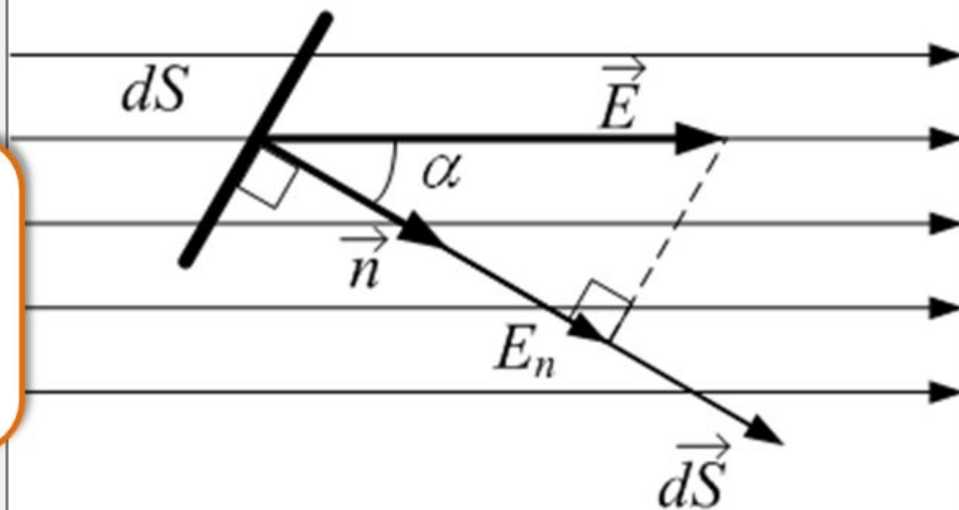
Рассматривается некоторое поле

Площадка dS так мала, что в её пределах поле однородно

α – угол между единичным вектором нормали к площадке и вектором напряжённости; вектор $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$

Определение:

Потоком $d\Phi_E$ вектора напряжённости \vec{E} через площадку dS называется:



$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E_n \cdot dS$$

Поток вектора напряжённости равен числу линий напряжённости, пронизывающих площадку

Поток вектора напряжённости

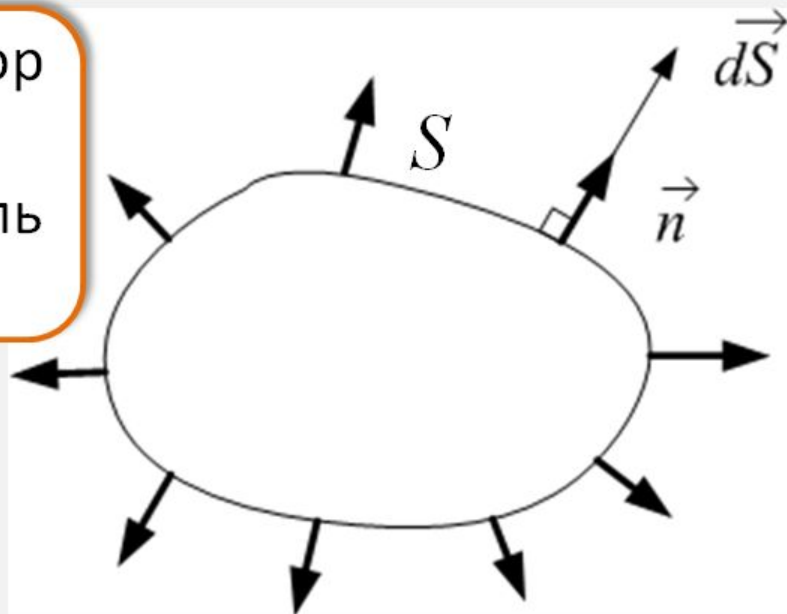
Поток вектора напряжённости через любую поверхность S :

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E_n \cdot dS$$

Интегрирование ведётся по всей поверхности

Для незамкнутой поверхности выбор нормали неоднозначен
Для замкнутой поверхности нормаль
- всегда внешняя

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n \cdot dS$$



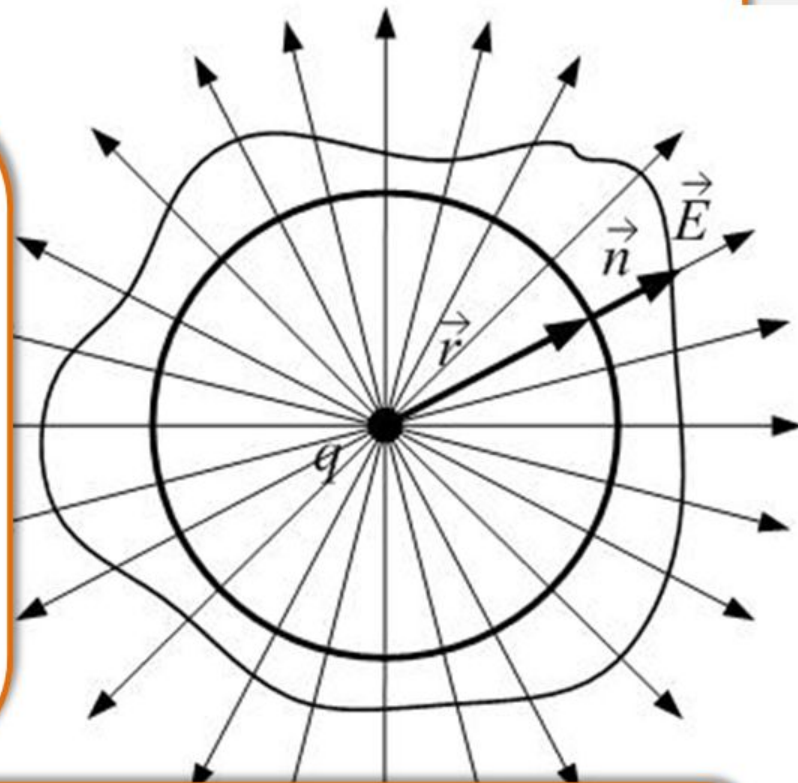
Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса

Найдём поток через сферу, описанную вокруг точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS =$$

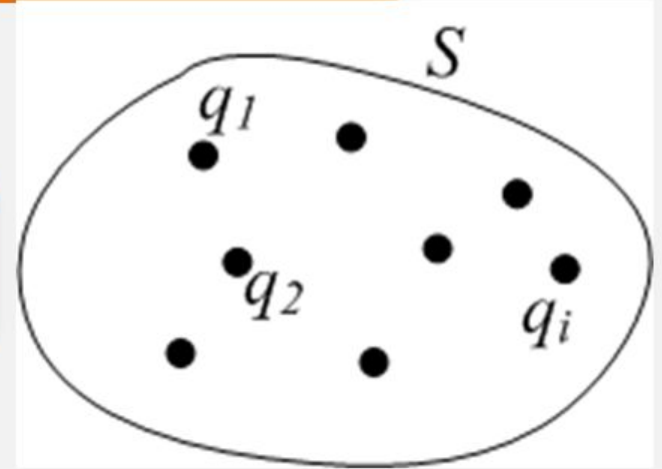
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Линии нигде не обрываются → поток такой же через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряд

Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса

Если поверхность охватывает систему точечных зарядов:



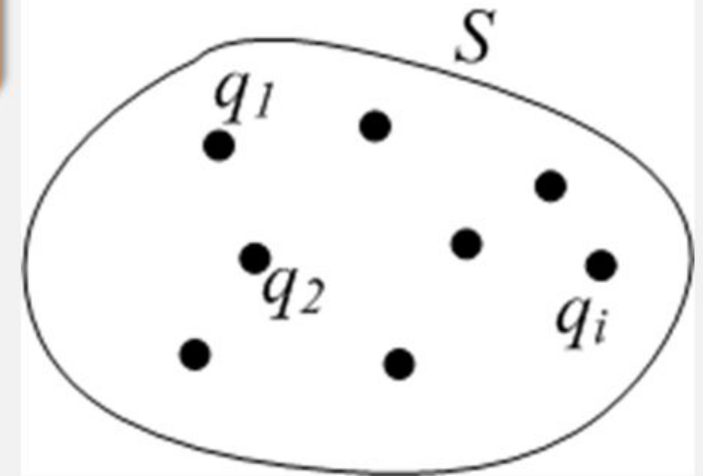
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \left(\oint_S \vec{E}_i d\vec{S} \right) = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

Это – теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

Теорема Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$



Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью, делённой на электрическую постоянную ϵ_0

Поток определяется суммарным зарядом внутри объёма, ограниченного поверхностью

Применение теоремы Гаусса

Поле заряженной нити

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

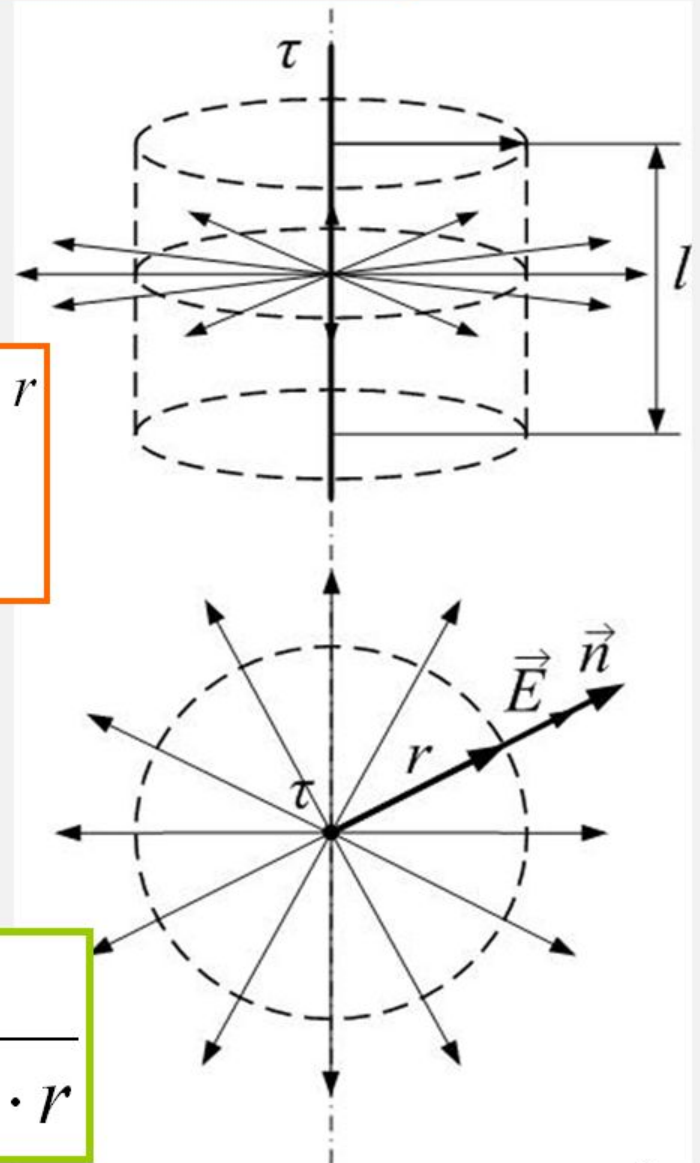
$$\Phi_E = \oint_S E \cos \alpha dS = E \cdot \int_{\text{по боковой поверхности}} dS = E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r$$

$$\sum_i q_i = \tau \cdot l$$

$$\tau = \frac{q}{l}$$

$$E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{\epsilon_0} \tau \cdot l$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot r}$$



Применение теоремы Гаусса

Поле заряженного цилиндра радиусом R

1) $r > R$

Вне цилиндра то же, что и для нити:

$$E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{\epsilon_0} \tau \cdot l \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

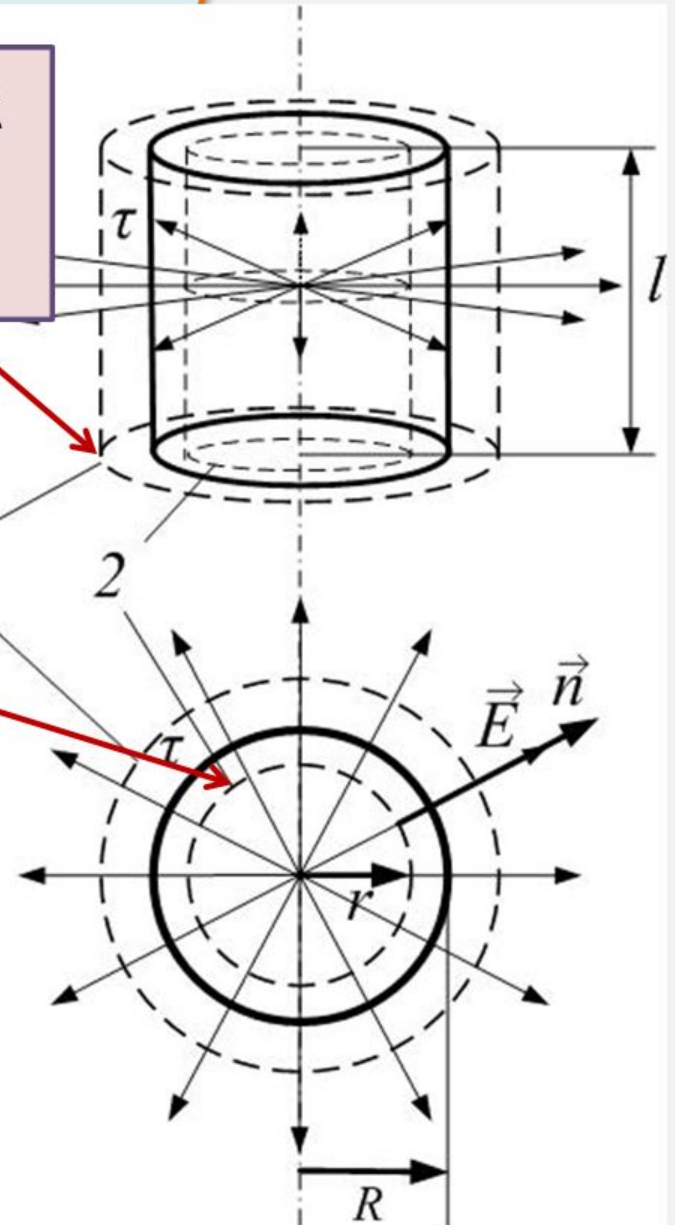
2) $r < R$

Внутри цилиндра (трубки):

$$\sum_i q_i = 0$$

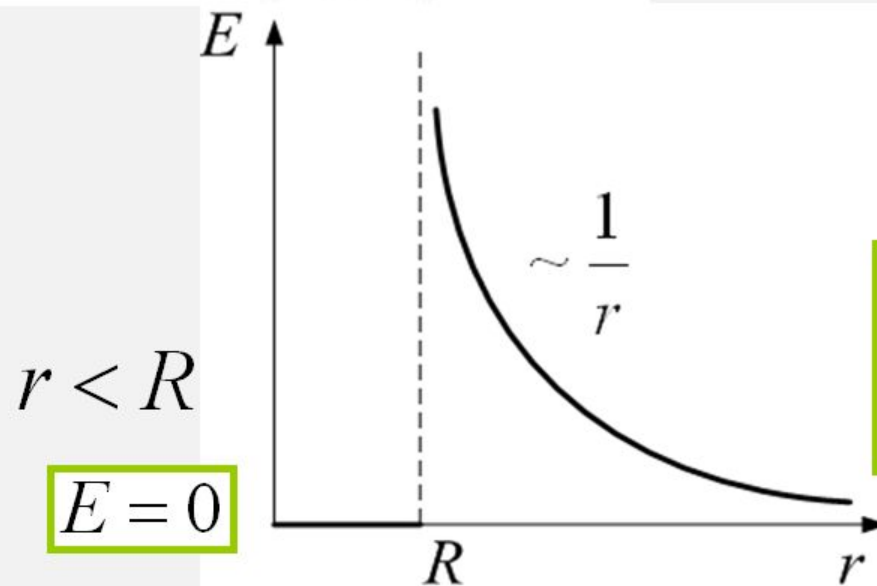
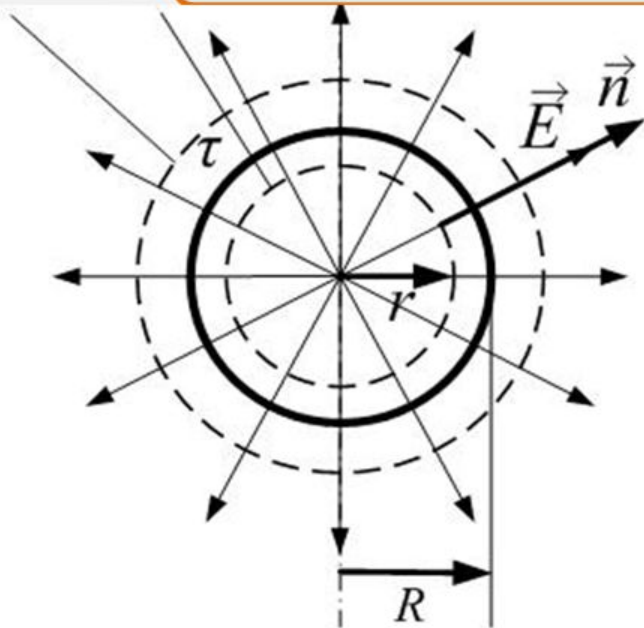
$$E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = 0$$

$$E = 0$$



Применение теоремы Гаусса

Поле заряженного цилиндра
(трубки)



$r < R$

$$E = 0$$

$r > R$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

Применение теоремы Гаусса

Поле сферы (шара), равномерно заряженного по объёму с объёмной плотностью заряда ρ

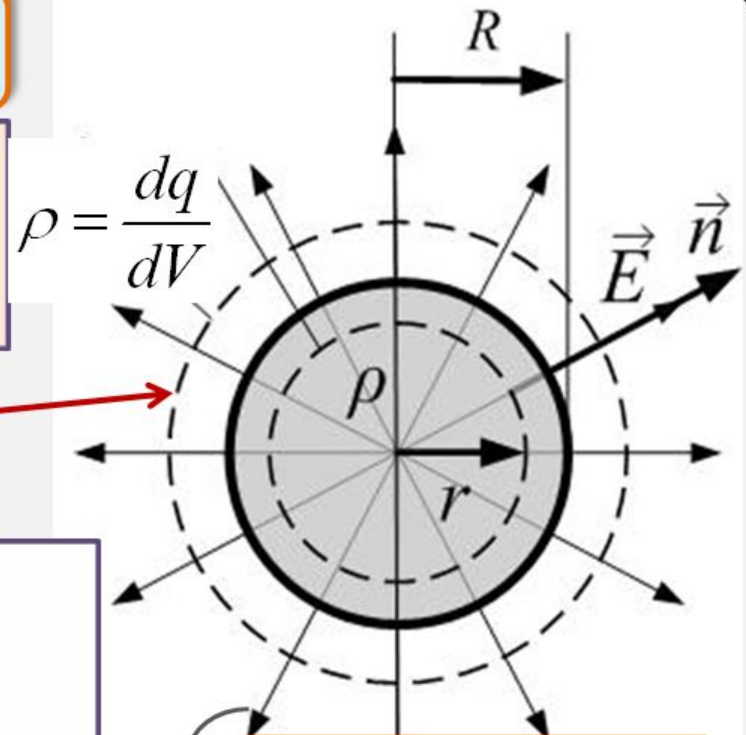
1) Проводим Гауссову поверхность вне заряженной сферы: $r > R$

$$\Phi_E = E \cdot S_{\text{гаусс.сферы}} = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

Поле вне заряженной сферы определяется её полным зарядом



$$E_{\text{вне}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

$$E_{\text{вне}} = \frac{\rho \cdot R^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Применение теоремы Гаусса

Поле сферы (шара), равномерно заряженного по объёму с объёмной плотностью заряда ρ ;

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

2) Проводим Гауссову поверхность внутри заряженной сферы: $r < R$

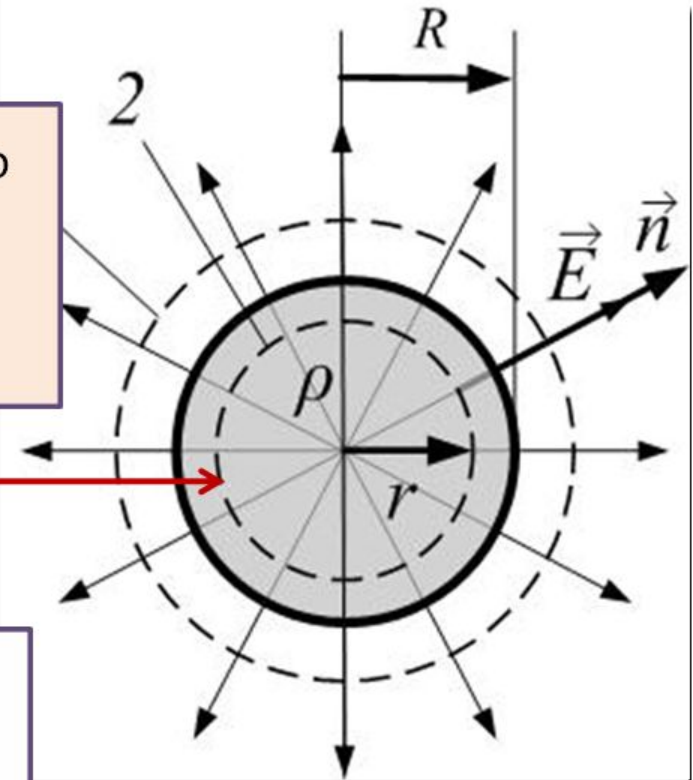
$$\Phi_E = E \cdot S_{\text{Гаусс.сферы}} = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

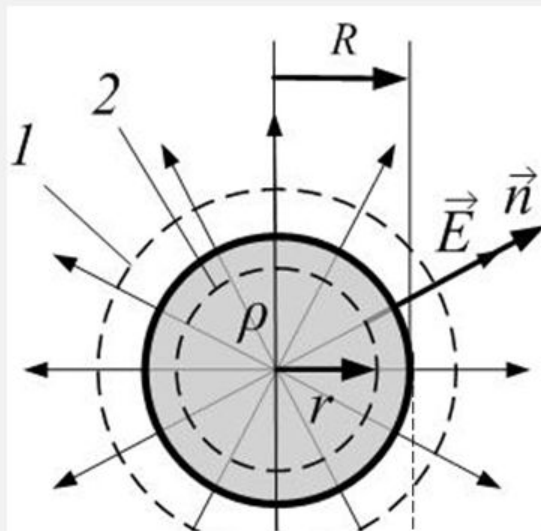
При $r=R$:

$$E_{(r=R)} = \frac{\rho \cdot R}{3 \cdot \varepsilon_0}$$



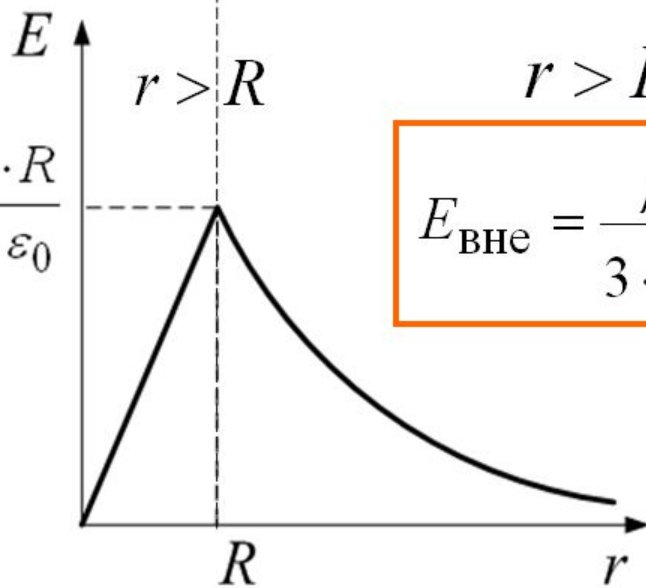
Применение теоремы Гаусса

Поле сферы, равномерно заряженной по объёму



$r < R$

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0}$$



$$E_{\text{вне}} = \frac{\rho \cdot R^3}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

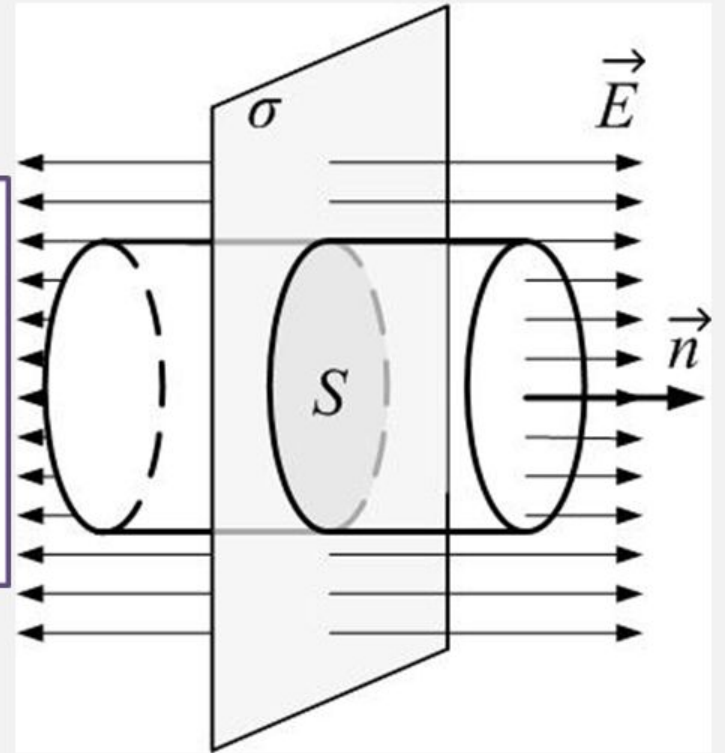
Применение теоремы Гаусса

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$\sigma = \frac{dq}{dS} > 0$$

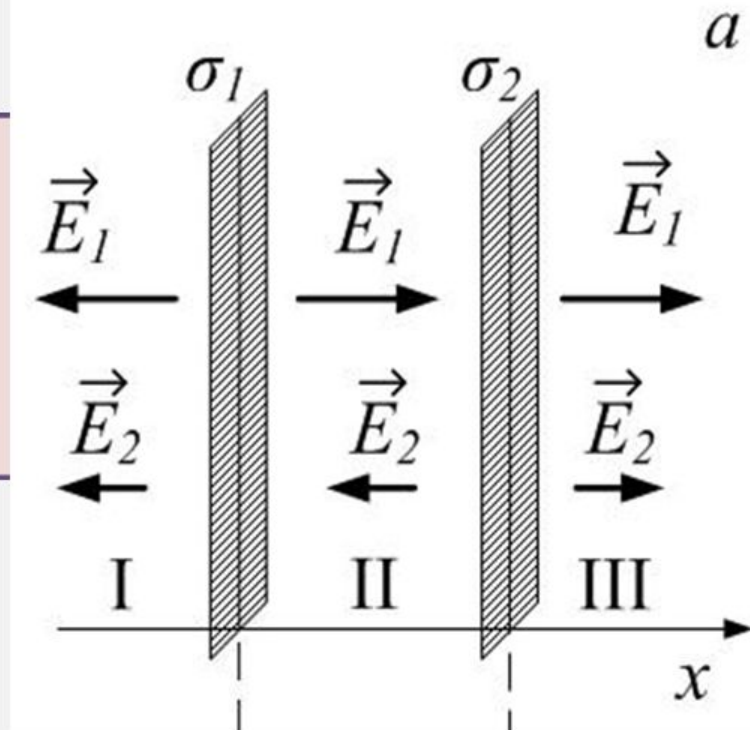
$$\left. \begin{aligned} \Phi_E &= E \cdot 2S \\ \Phi_E &= \frac{1}{\varepsilon_0} q \end{aligned} \right\} E \cdot 2S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \cdot S$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$



Применение теоремы Гаусса

Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей
(расчёт по принципу суперпозиции)



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{Ix} = -E_1 - E_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} \\ E_{IIx} = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} \\ E_{IIIx} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0} \end{array} \right.$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2 \cdot \epsilon_0}$$

Применение теоремы Гаусса
Поле двух параллельных
бесконечных равномерно
заряженных плоскостей

$$E_{Ix} = -E_1 - E_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E_{IIx} = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E_{IIIx} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

