Лекция 4

Нормальное распределения случайной величины.

Функция Лапласа.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x} exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

$$(-\infty < x << +\infty)$$

где m_x и σ_x^2 — математическое ожидание и дисперсия случайной величины X.

Функция распределения равна

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_x} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx$$

Нормальное распределение наиболее часто встречается на практике и теоретически наиболее полно разработано. Множество событий происходит случайно вследствие воздействия на них большого числа независимых (или слабо зависимых) возмущений, и у таких явлений закон распределения близок к нормальному. Установлено, что нормальное распределение содержит минимум информации о случайной величине по сравнению с любыми распределениями с той же дисперсией. Следовательно, замена некоторого распределения эквивалентным нормальным не может привести к переоценке точности

График плотности нормального распределения

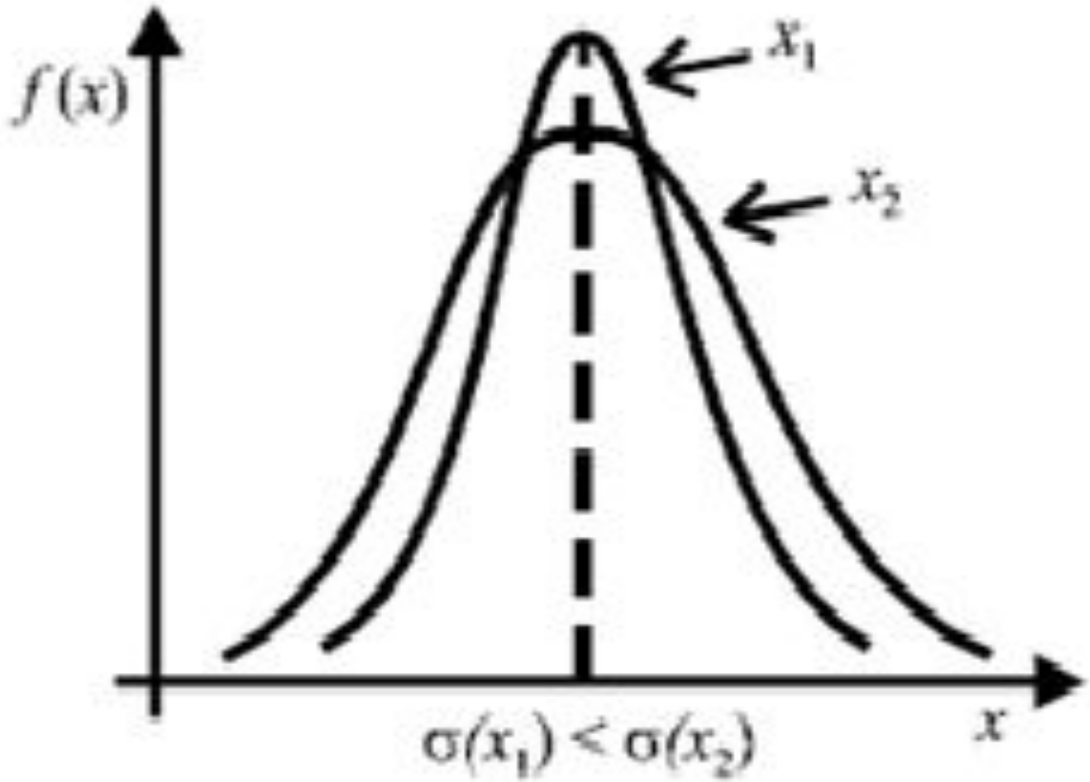
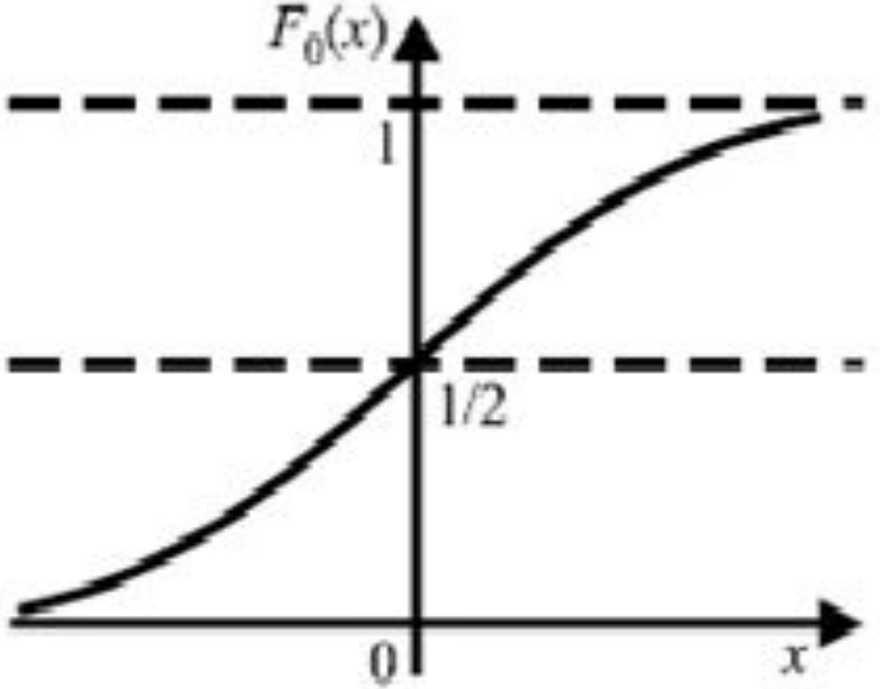


График плотности нормального распределения называется нормальной кривой, или кривой Гаусса

График функции нормального распределения



Нормальное распределение нормированной случайной величины называется стандартным. Его функция распределения имеет вид

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x exp\left(-x^2/2\right)dx$$

функция Лапласа

- Вероятность того, что значения нормированной случайной величины будут лежать в интервале от x_{01} до x_{02}, равна

$$P(x_{01} \leq X_0 \leq x_{02}) = F_0(x_{02}) - F_0(x_{01})$$

Функция $\Phi(x)$называется функцией Лапласа

$$\Phi(x) = F_0(x) - \frac{1}{2} = F_0(x) - F_0(0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x exp(-x^2/2)dx$$

Значения функции Лапласа табулированы . Так как она является нечетной функцией, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то таблицы значений $\Phi(x)$ составлены лишь для x > 0. Для нормированной случайной величины имеем:

$$P(x_{01} \le X_0 \le x_{02}) = F_0(x_{02}) - F_0(x_{01})$$
$$= \Phi(x_{02}) + \frac{1}{2} - \Phi(x_{01}) - \frac{1}{2} = \Phi(x_{02}) - \Phi(x_{01})$$

Тогда в общем случае

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \le X \le \frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right)$$

Во многих практических задачах x_1 и x_2 симметричны относительно математического ожидания, в частности в задаче об абсолютном отклонении. Абсолютным отклонением является величина

$$\Delta x = X - m_x$$

Требуется найти вероятность того, что абсолютное отклонение случайной величины не превзойдет некоторого заданного числа ε:

$$P(\Delta x \leq \varepsilon) = P(m_x - \varepsilon \leq X \leq m_x + \varepsilon)$$

В частности, для нормированной случайной величины

$$P(\Delta x_0 \leq \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq X_0 \leq +\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) \\ = 2\Phi(\varepsilon)$$

Тогда для нормально распределенной случайной величины с параметрами m_x и σ_x справедливо

$$P(|\Delta x| \leq \varepsilon) = P\left(|\Delta x_0| \leq \frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right)$$

Обозначив $\varepsilon/_{\sigma_x} = k$, получаем

$$P(\Delta x \leq k\sigma_x) = 2\Phi(k)$$

откуда

$$P(\Delta x \le \sigma_x) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$$

$$P(\Delta x \le 2\sigma_x) = 2\Phi(2) = 0{,}9544$$

$$P(\Delta x \le 3\sigma_x) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$$

Таким образом, отклонения больше, чем утроенный стандарт (утроенное стандартное отклонение), практически невозможны. На практике часто величины $2\sigma_x$ (или $3\sigma_x$) считают максимально допустимой ошибкой и отбрасывают результаты измерений, для которых величина отклонения превышает это значение, как содержащие грубые ошибки.