ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Семинар № 6

Линейные операторы и их матрицы.
Ядро и образ линейного оператора.
Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

Занятие 6

Def 1. Ядром оператора $A \in \mathcal{L}(V, W)$ называется множество $\operatorname{Ker} A = \{x \in V : Ax = \theta\}$

Def 2. Образом оператора $A \in \mathcal{L}(V, W)$ называется множество $\operatorname{Im} A = \{y \in W : y = Ax \ \forall x \in V\}$

Формула $A_{[\tilde{e}]} = T^{-1} A_{[e]} T$ (*)

1434 $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ – оператор поворота на угол φ против часовой стрелки.

1) $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ $\mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{F}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{F}\vec{x}_1 + \mathcal{F}\vec{x}_2 = \mathcal{A}\vec{x}_1 + \mathcal{A}\vec{x}_2$

2) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \mathcal{F}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{F}(\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}\vec{x}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ – линейный оператор

Возьмем базис $[e] = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ в $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{A}\vec{i} = \vec{i} \cdot \cos\varphi + \vec{j} \cdot \sin\varphi$

$\mathcal{A}\vec{j} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{A_{[e]} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}$$

$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\vec{0}\}$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathbb{R}^2$

1436 $\mathcal{A}\vec{x} = \text{Пр}_{\vec{i}}\,\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

1) $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \text{Пр}_{\vec{i}}(\vec{x}+\vec{y}) = \text{Пр}_{\vec{i}}\vec{x} + \text{Пр}_{\vec{i}}\vec{y} =$
$= \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}$

2) $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \text{Пр}_{\vec{i}}(\lambda\vec{x}) = \lambda\,\text{Пр}_{\vec{i}}\vec{x} = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$

$\Rightarrow \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Возьмем базис $\mathbb{R}^3 \quad [e] = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{A}\vec{i} &= \vec{i} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} \\ \mathcal{A}\vec{j} &= \vec{0} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} \\ \mathcal{A}\vec{k} &= \vec{0} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \begin{aligned} \ker\mathcal{A} &= L(\vec{j}, \vec{k}) \\ \operatorname{Im}\mathcal{A} &= L(\vec{i}) \end{aligned}$$

1441 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3: \ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в базисе $[e]$

$\mathcal{A}\vec{x} = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3: \ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = ((x_2+y_2) + (x_3+y_3),\ 2(x_1+y_1) + (x_3+$
$+y_3),\ 3(x_1+y_1) - (x_2+y_2) + (x_3+y_3)) =$
$= ((x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3) +$
$+ (y_2 + y_3,\ 2y_1 + y_3,\ 3y_1 - y_2 + y_3)) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}$

2) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$A(\lambda\vec{x}) = (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \lambda(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) = \lambda A\vec{x}$

$\Rightarrow A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Рассмотрим базис $[e] = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в $\mathbb{R}^3$

$A\vec{i} = (0, 2, 3) = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$A\vec{j} = (1, 0, -1) = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k}$

$A\vec{k} = (1, 1, 1) = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$

$$\boxed{A_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\ker A = \{\vec{0}\}$

$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$

1443 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в $[e]$

$A\vec{x} = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$

1) $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$A(\vec{x} + \vec{y}) = (2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), (x_3 + y_3)^2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2) + (2y_1 + y_2, y_1 + y_3, y_3^2) + (0, 0, 2x_3y_3) = A\vec{x} + A\vec{y} + (0, 0, 2x_3y_3) \neq A\vec{x} + A\vec{y}$

A не является линейным оператором

1445 $\exists ?\ \mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3):\ \mathcal{A}(\vec{a}_i)=\vec{b}_i,\ i=\overline{1,3}$

$\vec{a}_1=\{2,3,5\},\ \vec{a}_2=\{0,1,2\},\ \vec{a}_3=\{1,0,0\}$

$\vec{b}_1=\{1,1,1\},\ \vec{b}_2=\{1,1,-1\},\ \vec{b}_3=\{2,1,2\}$

$A_{[e]}=?$

Решение $\mathcal{A}(a_i)=b_i\ \ \forall i=\overline{1,3}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)$

$\overset{[e]}{\Longleftrightarrow} A_{[e]}(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)$

или $A_{[e]}A=B \Rightarrow A_{[e]}=B\cdot A^{-1}$

Найдем A^{-1}:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\5&2&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&-1&1&0\\0&-2&3&3&-2&0\\0&-3&5&5&-5&1\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-2&1\\0&1&-2&-2&3&-1\\0&0&-1&-1&4&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&2&-1\\0&1&0&0&-5&3\\0&0&1&1&-4&2\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-5&3\\1&-4&2\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{A_{[e]}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-5&3\\1&-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-11&6\\1&-7&4\\2&-1&0\end{pmatrix}}$$

1449 a) $\forall X\in M_{2\times2}\ \ \mathcal{A}(X)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}X\equiv BX$

1) $\forall X,Y\in M_{2\times2}\ \ \mathcal{A}(X+Y)=B(X+Y)=BX+BY=\mathcal{A}(X)+\mathcal{A}(Y)$

2) $\forall X\in M_{2\times2},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\ \ \mathcal{A}(\lambda X)=B(\lambda X)=\lambda(BX)=\lambda\mathcal{A}(X)$

$\Rightarrow \mathcal{A}\in\mathcal{L}(M_{2\times2})$

Возьмем базис $[e]=\{\underset{=e_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}},\underset{=e_2}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}\underset{=e_3}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}},\underset{=e_4}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}\}$ в $\mathbb{M}_{2\times 2}$

$$\mathcal{A}e_1=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=ae_1+ce_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}e_2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=be_1+d\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$$

$$\mathcal{A}e_3=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=0\cdot e_1+0\cdot e_2+a\cdot e_3+c\cdot e_4$$

$$\mathcal{A}e_4=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=0\cdot e_1+0\cdot e_2+b\cdot e_3+d\cdot e_4$$

$$\boxed{A_{[e]}=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}}$$

1452 | а) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$: $\mathcal{A}\overset{[e]}{\longleftrightarrow}A_{[e]}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}$

Даны базисы $[e]=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ и

$[\tilde{e}]=\{e_1,e_3,e_2,e_4\}$ $\quad A_{[\tilde{e}]}=?$

Решение $\quad A_{[\tilde{e}]}=T^{-1}A_{[e]}T$,

где T - матрица перехода от $[e]$ к $[\tilde{e}]$.

Найдем T:

$\tilde{e}_1=e_1=1\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$

$\tilde{e}_2=e_3=0\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3+0\cdot e_4$

$\tilde{e}_3=e_2=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$

$\tilde{e}_4=e_4=0\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+1\cdot e_4$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Найдем $T^{-1}A_{[e]}$: $\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&2&0&1\\0&0&1&0&3&0&-1&2\\0&1&0&0&2&5&3&1\\0&0&0&1&1&2&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&2&0&1\\0&1&0&0&2&5&3&1\\0&0&1&0&3&0&-1&2\\0&0&0&1&1&2&1&3\end{array}\right)$

$$T^{-1}A_{[e]}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&5&3&1\\3&0&-1&2\\1&2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{[\tilde{e}]}}=T^{-1}A_{[e]}T=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&5&3&1\\3&0&-1&2\\1&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&3&5&1\\3&-1&0&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}}$$

1453 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$: $\mathcal{A}\overset{[e]}{\longleftrightarrow}A_{[e]}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}$

Еще дан базис $[f]$:

$f_1=2e_1+3e_2+e_3$

$f_2=3e_1+4e_2+e_3$, где $[e]=\{e_1,e_2,e_3\}$

$f_3=e_1+2e_2+2e_3$ $\quad A_{[f]}=?$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Найдем $T^{-1}A_{[e]}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&15&-11&5\\3&4&2&20&-15&8\\1&1&2&8&-7&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&8&-7&6\\0&1&-3&-1&3&-7\\0&1&-4&-4&6&-10\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5&9&-10&13\\0&1&-3&-1&3&-7\\0&0&1&3&-3&3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-6&5&-2\\0&1&0&8&-6&2\\0&0&1&3&-3&3\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{A_{[f]}}=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\8&-6&2\\3&-3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}}$$

1455 Пусть $[e]$, $[\tilde{e}]$ – базисы лин. пр-ва V

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$: $\mathcal{A} \xleftrightarrow{[e]} A_{[e]}$, $\mathcal{A} \xleftrightarrow{[\tilde{e}]} A_{[\tilde{e}]}$, T – матрица перехода от базиса $[e]$ к базису $[\tilde{e}]$:

$[\tilde{e}] = [e]T$

\# $A_{[\tilde{e}]} = T^{-1} A_{[e]} T$

$$A_{[\tilde{e}]} = A_{[e]} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ T^{-1}A_{[e]} = A_{[\tilde{e}]}T^{-1} = A_{[e]}T^{-1} \\ 2)\ A_{[e]}T = TA_{[\tilde{e}]} = TA_{[e]} \end{array}$$

\#

1457 В $\mathbb{R}^2$ даны базисы $[a] = \{\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}\}$ и $[b] = \{\underset{\downarrow}{b_1}, \underset{\downarrow}{b_2}\}$; $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

$\mathcal{A} \xleftrightarrow{[a]} A_{[a]} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} \xleftrightarrow{[b]} B_{[b]} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \xleftrightarrow{[b]} (A+B)_{[b]} = A_{[b]} + B_{[b]} = ?$

$\vec{a}_1 = (1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 3)$; $\vec{b}_1 = (3, 1)$, $\vec{b}_2 = (4, 2)$

Решение $[a] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $[b] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем матрицу перехода от $[a]$ к $[b]$:

$[b] = [a]T \Rightarrow T = [a]^{-1}[b]$

$T: \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$A_{[b]} = ?$ $\quad A_{[b]} = T^{-1} A_{[a]} T$

$T^{-1}A_{[a]}$: $\left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -8 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -2 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -7/2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{43}{2} & 23 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -25 & -27 \\ 0 & 1 & 21{,}5 & 23 \end{array}\right) \Rightarrow T^{-1}A_{[a]} = \begin{pmatrix} -25 & -27 \\ 21{,}5 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{[b]} = \begin{pmatrix} -25 & -27 \\ 21{,}5 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -35{,}5 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(A+B)_{[b]} = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29{,}5 & -25 \end{pmatrix}}$$

$$(A+B)_{[b]} = A_{[b]} + B_{[b]} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -35{,}5 & -34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29{,}5 & -25 \end{pmatrix}$$

<u>Дома</u>: П. 1435, 1438, 1442, 1444, 1446, 1448, 1449б, 1452б, 1454, 1458.