

ГЛАВА I. МЕХАНИКА

§9. Удар

О. И. Лубенченко

НИУ МЭИ

Кафедра физики им. В. А. Фабриканта

2020

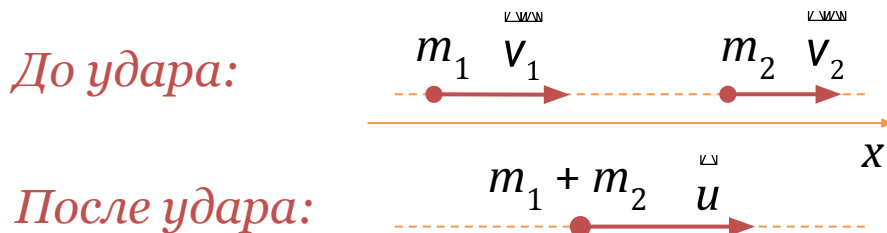
I. Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар — ФЯ — удар, после которого соударяющиеся тела движутся как единое целое.

$$P = \text{const}, W \neq \text{const}$$

Рассмотрим **абсолютно неупругое центральное соударение** двух шаров. (**Центральное соударение** — соударение, перед которым центры шаров движутся по прямой, их соединяющей.)

Массы шаров равны m_1 и m_2 , их скорости до соударения — \vec{v}_1, \vec{v}_2 .
Найдём скорость шаров после удара.



ЗСИ: $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$

$x: m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x$

$$u_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$u = |u_x|$$

Найдём *долю механической энергии*, перешедшей во внутреннюю при ударе:

$$\eta = \frac{|\Delta W_k|}{W_{k1}} = \frac{W_{k1} - W_{k2}}{W_{k1}} = 1 - \frac{W_{k2}}{W_{k1}}$$

W_{k1} — кинетическая энергия системы до удара, W_{k2} — после удара, ΔW_k — изменение кинетической энергии при ударе

$$W_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$W_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\eta = 1 - \frac{(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}$$

Если до соударения шары двигались в одну сторону, то $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = v_2$ и

$$\eta = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}$$

Если шары двигались в разные стороны, то $\eta = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}$

При $v_2 = 0$ $\eta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

II. Абсолютно упругий удар

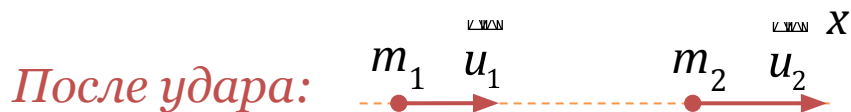
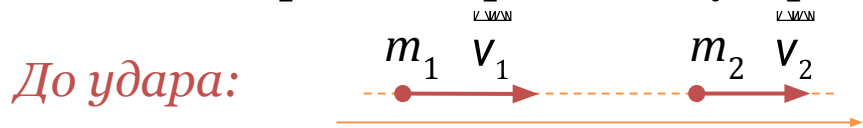
Абсолютно упругий удар — ФЯ — удар, при котором соударяющиеся тела испытывают упругую деформацию.

$$P = \text{const}, W = \text{const}$$

Рассмотрим *абсолютно упругое центральное соударение* двух шаров.

Массы шаров равны m_1 и m_2 , их скорости до соударения — v_1 , v_2 .

Найдём скорости шаров после удара.



ЗСИ: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

ЗСМЭ: $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} \\ m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 = m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m_1 v_{1x} - m_1 u_{1x} = m_2 u_{2x} - m_2 v_{2x} \\ m_1 v_{1x}^2 - m_1 u_{1x}^2 = m_2 u_{2x}^2 - m_2 v_{2x}^2 \end{cases}$$

$$\frac{v_{1x}^2 - u_{1x}^2}{v_{1x} - u_{1x}} = \frac{v_{2x}^2 - u_{2x}^2}{v_{2x} - u_{2x}} \longrightarrow v_{1x} + u_{1x} = v_{2x} + u_{2x} \longrightarrow u_{2x} = v_{1x} - v_{2x} + u_{1x}$$

$$m_1 v_{1x} - m_1 u_{1x} = m_2 v_{1x} - m_2 v_{2x} + m_2 u_{1x} - m_2 v_{2x}$$

$$m_1 v_{1x} - m_2 v_{1x} + 2m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_{1x}$$

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1) v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}$$

Частные случаи

1. Упругое соударение шаров одинаковой массы

При $m_1 = m_2 = m$ $u_{1x} = v_{2x}$ $u_{2x} = v_{1x}$

2. Удар шара об упругую плиту

$m_2 \gg m_1, v_2 = 0$

$$u_{1x} = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1 \right) v_{1x}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = -v_{1x}$$

