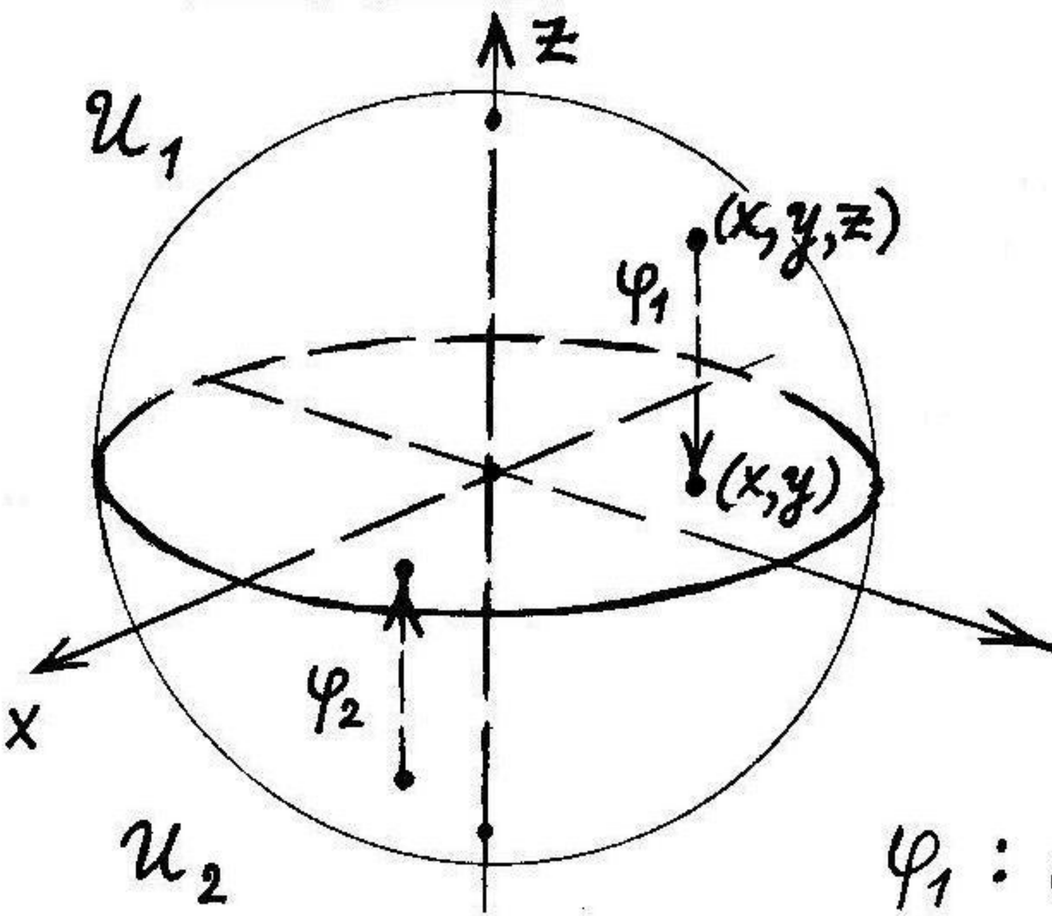
Элементы нелинейного функциональног о анализа

Глава 2.
Гладкие многообразия

§ 4. Два способа задания атласа на сфере

<u>1-й способ.</u>

$S^2: x^2+y^2+z^2=1.$



$\mathcal{U}_1: z>0$

$\mathcal{U}_2: z<0$

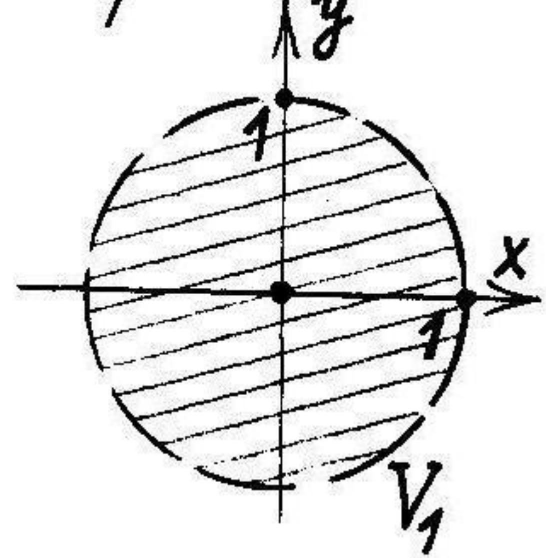
$\varphi_1 = \pi_1\big|_{\mathcal{U}_1}$

(π_1 – проекция)

$\varphi_1: (x,y,z) \longmapsto (x,y)$

$\varphi_1: \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$

$$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$$



$$\mathcal{U}_1 = \{(x,y,z) \in S^2 \,/\, z > 0\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(x,y,z) \in S^2 \,/\, z < 0\}.$$

$V_1 = V_2$ — круг радиуса $R=1$ в пр-ве $\mathbb{R}^2$.

$$V_1 = V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 1\}.$$

$$\varphi_1^{-1}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right), \; \varphi_1^{-1} : V_1 \longrightarrow \mathcal{U}_1.$$

$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

$\mathcal{U}_3 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}$,

$\mathcal{U}_4 = \{(x, y, z) \in S^2 / y < 0\}$.

$\varphi_3 : (x, y, z) \longmapsto (x, z)$, $\varphi_3 : \mathcal{U}_3 \longrightarrow V_3$;

$\varphi_4 : (x, y, z) \longmapsto (x, z)$, $\varphi_4 : \mathcal{U}_4 \longrightarrow V_4$;

$V_3 = V_4 = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 < 1\}$ – круг в пр-ве $\mathbb{R}^2$

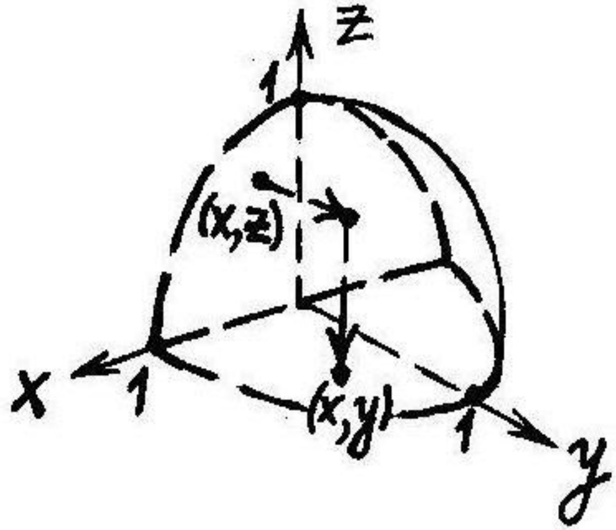
И ещё 2 карты : $\mathcal{U}_5 = \{(x, y, z) \in S^2 / x > 0\}$,

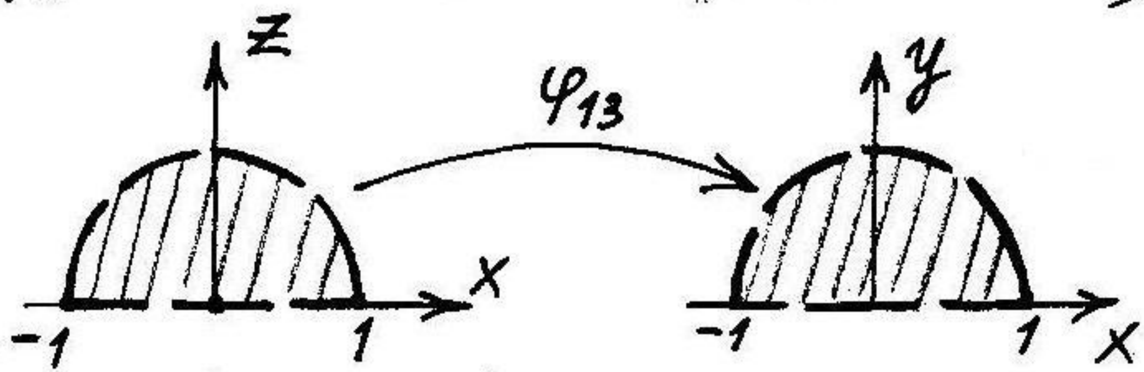
$\mathcal{U}_6 = \{(x, y, z) \in S^2 / x < 0\}$;

гомеоморфизмы φ_5 и φ_6 описать самостоят-но!

Рассмотрим функцию перехода от карты (U_1, φ_1) к карте (U_3, φ_3):

$$\varphi_{13} = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3)$$





$\varphi_3(U_1 \cap U_3)$ $\varphi_1(U_1 \cap U_3)$

$$(x, z) \stackrel{\varphi_3^{-1}}{\longmapsto} (x, \underbrace{\sqrt{1-x^2-z^2}}_{y}, z) \stackrel{\varphi_1}{\longmapsto} (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$$

$\varphi_{13}(x, z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$ — гладкое от-е (кл. C^∞) — доказать!

Упр. Выписать от-е $\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ и доказать его гладкость (кл. C^∞).

Итак, от-е перехода φ_{13} — C^∞-диффеоморфизм $\Rightarrow$ 1-я и 3-я карты C^∞-соглас.

Аналогично провер-ся C^∞-согласованность остальных пар карт.

След-но, атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{6}$ — C^∞-атлас.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»