

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Семинар № 6

Линейные операторы и их матрицы.

Ядро и образ линейного оператора.

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

ИЯФиТ

доцент Волков Н.П.

Занятие 6

Def 1. Ядром оператора $A \in \mathcal{L}(V, W)$ называется множество $\text{Ker } A = \{x \in V : Ax = 0\}$

Def 2. Образом оператора $A \in \mathcal{L}(V, W)$ называется множество $\text{Im } A = \{y \in W : y = Ax \forall x \in V\}$

Формула $A[\tilde{e}] = T^{-1} A_{\tilde{e}} T (*)$

1434 | $A = \tilde{\Phi}$ - оператор поворота на угол φ против часовой стрелки.

$$1) \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2 \quad A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \tilde{\Phi}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \tilde{\Phi}\vec{x}_1 + \tilde{\Phi}\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2$$

$$2) \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad A(\lambda \vec{x}) = \tilde{\Phi}(\lambda \vec{x}) = \lambda \tilde{\Phi}(\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ - линейный оператор

Возьмем базис $[\tilde{e}] = \{\vec{i}, \vec{j}\} \in \mathbb{R}^2$

$$A\vec{i} = \vec{i} \cdot \cos \varphi + \vec{j} \cdot \sin \varphi$$

$$A\vec{j} = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow A_{[\tilde{e}]} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$$
$$\text{Im } A = \mathbb{R}^2$$

$$1436 \quad A\vec{x} = \Pi_{P_L} \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$1) \quad A(\vec{x} + \vec{y}) = \Pi_{P_L}(\vec{x} + \vec{y}) = \Pi_{P_L}\vec{x} + \Pi_{P_L}\vec{y} = A\vec{x} + A\vec{y}$$

$$2) \quad A(\lambda\vec{x}) = \Pi_{P_L}(\lambda\vec{x}) = \lambda \Pi_{P_L}\vec{x} = \lambda A(\vec{x}) \\ \Rightarrow A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

Возьмем базис \mathbb{R}^3 $[e] = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} A\vec{i} &= \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ A\vec{j} &= \vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ A\vec{k} &= \vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \ker A &= L(\vec{j}, \vec{k}) \\ \operatorname{Im} A &= L(\vec{i}) \end{aligned}$$

$$1441 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \text{ в базисе } [e]$$

$$A\vec{x} = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$$

$$1) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = ((x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)) =$$

$$= ((x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) +$$

$$+ (y_2 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3)) = A\vec{x} + A\vec{y}$$

$$2) \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ и } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A(\lambda \vec{x}) &= (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \\ &- \lambda x_2 + \lambda x_3) = \lambda (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + \\ &+ x_3) = \lambda A \vec{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

Рассмотрим базис $[e] = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \in \mathbb{R}^3$

$$A\vec{i} = (0, 2, 3) = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$A\vec{j} = (1, 0, -1) = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k}$$

$$A\vec{k} = (1, 1, 1) = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$$

$$A_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } A = \{\vec{0}\}$$

$$\text{Im } A = \mathbb{R}^3$$

$$1443] \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in [e]$$

$$A\vec{x} = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$$

$$1) \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= (2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + (x_3 + \\ &+ y_3), (x_3 + y_3)^2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2) + \\ &+ (2y_1 + y_2, y_1 + y_3, y_3^2) + (0, 0, 2x_3y_3) = \end{aligned}$$

$$= A\vec{x} + A\vec{y} + (0, 0, 2x_3y_3) \neq A\vec{x} + A\vec{y}$$

A не является линейным оператором

$$1445 \quad \exists? A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3): A(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i, i = \overline{1,3}$$

$$\vec{\alpha}_1 = \{2, 3, 5\}, \vec{\alpha}_2 = \{0, 1, 2\}, \vec{\alpha}_3 = \{1, 0, 0\}$$

$$\vec{\beta}_1 = \{1, 1, 1\}, \vec{\beta}_2 = \{1, 1, -1\}, \vec{\beta}_3 = \{2, 1, 2\}$$

Решение $A(\alpha_i) = \beta_i \quad \forall i = \overline{1,3}$ $A_{[\sigma]} = ?$

$$\Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\Leftrightarrow A_{[\sigma]}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\text{или } A_{[\sigma]}A = B \Rightarrow A_{[\sigma]} = B \cdot A^{-1}$$

Найдем A^{-1} :

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -5 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{[\sigma]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1449 \quad a) \quad \forall X \in M_{2 \times 2} \quad A(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X = BX$$

$$1) \quad \forall X, Y \in M_{2 \times 2} \quad A(X+Y) = B(X+Y) = BX + BY = A(X) + A(Y)$$

$$2) \quad \forall X \in M_{2 \times 2}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad A(\lambda X) = B(\lambda X) = \lambda(BX) = \lambda A(X)$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{L}(M_{2 \times 2})$$

Возьмем базис $[e] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 4}$

$$\Rightarrow Ae_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a \cdot e_1 + c \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\Rightarrow Ae_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b \cdot e_1 + d \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$Ae_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + c \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$Ae_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + d \cdot e_4$$

$$A_{[e]} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

1452 | а) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$: $A \xrightarrow{[e]} A_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Даны базисы $[e] = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $[\tilde{e}] = \{e_1, e_3, e_2, e_4\}$ $A_{[\tilde{e}]} = ?$

Решение $A_{[\tilde{e}]} = T^{-1} A_{[e]} T$, где T - матрица перехода от $[e]$ к $[\tilde{e}]$.

Найдем T :

$$\tilde{e}_1 = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\tilde{e}_2 = e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\tilde{e}_3 = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\tilde{e}_4 = e_4 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем $T^{-1}A_{[e]}$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$

$$T^{-1}A_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{[e]} = T^{-1}A_{[e]}T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

1453 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$: $A \xleftrightarrow{[e]} A_{[e]} = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

Еще дан базис $[f]$:

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$$

$$f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$$

$$f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

, где $[e] = \{e_1, e_2, e_3\}$
 $A_{[f]} = ?$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем $T^{-1}A_{[e]}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 15 & -11 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 20 & -15 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -7 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 8 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 6 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 9 & -10 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{A_{[f]} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

1455] Пусть $[e]$, $[\tilde{e}]$ - базисы л.н. пр-ва V
 $A \in \mathcal{L}(V)$: $A \xrightarrow{[e]} A_{[e]}$, $A \xrightarrow{[\tilde{e}]} A_{[\tilde{e}]}$, T - матрица
 перехода от базиса $[e]$ к базису $[\tilde{e}]$:

$$[\tilde{e}] = [e]T$$

$$\# A_{[\tilde{e}]} = T^{-1}A_{[e]}T$$

$$A_{[\tilde{e}]} = A_{[e]} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) T^{-1}A_{[e]} = A_{[\tilde{e}]}T^{-1} = A_{[e]}T^{-1} \\ 2) A_{[e]}T = T A_{[\tilde{e}]} = T A_{[e]} \end{array} \#$$

1457] В \mathbb{R}^2 даны базисы $[a] = \{\underset{\downarrow}{\alpha_1}, \underset{\downarrow}{\alpha_2}\}$ и
 $[b] = \{\underset{\downarrow}{\beta_1}, \underset{\downarrow}{\beta_2}\}$; $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

$$A \xrightarrow{[a]} A_{[a]} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B \xrightarrow{[b]} B_{[b]} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(A+B) \xrightarrow{[b]} (A+B)_{[b]} = A_{[b]} + B_{[b]} = ?$$

$$\vec{\alpha}_1 = (1, 2), \quad \vec{\alpha}_2 = (2, 3); \quad \vec{\beta}_1 = (3, 1), \quad \vec{\beta}_2 = (4, 2)$$

Решение $[a] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, [b] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем матрицу перехода от $[a]$ к $[b]$:

$$[b] = [a]T \Rightarrow T = [a]^{-1}[b]$$

$$T: \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{[b]} = ? \quad A_{[b]} = T^{-1}A_{[a]}T$$

$$T^{-1}A_{[a]}: \left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -8 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -2 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -\frac{7}{2} & -4 \\ 0 & 1 & \frac{43}{2} & 23 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -25 & -27 \\ 0 & 1 & 21,5 & 23 \end{array} \right) \Rightarrow T^{-1}A_{[a]} = \begin{pmatrix} -25 & -27 \\ 21,5 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{[b]} = \begin{pmatrix} -25 & -27 \\ 21,5 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -35,5 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(A+B)_{[b]}} = A_{[b]} + B_{[b]} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -35,5 & -34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} =$$
$$\boxed{= \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29,5 & -25 \end{pmatrix}}$$

Дома: П. 1435, 1438, 1442, 1444, 1446, 1448,
1449δ, 1452δ, 1454, 1458.