ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 7

Повторение испытаний

Определение сложного эксперимента

Рассмотрим единичный эксперимент, в результате которого может произойти некоторое событие А. Если событие А произошло, говорим, что произошел успех. Пусть этот эксперимент проводится несколько раз.

Основные вопросы

1. Вероятность для некоторого числа появлений события А;

2. Вероятность для числа проведенных испытаний до первого появления события А или некоторого фиксированного числа появлений А.

Типы испытаний

1. Вероятность успеха постоянна в каждом испытании;

2. Вероятность успеха меняется.

Схема Бернулли (биномиальная)

Пусть производится n независимых испытаний. Пусть $\mathbf{P}(A)=p$ в каждом испытании и $q = 1 - p$.

Найти

$P_n(k)$ ={в ***n*** испытаниях событие ***A***

наступит ***k*** раз}

Вывод формулы

Вероятность события {в ***n*** испытаниях ***A*** наступит ***k*** раз и не наступит ***n – k*** раз} равна

$$p^k q^{n-k}$$

Число таких событий равно C_n^k.

Так как эти события *несовместны и равновероятны*, получаем

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют **формулой Бернулли**.

Пример 1

Университетом для студенческих общежитий приобретено 5 телевизоров. Для каждого из них вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,1. Определить вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдет из строя ровно один.

Решение

- Из условия задачи выпишем p, n, k, q.
- n=5; k=1; p=0,1; q=0,9.

- Тогда по формуле Бернулли

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{5-1} = 5 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4 \approx 0,33$$

Пример 2

Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна ***p = 0,75***.
Найти вероятность того, что в ближайшие ***6*** суток расход электроэнергии в течение ***4*** суток не превысит нормы.

Решение

***p* = 0,75. *q* = 1 – *p* = 1 – 0,75 = 0,25.**
Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 =$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30.$$

Схема Пуассона

Пусть вероятность успеха при фиксированном числе испытаний ***n*** постоянна и мала, уменьшается с ростом ***n*,** однако

$$\lambda = np$$

постоянна.

Формула Пуассона

$$P(k) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

Пример 1

Вероятность того, что какой-нибудь абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят ровно 4 абонента?

Решение

- По условию задачи

  p=0,01;   n=300;   k=4.
- Найдем   λ=300·0,01=3
- По формуле Пуассона

$$P_{300}(4)=\frac{3^4\cdot e^{-3}}{4!}\approx 0,05$$

Пример 2

Найти вероятность не более двух успехов в схеме Пуассона при $\lambda = 1.$

Решение

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{k} \le 2\right) = P\left(0\right) + P\left(1\right) + P\left(2\right) =$$

$$= \frac{1^0}{0!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{5}{2}e^{-1} \approx 0{,}923$$

Геометрическая схема

- Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события ***A*** равна ***p (0<p<1)*** и ***q = 1 – p***.
- Испытания проводятся до первого появления события ***A***.

Основной вопрос

- Пусть в первых k – 1 испытаниях событие А не наступило, а в k-м испытании появилось. Тогда

$$P(k) = q^{k-1} p.$$

Пример

Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$.

Найти вероятность того, что попадание произойдёт при третьем выстреле.

Решение

Из условия задачи выпишем
p = 0,6; q = 0,4; k = 3.

$$P = q^{k-1} p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Формулы Пуассона и Лапласа

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях ***n*** достаточно трудно.

Например, если n=5000, k=3000,p=0,1, то для отыскания вероятности $P_{5000}(3000)$ надо вычислить выражение:

$$P_{5000}(3000) = \frac{5000!}{3000! \cdot 2000!}(0,1)^{3000} \cdot (0,9)^{2000}$$

Теорема Пуассона

Пусть в схеме Бернулли ***n*** велико, ***p*** мало и ***npq*** <9. Тогда

$$P_n(k) \approx \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!},$$

где

$$\lambda = np$$

Пример

Завод отправил на базу ***5000*** доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна ***0, 0002***.

Найти вероятность того, что на базу прибудут ***3*** негодных изделия.

Решение

n = 5000, p = 0,0002, к = 3.

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

$$P_{5000}(3) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

Локальная теорема Лапласа

Если вероятность ***p*** появления события ***A*** в каждом испытании постоянна, отлична от нуля и единицы и ***npq*** >9, то

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ называется

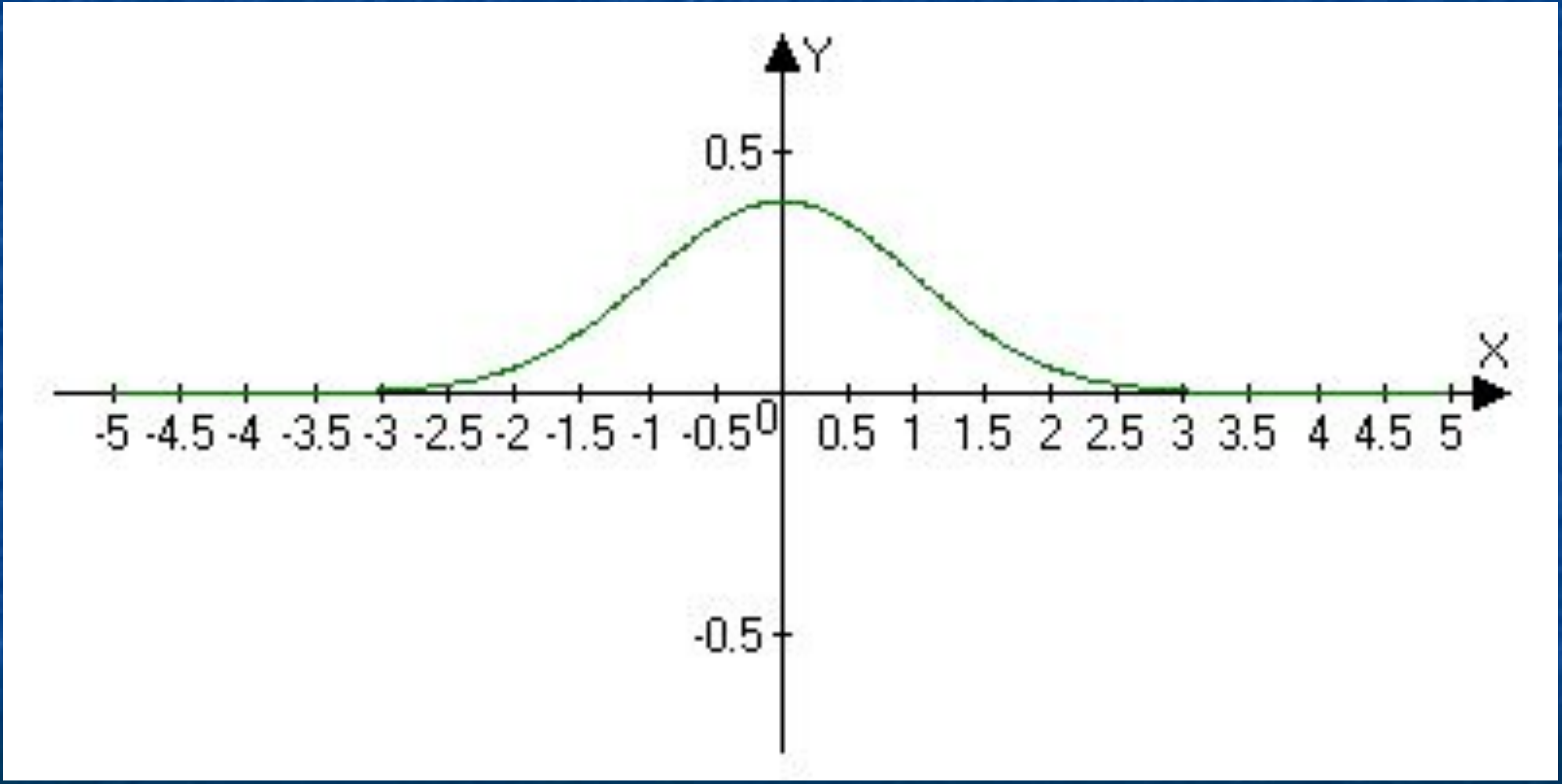
функцией Гаусса.

Свойства функции Гаусса

1. Четность $\varphi(-x) = \varphi(x)$

2. Асимптотичность $\varphi(x) \approx 0, x \geq 4$

График функции Гаусса



Пример

Найти вероятность того, что событие ***A*** наступит ровно ***80*** раз в ***400*** испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна ***0,2***.

Решение

n = 400;k = 80; p = 0,2; q = 0,8.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0.2}{8} = 0.$$

По таблице находим:

$$\varphi(0) = 0,3989.$$

Искомая вероятность:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

Пример

Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p = 0,75$. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Решение

По условию, n = 10; k = 8; p = 0.75; q = 0,25.

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \cdot \varphi(x) =$$

$$= 0,7301 \cdot \varphi(x)$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 0,36.$$

По таблице :

$$\varphi(36) = 0,3739.$$

Искомая вероятность:

$$P_{10}(8) = 0,7301 \cdot 0,3739 = 0,273.$$

Формула Бернулли приводит к другому результату, а именно: $P_{10}(8) = 0,282.$

Интегральная теорема Лапласа

Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие ***A*** появится в ***n*** испытаниях не менее k_2 и не более k_1 раз?

Интегральная Теорема Лапласа

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi_0\left(x_2\right)-\Phi_0\left(x_1\right)$$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\qquad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция Лапласа

$$\Phi_0\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

Свойства функции Лапласа

1. Нечетность $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x).$

2. Асимптотичность $\Phi_0\left(x\right) \approx 0,5; x \geq 5$

Пример

Вероятность того, что деталь не прошла проверку, равна $p=0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение

По условию, p = 0,2; q = 0.8; n = 400;

$$k_1 = 70;\ k_2 = 100$$

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

$$P_{400}(70,\,100) = \Phi_0(2{,}5) - \Phi_0(-1{,}25) = \Phi_0(2{,}5) + \Phi_0(1{,}25).$$

По таблице находим:

$$\Phi_0(2{,}5) = 0{,}4938; \quad \Phi_0(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность

$$P_{400}(70{,}100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

$$np - q \le M \le np + p$$

Пример

Монета бросается 100 раз. Найти наивероятнейшее число выпадений герба.

$$np - q \le M \le np + p, n = 100, p = q = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$50 - 0,5 \le M \le 50 + 0,5 \Rightarrow M = 50$$

Задачи

Задача 1

Вероятность выигрыша в одной партии равна 0,5. Найти вероятность выигрыша менее 2-х партий из 4-х.

Решение

- Из условия задачи n=4; k=2; p=q=0,5.
- Менее 2-х из 4-х партий по формуле Бернулли

$$P_4(0)+P_4(1)=C_4^0\cdot 0,5^0\cdot 0,5^4+C_4^1\cdot 0,5^1\cdot 0,5^3=\frac{5}{16}$$

Задача 2

Вероятность попадания стрелком при одном выстреле 0,3. Стрелок делает 10 выстрелов. Найти вероятность, что не менее 7 выстрелов попали.

Решение

- По условию задачи находим
  n=10; k=7; p=0,3; q=0,7.
- По формуле Бернулли (не менее 7 из 10)

$$P_{10}(9)+P_{10}(10)=C_{10}^{9}\cdot 0,3^{9}\cdot 0,7^{1}+C_{10}^{10}\cdot 0,3^{10}\cdot 0,7^{0}\approx 0,00015$$

Задача 3

В результате обследования были выявлены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней двух мальчиков.

Решение

- Вероятность появления мальчика и девочки равна p=1/2; n=4; k=2; q=1/2.
- По формуле Бернулли вероятность появления двух мальчиков в семье равна

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

Задача 4

Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки “А”, равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется не менее чем двум покупателям.

Решение

- По условию задачи n=4; k=2; p=0,4; q=0,6.
- Вероятность, что холодильник потребуется не менее чем двум покупателям по формуле Бернулли

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=C_4^2\cdot 0,4^2\cdot 0,6^2+$$
$$+C_4^3\cdot 0,4^3\cdot 0,6^1+C_4^4\cdot 0,4^4\cdot 0,6^0=0,5248$$

Задача 5

В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три, пять замков.

Решение

- В задаче n=10000; p=0,0002.
- Используя формулу Пуассона найдем λ=np=10000 · 0,0002=2;
- Вероятность, что откажут два замка

$$P_{10000}(2) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0,27$$

- Вероятность, что откажут три замка

$$P_{10000}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-3}}{3!} = 0,18$$

- Вероятность, что откажут пять замков

$$P_{10000}(5) = \frac{2^5 \cdot e^{-5}}{5!} = 0,036$$

Задача 6

Всхожесть семян огурцов равна 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?

Решение

- В задаче n=5; k=4; p=0,8; q=0,2.
- По формуле Бернулли имеем

$$P_5(4)+P_5(5)=C_5^4\cdot 0,8^4\cdot 0,2+C_5^5\cdot 0,8^5\cdot 0,2^0=0,7373$$

Задача 7

Найти вероятность того, что если бросить монету 200 раз, то орел выпадет от 90 до 110 раз.

Решение

- Вероятность выпадения орла/решки
  p=q=0,5; n=200; k1=90; k2=110.

- По интегральной теореме Лапласа:

$$P_{200}(90;110)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

- Найдем

$$x_2 = \frac{110 - 200 \cdot 0,8}{\sqrt{200 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 1,41$$

$$x_1 = \frac{90 - 200 \cdot 0,8}{\sqrt{200 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,41$$

$$P_{200}(90;110) = \Phi(1,41) - \Phi(-1,41) = 2\Phi(1,41) = 0,8414$$

Задача 8

В жилом доме имеется 6400 ламп. Вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет между 3120 и 3200.

Решение

- n=6400; k1=3120; k2=3200; p=q=0,5.
- По интегральной теореме Лапласа имеем:

$$P_{200}(3120;3200)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

$$x_2 = \frac{3200 - 6400 \cdot 0,5}{\sqrt{6400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0$$

$$x_1 = \frac{3120 - 6400 \cdot 0,5}{\sqrt{6400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -2$$

$$P_{200}(3120; 3200) = \Phi(0) - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0,4772$$

Задача 9

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Решение

- По условию задачи n=100; p=0,8; q=0,2; k=75.
- Вероятность, что мишень будет поражена ровно 75 раз найдем по локальной теореме Лапласа.

$$x = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25$$

$$\varphi(-1,25) = \varphi(1,25) = 0,1826$$

$$P_{100}(75) = \frac{0,1826}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0,04565$$

Разбор варианта контр. работы №1

Задача 1

Из 10 человек в группе 2 студента изучают английский, 5 – французский, 3 – немецкий. Случайным образом выбирают 5 человек на конференцию. Сколькими способами можно выбрать трех студентов с французским языком и двух с немецким?

Решение

$$C_5^3 \cdot C_3^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = 30$$

Задача 2

В партии из 17 деталей есть 9 стандартных. Наудачу отобраны 9 деталей. Найти вероятность, что среди отобранных ровно 4 стандартных.

Решение

A={ровно 4 станд. Среди 9-ти отобранных}

$$P(A)=\frac{C_9^4\cdot C_8^5}{C_{17}^9}=\frac{\dfrac{9!}{4!5!}\cdot\dfrac{8!}{5!3!}}{\dfrac{17!}{9!8!}}=\frac{126\cdot 56}{17\cdot 10\cdot 13\cdot 11}=0,29$$

Задача 3

Двое договорились о встрече между 8 и 9 часами утра, причем ждать не более 15 мин. Найти вероятность, что встреча состоится

Решение

$$P = \frac{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{1} = \frac{7}{16}$$

Задача 4

Фирма участвует в трех независимых проектах, вероятности успеха которых составляют 0,9; 0,4; 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы два проекта завершаться успехом.

Решение

«хотя бы два»= « только два» + «все три»

$$P = 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 +$$

$$+ 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}824$$

Задача 5

В продуктовом магазине было проведено исследование продаж некот. товара. Оказалось, что этот товар покупает 16% женщин, 13% мужч., 33% детей. Опрашивали одинаковое число женщин, мужчин и детей. Найти вер-ть, что случайно выбранный покупатель покупает этот товар.

Решение

$$P = 0{,}16 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}13 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}33 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}21$$

Задача 6

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Сделано 6 выстрелов. Найти вероятность того, что в цель попали менее трех раз.

Решение

p=0,4 q=0,6 n=6 k<3

$$P = P(0) + P(1) + P(2) = C_6^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^6 +$$

$$+ C_6^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^5 + C_6^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}18$$

Вопросы к лекции 7

1) Формула Бернулли
2) Формула Пуассона
3) Локальная теорема Лапласа
4) Интегральная теорема Лапласа
5) Наивероятнейшее число успехов в формуле Бернулли

Конец лекции 7