ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Семинар № 6

Линейные операторы и их матрицы.
Ядро и образ линейного оператора.
Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

Занятие 6

Def 1. Ядром оператора $A \in \mathcal{L}(V,W)$ называется множество $\operatorname{Ker} A = \{x \in V : Ax = \theta\}$

Def 2. Образом оператора $A \in \mathcal{L}(V,W)$ называется множество $\operatorname{Im} A = \{y \in W : y = Ax \ \forall x \in V\}$

Формула $A_{[\tilde{e}]} = T^{-1} A_{[e]} T$ (*)

1434 $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ – оператор поворота на угол φ против часовой стрелки.

1) $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ $\mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{F}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{F}\vec{x}_1 + \mathcal{F}\vec{x}_2 = \mathcal{A}\vec{x}_1 + \mathcal{A}\vec{x}_2$

2) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \mathcal{F}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{F}(\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}\vec{x}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ – линейный оператор

Возьмем базис $[e] = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ в $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{A}\vec{i} = \vec{i} \cdot \cos\varphi + \vec{j} \cdot \sin\varphi$

$\mathcal{A}\vec{j} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{A_{[e]} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}$$

$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\vec{0}\}$

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathbb{R}^2$

1436 $\mathcal{A}\vec{x} = \Pi p_{\vec{i}}\, \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

1) $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \Pi p_{\vec{i}}(\vec{x}+\vec{y}) = \Pi p_{\vec{i}}\vec{x} + \Pi p_{\vec{i}}\vec{y} =$
$= \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}$

2) $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \Pi p_{\vec{i}}(\lambda\vec{x}) = \lambda\, \Pi p_{\vec{i}}\vec{x} = \lambda \mathcal{A}(\vec{x})$

$\Rightarrow \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Возьмем базис $\mathbb{R}^3$ $[e] = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{A}\vec{i} &= \vec{i} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} \\ \mathcal{A}\vec{j} &= \vec{0} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} \\ \mathcal{A}\vec{k} &= \vec{0} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \begin{aligned} \operatorname{Ker} \mathcal{A} &= L(\vec{j}, \vec{k}) \\ \operatorname{Im} \mathcal{A} &= L(\vec{i}) \end{aligned}$$

1441 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3: \ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в базисе $[e]$

$\mathcal{A}\vec{x} = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3: \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = ((x_2+y_2) + (x_3+y_3), 2(x_1+y_1) + (x_3 +$
$+ y_3), \ 3(x_1+y_1) - (x_2+y_2) + (x_3+y_3)) =$
$= ((x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) +$
$+ (y_2 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3)) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}$

2) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$A(\lambda\vec{x}) = (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \lambda(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) = \lambda A\vec{x}$

$\Rightarrow \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Рассмотрим базис $[e] = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в $\mathbb{R}^3$

$A\vec{i} = (0, 2, 3) = 0\cdot\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$A\vec{j} = (1, 0, -1) = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} - 1\cdot\vec{k}$

$A\vec{k} = (1, 1, 1) = 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}$

$$\boxed{A_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$

$\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$

1443 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в $[e]$

$A\vec{x} = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$

1) $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$A(\vec{x} + \vec{y}) = (2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), (x_3 + y_3)^2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2) + (2y_1 + y_2, y_1 + y_3, y_3^2) + (0, 0, 2x_3y_3) = A\vec{x} + A\vec{y} + (0, 0, 2x_3y_3) \neq A\vec{x} + A\vec{y}$

A не является линейным оператором

$\boxed{1445}$ $\exists ?\ \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3):\ \mathcal{A}(\vec{a}_i) = \vec{b}_i,\ i = \overline{1,3}$

$\vec{a}_1 = \{2, 3, 5\},\ \vec{a}_2 = \{0, 1, 2\},\ \vec{a}_3 = \{1, 0, 0\}$

$\vec{b}_1 = \{1, 1, 1\},\ \vec{b}_2 = \{1, 1, -1\},\ \vec{b}_3 = \{2, 1, 2\}$; $A_{[e]} = ?$

Решение $\mathcal{A}(a_i) = b_i\ \forall i = \overline{1,3}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$

$\overset{[e]}{\Longleftrightarrow} A_{[e]}(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$

или $A_{[e]} A = B \Rightarrow A_{[e]} = B \cdot A^{-1}$

Найдем A^{-1}:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{1449}$ а) $\forall X \in M_{2\times 2}\ \mathcal{A}(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \equiv BX$

1) $\forall X, Y \in M_{2\times 2}\ \mathcal{A}(X+Y) = B(X+Y) = BX + BY = \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y)$

2) $\forall X \in M_{2\times 2}, \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \mathcal{A}(\lambda X) = B(\lambda X) = \lambda(BX) = \lambda \mathcal{A}(X)$

$\Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{L}(M_{2\times 2})$

Возьмем базис $[e]=\{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{=e_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{=e_2},\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{=e_3},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{=e_4}\}$ в $M_{2\times2}$

$$\mathcal{A}e_1=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=ae_1+ce_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}e_2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=be_1+d\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$$

$$\mathcal{A}e_3=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=0\cdot e_1+0\cdot e_2+a\cdot e_3+c\cdot e_4$$

$$\mathcal{A}e_4=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=0\cdot e_1+0\cdot e_2+b\cdot e_3+d\cdot e_4$$

$$\boxed{A_{[e]}=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}}$$

1452 | а) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4):\ \mathcal{A}\overset{[e]}{\longleftrightarrow}A_{[e]}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}$

Даны базисы $[e]=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ и

$[\tilde{e}]=\{e_1,e_3,e_2,e_4\}$ $\quad A_{[\tilde{e}]}=?$

Решение $\quad A_{[\tilde{e}]}=T^{-1}A_{[e]}T,$

где T - матрица перехода от $[e]$ к $[\tilde{e}]$.

Найдем T:

$$\tilde{e}_1=e_1=1\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$$

$$\tilde{e}_2=e_3=0\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3+0\cdot e_4$$

$$\tilde{e}_3=e_2=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$$

$$\tilde{e}_4=e_4=0\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+1\cdot e_4$$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Найдем $T^{-1}A_{[e]}$: $\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&2&0&1\\0&0&1&0&3&0&-1&2\\0&1&0&0&2&5&3&1\\0&0&0&1&1&2&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&2&0&1\\0&1&0&0&2&5&3&1\\0&0&1&0&3&0&-1&2\\0&0&0&1&1&2&1&3\end{array}\right)$

$$T^{-1}A_{[e]}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&5&3&1\\3&0&-1&2\\1&2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{[\tilde{e}]}}=T^{-1}A_{[e]}T=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\2&5&3&1\\3&0&-1&2\\1&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&3&5&1\\3&-1&0&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}}$$

1453| $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$: $A\xleftrightarrow{[e]}A_{[e]}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}$

Еще дан базис $[f]$:

$f_1=2e_1+3e_2+e_3$

$f_2=3e_1+4e_2+e_3$, где $[e]=\{e_1,e_2,e_3\}$

$f_3=e_1+2e_2+2e_3$ $\qquad A_{[f]}=?$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Найдем $T^{-1}A_{[e]}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&15&-11&5\\3&4&2&20&-15&8\\1&1&2&8&-7&6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&8&-7&6\\0&1&-3&-1&3&-7\\0&1&-4&-4&6&-10\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5&9&-10&13\\0&1&-3&-1&3&-7\\0&0&1&3&-3&3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-6&5&-2\\0&1&0&8&-6&2\\0&0&1&3&-3&3\end{array}\right)\Rightarrow\boxed{A_{[f]}}=\begin{pmatrix}-6&5&-2\\8&-6&2\\3&-3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}}$$

1455 Пусть $[e]$, $[\tilde{e}]$ - базисы лин. пр-ва V
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$: $\mathcal{A} \xleftrightarrow{[e]} A_{[e]}$, $\mathcal{A} \xleftrightarrow{[\tilde{e}]} A_{[\tilde{e}]}$, T - матрица перехода от базиса $[e]$ к базису $[\tilde{e}]$:
$[\tilde{e}] = [e]T$

\# $A_{[\tilde{e}]} = T^{-1} A_{[e]} T$

$$A_{[\tilde{e}]} = A_{[e]} \Longleftrightarrow \begin{matrix} 1)\ T^{-1} A_{[e]} = A_{[\tilde{e}]} T^{-1} = A_{[e]} T^{-1} \\ 2)\ A_{[e]} T = T A_{[\tilde{e}]} = T A_{[e]} \end{matrix}$$
\#

1457 В $\mathbb{R}^2$ даны базисы $[a] = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ и $[b] = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$; $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:
$\mathcal{A} \xleftrightarrow{[a]} A_{[a]} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} \xleftrightarrow{[b]} B_{[b]} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$
$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \xleftrightarrow{[b]} (A+B)_{[b]} = A_{[b]} + B_{[b]} = ?$
$\vec{a}_1 = (1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 3)$; $\vec{b}_1 = (3, 1)$, $\vec{b}_2 = (4, 2)$

Решение $[a] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $[b] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем матрицу перехода от $[a]$ к $[b]$:
$[b] = [a]T \Rightarrow T = [a]^{-1}[b]$
T: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$A_{[b]} = ?$ $\quad A_{[b]} = T^{-1} A_{[a]} T$
$T^{-1} A_{[a]}$: $\left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -8 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -2 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\frac{7}{2} & -4 \\ 0 & 1 & \frac{43}{2} & 23 \end{array}\right) \sim$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -25 & -27\\ 0 & 1 & 21{,}5 & 23\end{array}\right) \Rightarrow T^{-1}A_{[a]}=\begin{pmatrix}-25 & -27\\ 21{,}5 & 23\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{[e]}=\begin{pmatrix}-25 & -27\\ 21{,}5 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 38\\ -35{,}5 & -34\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(A+B)_{[e]}=A_{[e]}+B_{[e]}=\begin{pmatrix}40 & 38\\ -35{,}5 & -34\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44 & 44\\ -29{,}5 & -25\end{pmatrix}}$$

<u>Дома</u>: П. 1435, 1438, 1442, 1444, 1446, 1448, 1449 б, 1452 б, 1454, 1458.