

**Элементы
нелинейного
функциональног
о анализа**

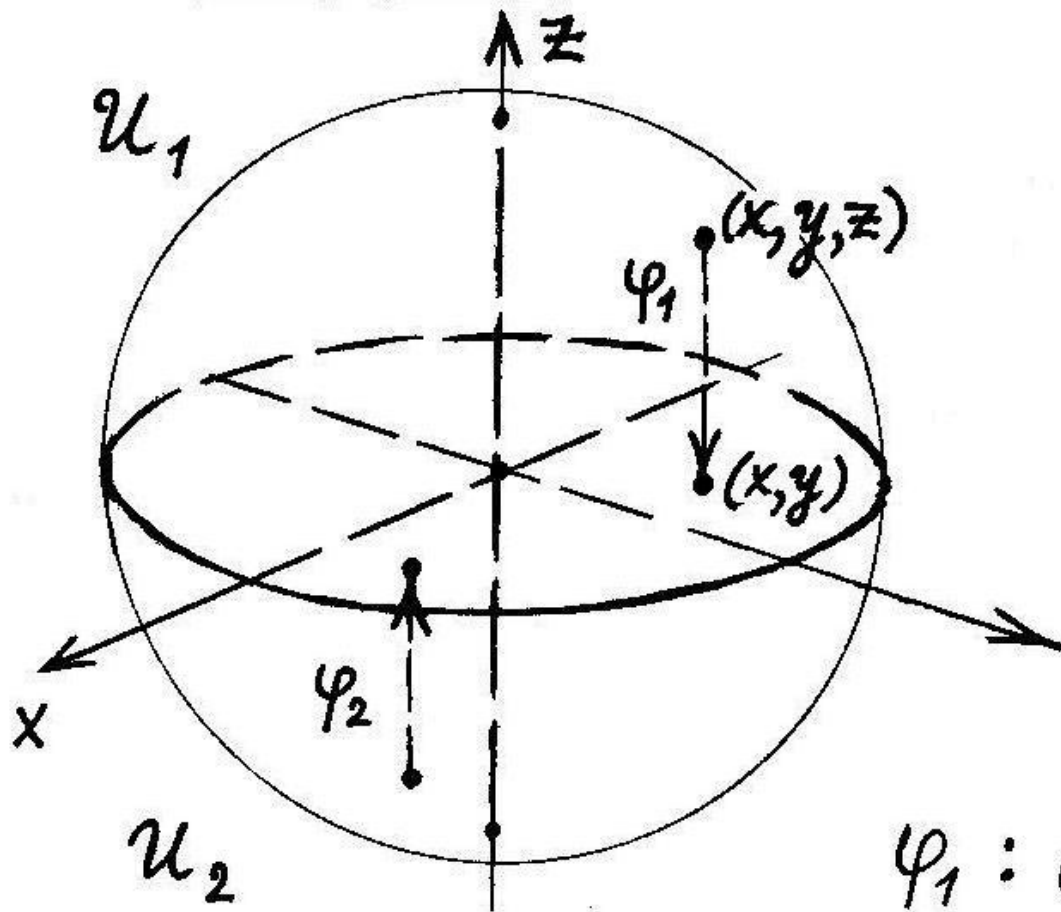
Глава 2.

Гладкие многообразия

§ 4. Два способа задания атласа на сфере

1-й снос.

$$S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$



$$U_1 : z > 0$$

$$U_2 : z < 0$$

$$\varphi_1 = \pi_1|_{U_1}$$

y (π_1 -проекция)

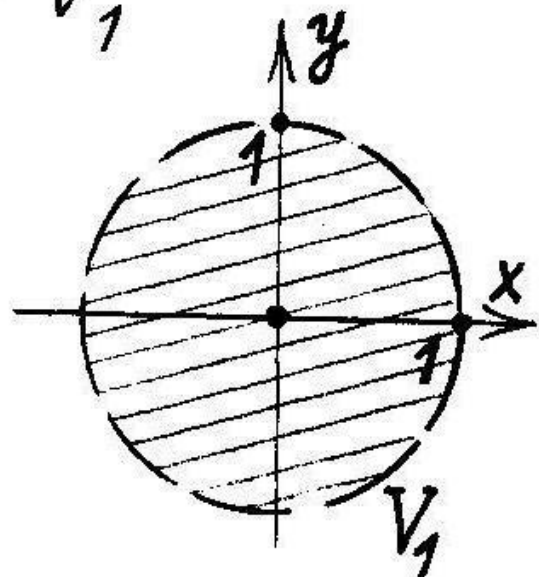
$$\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$$

$$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow V_1$$

$$\mathcal{U}_1 = \{ (x, y, z) \in S^2 \mid z > 0 \},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{ (x, y, z) \in S^2 \mid z < 0 \}.$$



$V_1 = V_2$ — круг радиуса $R=1$ в пр-ве \mathbb{R}^2 .

$$V_1 = V_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}.$$

$$\varphi_1^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathcal{U}_1.$$

$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

$$U_3 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\},$$

$$U_4 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y < 0\}.$$

$$\varphi_3 : (x, y, z) \mapsto (x, z), \quad \varphi_3 : U_3 \rightarrow V_3;$$

$$\varphi_4 : (x, y, z) \mapsto (x, z), \quad \varphi_4 : U_4 \rightarrow V_4;$$

$$V_3 = V_4 = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 < 1\} \text{ — круг}$$

в пр-ве \mathbb{R}^2

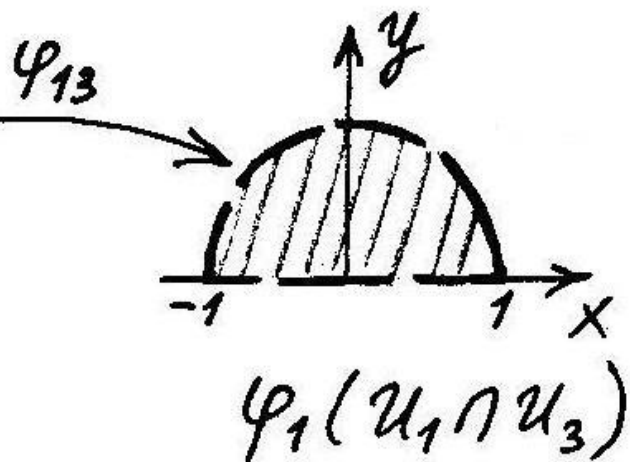
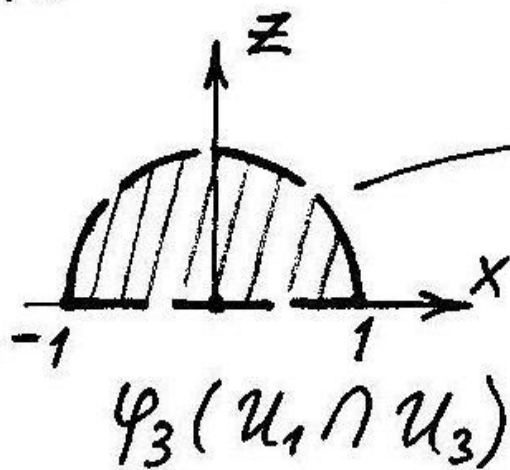
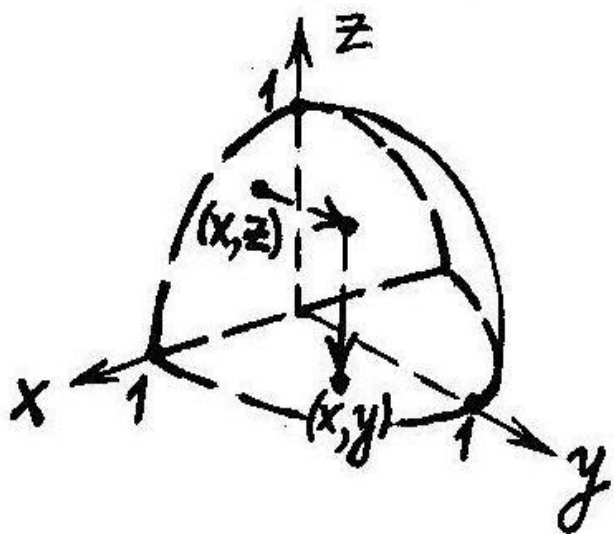
И ещё 2 карты: $U_5 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\},$

$$U_6 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\};$$

гомеоморфизмы φ_5 и φ_6 описать
самостоятельно!

Рассмотрим структуру перелома от
карты (U_1, φ_1) к карте (U_3, φ_3) :

$$\varphi_{13} = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3)$$



$$(x, z) \xrightarrow{\varphi_3^{-1}} (x, \underbrace{\sqrt{1-x^2-z^2}}_y, z) \xrightarrow{\varphi_1} (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$$

$\varphi_{13}(x, z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$ — гладкое
от-е (кл. C^∞) — доказать!

Упр. Выписать от-е $\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ и
доказать его гладкость (кл. C^∞).

Итак, от-е перехода φ_{13} — C^∞ -диффе-
оморфизм \Rightarrow 1-я и 3-я карты C^∞ -соглас.

Аналогично провер-ся C^∞ -согласность
оставшихся пар карт.

След-но, атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^6$ — C^∞ -атлас.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»