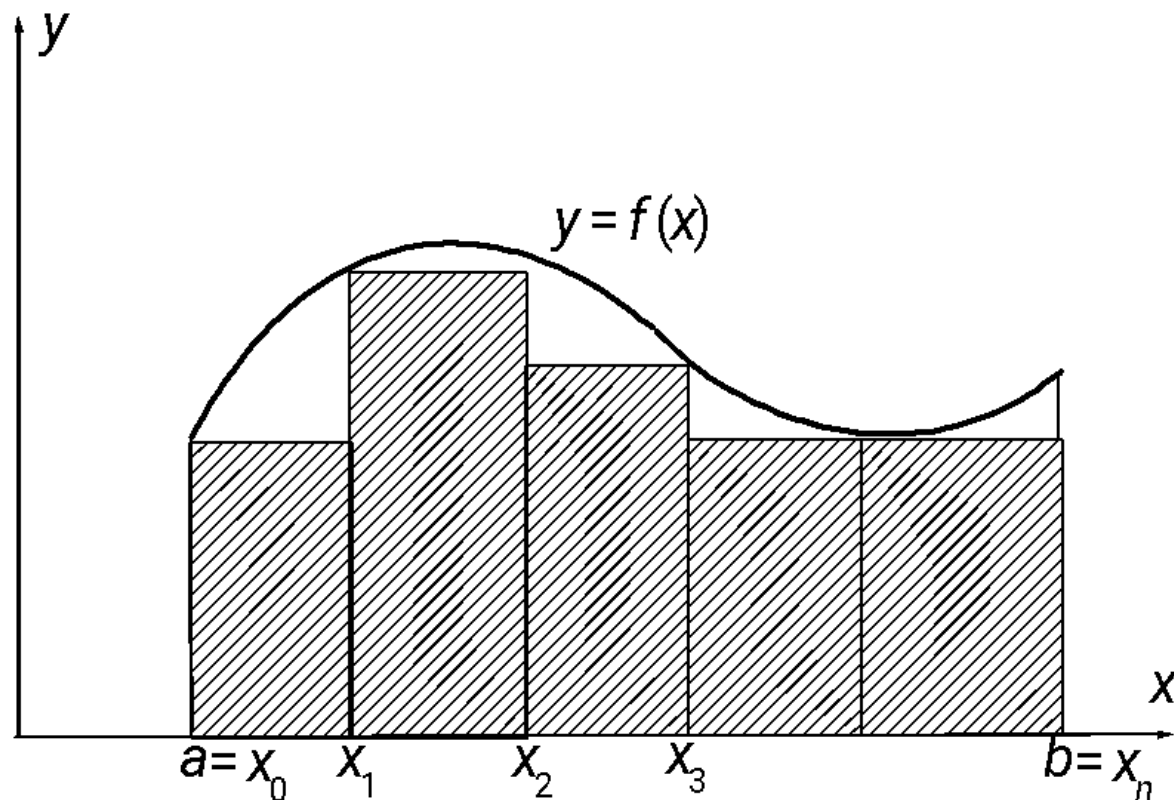


Здравствуйте!

Лекция №5

## § 17. Вычисление площадей и объемов

### 17.1. Площадь криволинейной трапеции



Рассмотрим фигуру, называемую **криволинейной трапецией**. Ее границами являются: ось  $Ox$  (внизу), прямые  $x=a$  (слева) и  $x=b$  (справа) и кривая  $y=f(x)$  (сверху) (см. рис.).

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на части  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и пусть  $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$  и  $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ . Составим величины

$P_* = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$  и  $P^* = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ , в которых узнаем верхние и нижние

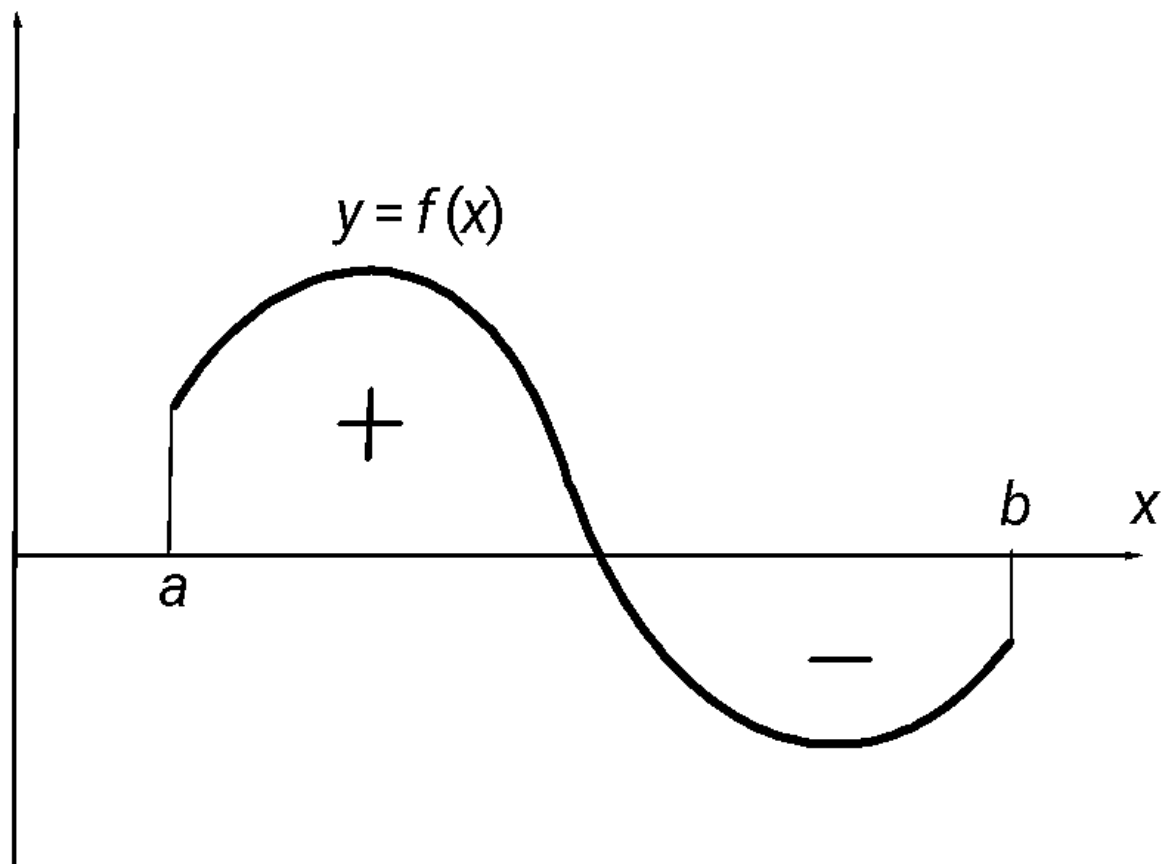
суммы Дарбу. Величины  $I_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P_*$  и  $I^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P^*$  называются

внутренней и внешней площадями криволинейной трапеции. Если выполняется равенство  $I_* = I^* = P$ , то их общее значение и называется площадью криволинейной трапеции.

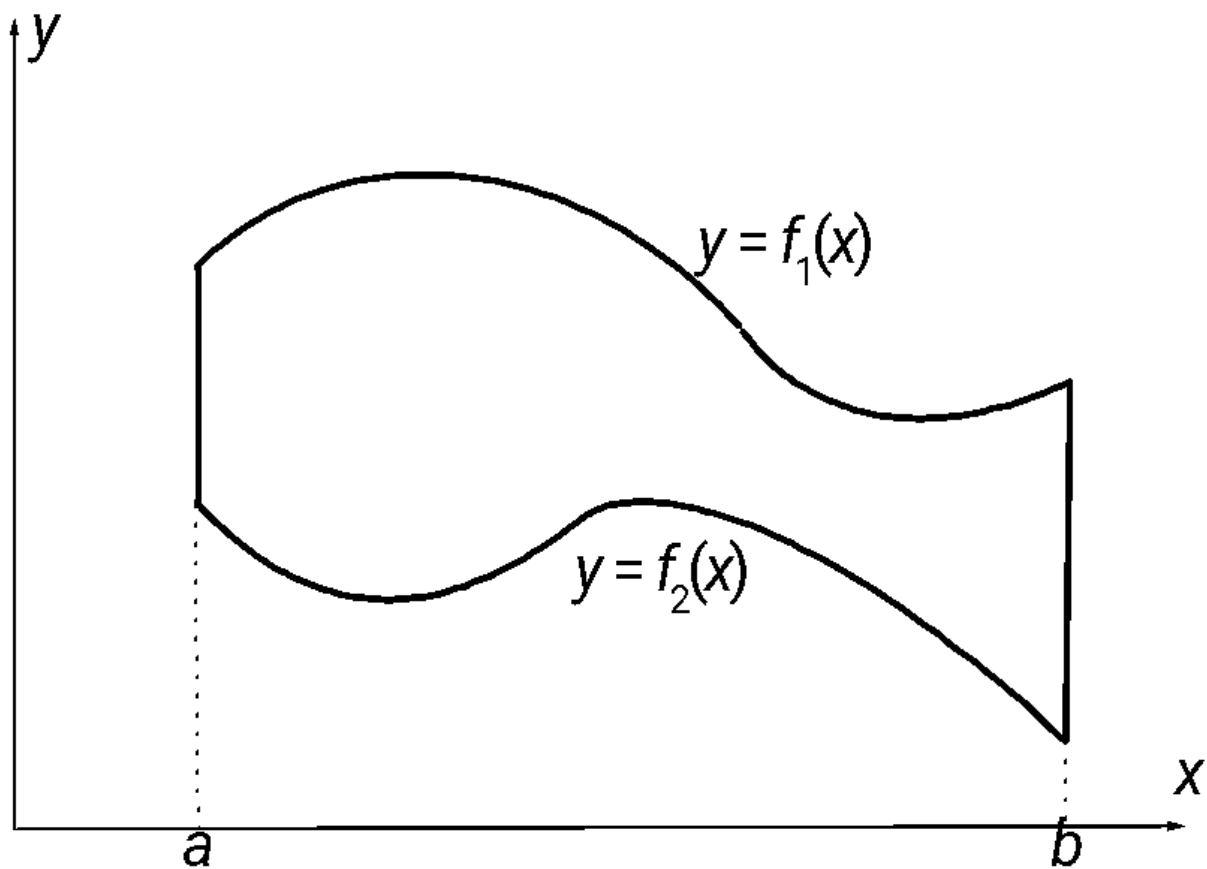
Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то, вспоминая теорию определенного интеграла, можно записать

$$P = \int_a^b f(x) dx,$$

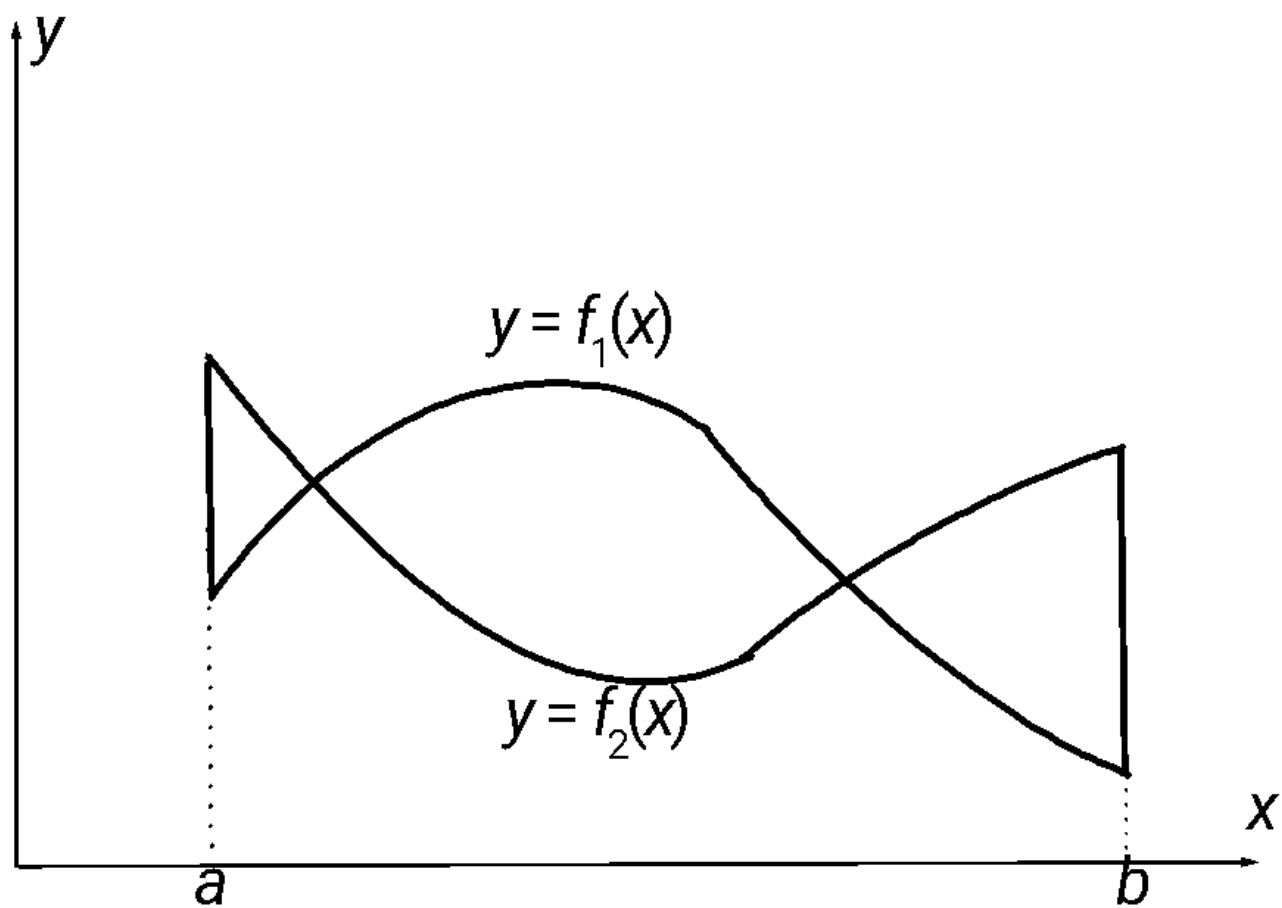
что и определяет площадь криволинейной трапеции.



Так как площадь не может быть отрицательной, то в этом случае



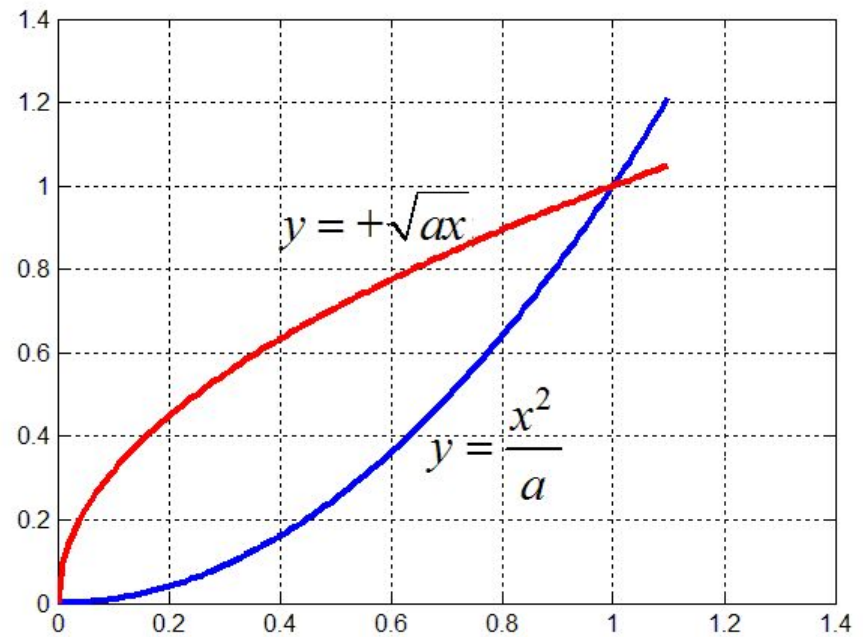
В этом случае очевидно, что



Наконец, в этом случае .

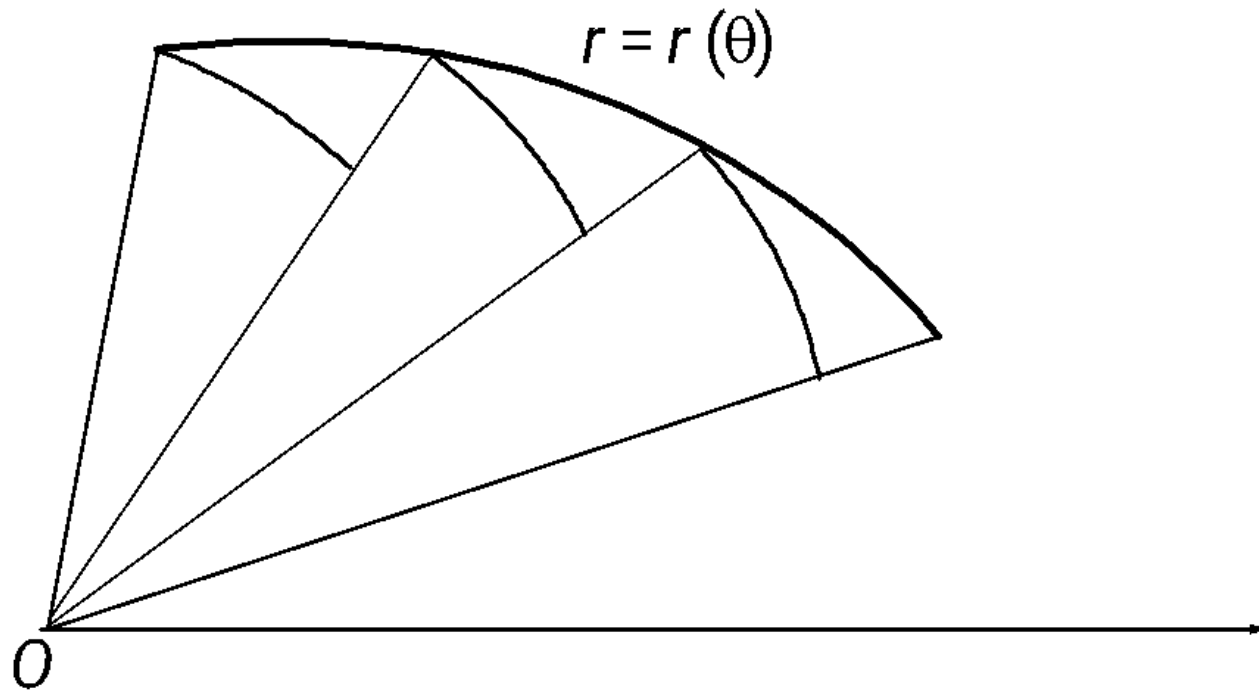
Учебный пример:

$$\begin{aligned} ax &= y^2; & ay &= x^2; \\ y &= \pm\sqrt{ax}; & y &= \frac{x^2}{a}; \\ \sqrt{ax} &= \frac{x^2}{a}; & x &= 0; \quad x = a; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left| \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right| dx = \int_0^a \left( \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a - \frac{x^3}{3a} \Big|_0^a = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{a} \cdot a^{3/2} - \frac{a^2}{3} = \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) a^2 = \frac{a^2}{3} \end{aligned}$$

## 17.2. Площадь криволинейного сектора



Рассмотрим кривую  $r = r(\theta)$ , заданную в полярных координатах. Соединим концы кривой прямыми линиями с полюсом системы координат. Получившаяся фигура называется криволинейным сектором.



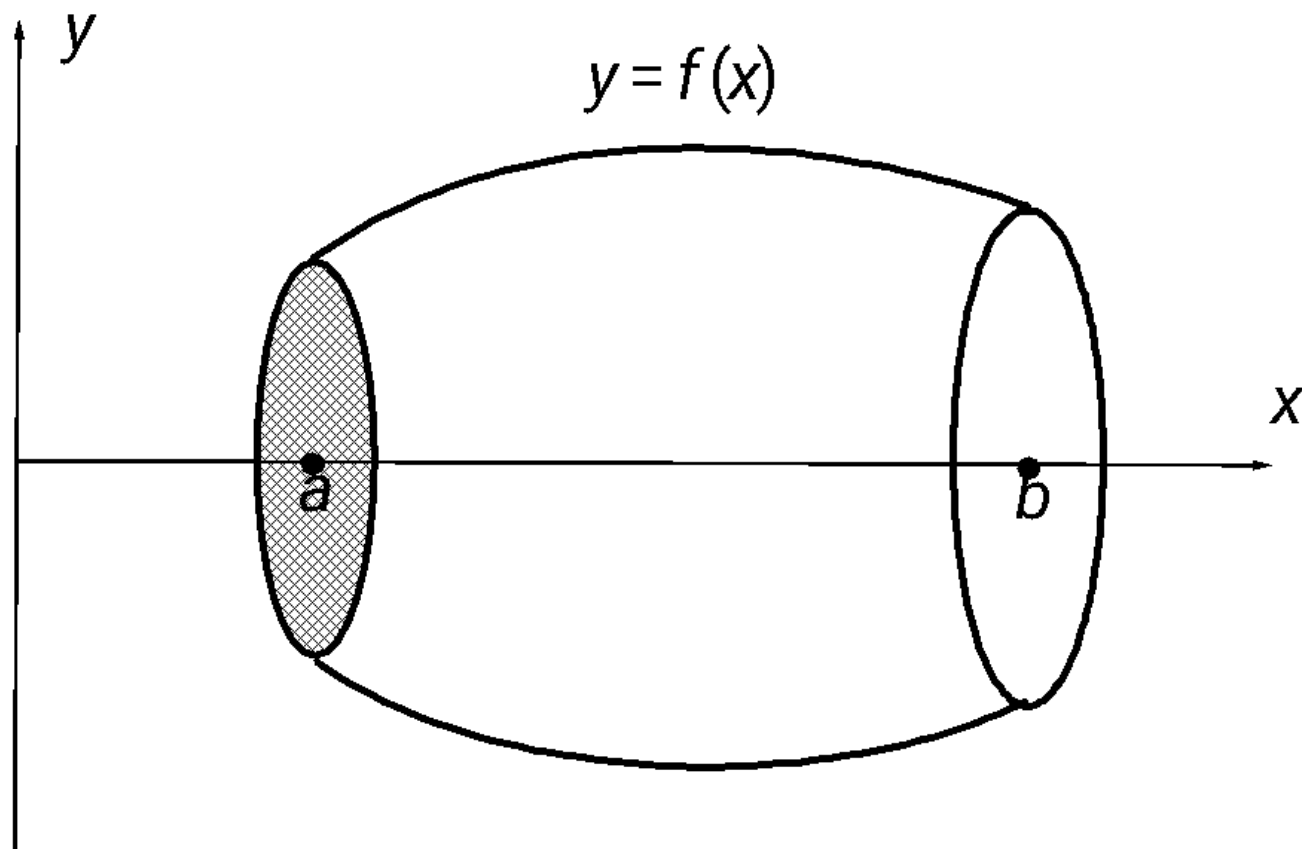
Разобьем отрезок  $[\alpha, \beta]$  на части  $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$  и пусть  $\lambda = \max_i \Delta\theta_i$ . Пусть далее  $r_i = \inf_{\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]} r(\theta)$  и  $R_i = \sup_{\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]} r(\theta)$ .

Построим величины  $P_* = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 \Delta\theta_i$  и  $P^* = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} R_i^2 \Delta\theta_i$ , имеющие смысл внутренней и внешней площадей криволинейного сектора. Если  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} P_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P^* = P$ , то величина  $P$  называется площадью криволинейного сектора. Если функция  $r(\theta)$  интегрируема на  $[\alpha, \beta]$ , то

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

*Пример.* Вычислить площадь круга, полукруга, четверти круга.

### 17.3. Объем тела вращения



Представим себе, что имеется кривая  $y = f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ . Пусть эта кривая **вращается** около оси  $Ox$ . Получающееся тело называется **телом вращения**

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на части  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  и определим  $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$  и  $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ . На каждом отрезке

построим **цилиндр** с радиусом основания  $m_i$  и высотой  $\Delta x_i$ . Все эти цилиндры будут **вписаны** в наше тело вращения и их общий объем

будет равен  $V_* = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 \Delta x_i$ .

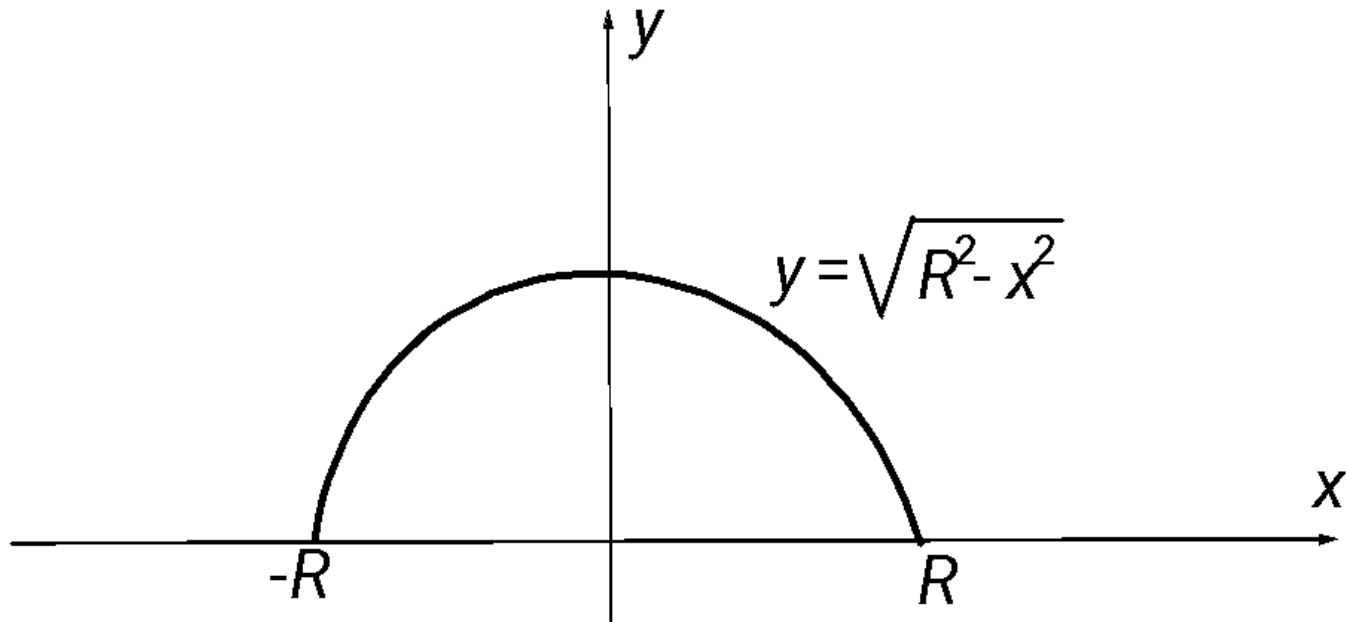
Далее, на каждом отрезке построим **цилиндр** с радиусом основания  $M_i$  и высотой  $\Delta x_i$ . Все эти цилиндры будут **описаны** около нашего тела вращения и их общий объем будет равен

$V^* = \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2 \Delta x_i$ .

Если  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} V_* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V^* = V$ , то величина  $V$  называется объемом тела вращения. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то очевидно, что

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

## Пример. Объём шара



Очевидно, что шар получается вращением полуокружности около оси  $Ox$ . Поэтому объём шара

## §.18. Несобственные интегралы первого рода

Пусть

1. функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, +\infty)$ ;

2.  $\forall A > a$  существует  $\int_a^A f(x)dx$ .

Произведем теперь предельный переход  $A \rightarrow +\infty$ . Тогда

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$  называется **несобственным интегралом первого рода**

и обозначается символом  $\int_a^{\infty} f(x)dx$ :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Если этот предел **существует и конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится** (или: **существует**). Если этот предел равен **бесконечности** или вообще **не существует**, то говорят, что несобственный интеграл **расходится** (или: **не существует**).

Совершенно аналогично определяются и следующие несобственные интегралы первого рода:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^a f(x)dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (a - \text{любое}).$$

## Простейшие свойства несобственных интегралов первого рода

1. Если сходится  $\int_a^{\infty} f(x)dx$ , то  $\forall b > a$  сходится и  $\int_b^{\infty} f(x)dx$ .

Наоборот, если  $\int_b^{\infty} f(x)dx$  сходится и существует  $\int_a^b f(x)dx$ , то сходится

и  $\int_a^{\infty} f(x)dx$ . При этом верно соотношение

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть  $A > b > a$ . Тогда имеем

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^A f(x)dx.$$

Сделаем предельный переход  $A \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_b^A f(x)dx.$$

Так как предел слева существует, то существует и предел справа и

$\int_b^{\infty} f(x)dx$  сходится и соотношение принимает вид

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx.$$

Подумайте сами, что надо изменить в предыдущей фразе, чтобы доказать обратное утверждение.



2. Если  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  сходится, то  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{\infty} f(x)dx = 0$

Доказательство.

Согласно предыдущему пункту

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{\infty} f(x)dx$$

Отсюда

$$\int_A^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx - \int_a^A f(x)dx.$$

Делая предельный переход  $A \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{\infty} f(x)dx &= \int_a^{\infty} f(x)dx - \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = \\ &= \int_a^{\infty} f(x)dx - \int_a^{\infty} f(x)dx = 0. \end{aligned}$$

3. Если сходятся  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  и  $\int_a^{\infty} g(x)dx$ , то сходится также и

$\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx$  и верно соотношение

$$\int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^A (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^A f(x)dx \pm \int_a^A g(x)dx.$$

Делая предельный переход  $A \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} (f(x) \pm g(x))dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A (f(x) \pm g(x))dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \pm \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A g(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx. \end{aligned}$$

4. Если сходится  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  и  $c$  – константа, то сходится и  $\int_a^{\infty} cf(x)dx$  и

верна формула

$$\int_a^{\infty} cf(x)dx = c \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_a^A cf(x)dx = c \int_a^A f(x)dx.$$

Делая предельный переход  $A \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\int_a^{\infty} cf(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A cf(x)dx = c \cdot \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx = c \int_a^{\infty} f(x)dx.$$