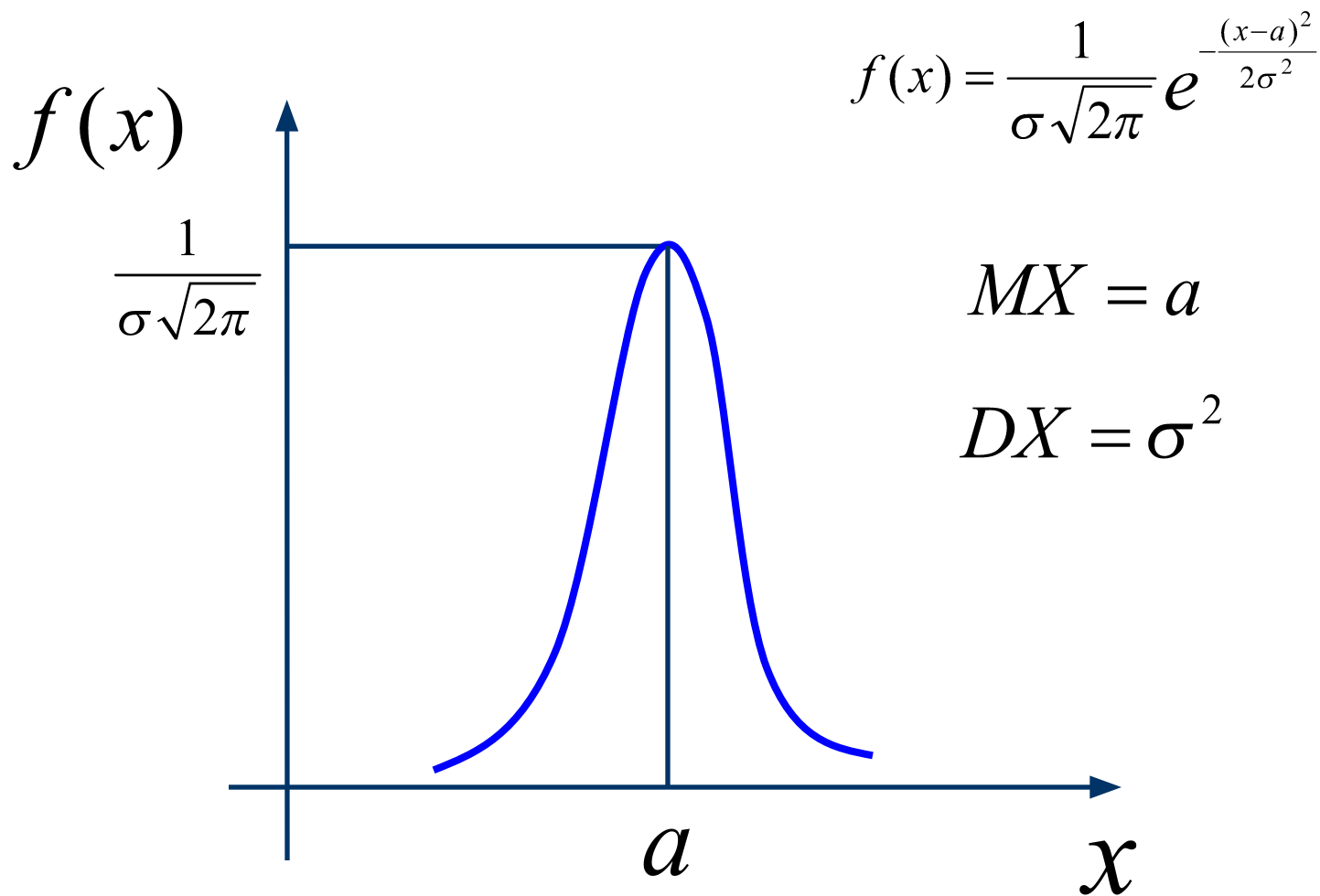


НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону с параметрами $a, \sigma > 0$, если она имеет плотность вероятности

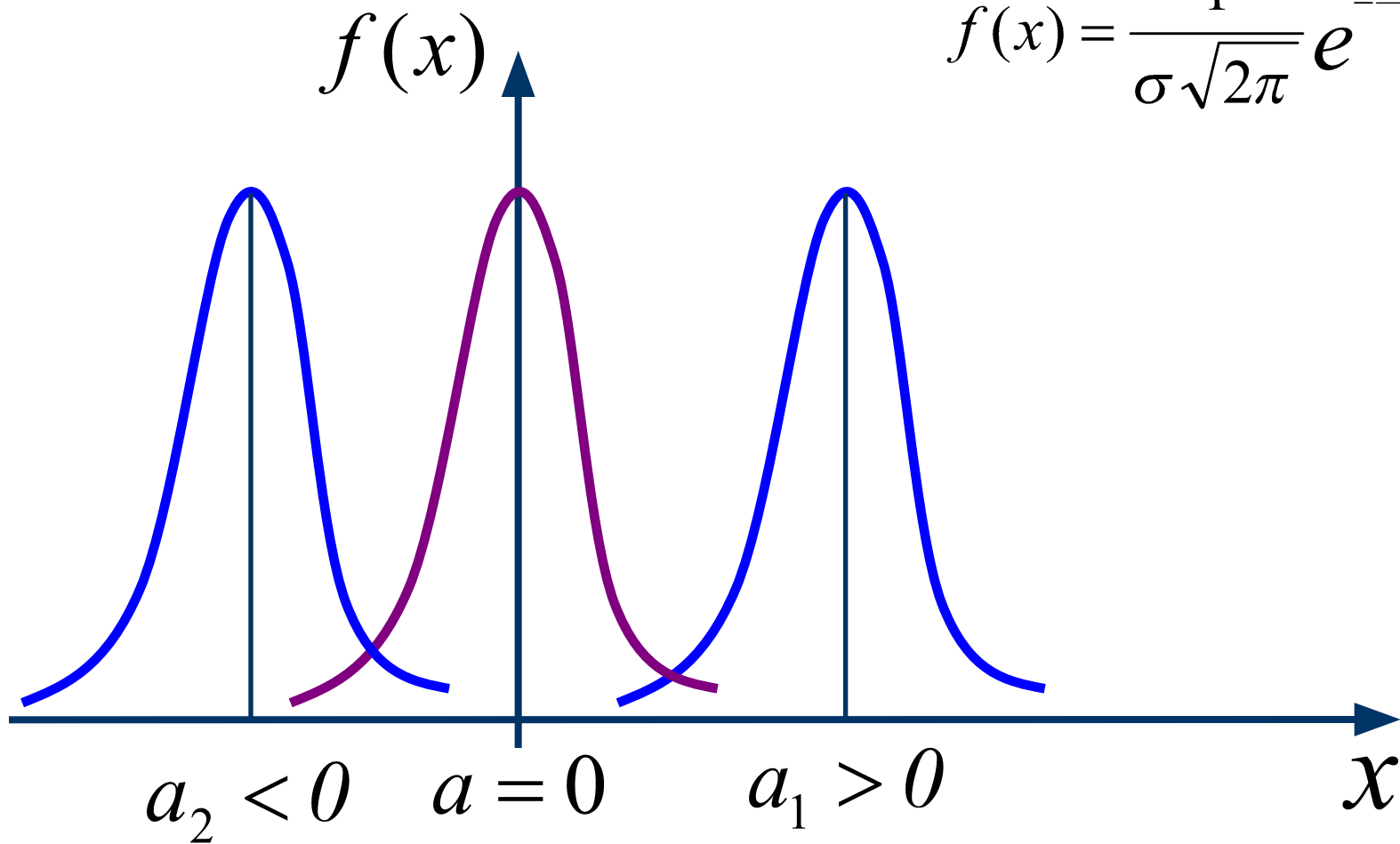
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривая распределения имеет вид:



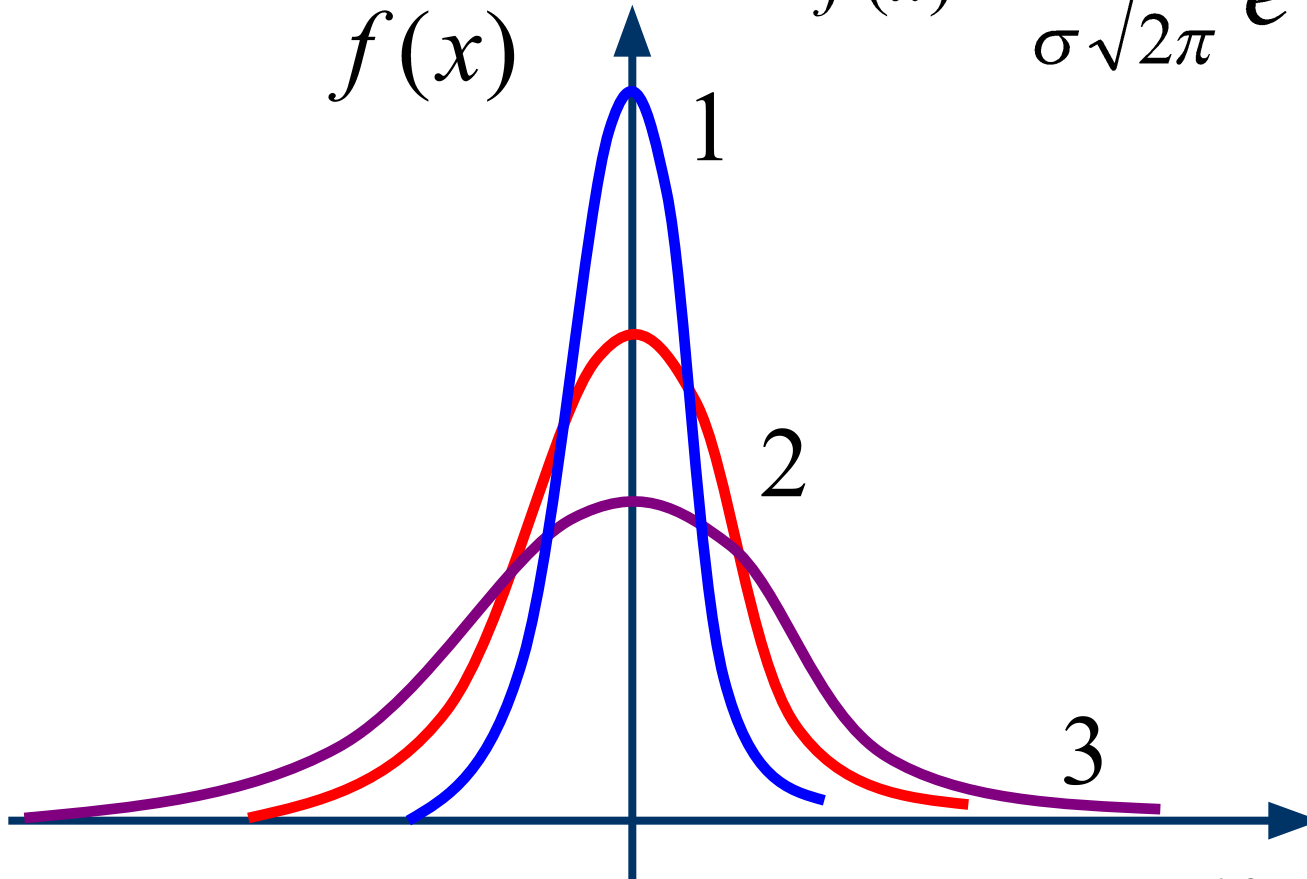
*Если изменять параметр a ,
кривая распределения будет
смещаться вдоль оси
абсцисс, не изменяя при этом
своей формы.*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



*Параметр σ характеризует
форму
кривой распределения.
При его увеличении кривая
распределения становится более
плоской, и наоборот.*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$$

То, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a, \sigma > 0$, обозначается

$$X \in N(a, \sigma)$$

$$MX = a$$

$$DX = \sigma^2$$

$$X \in N(a, \sigma)$$

$$P(c \leq X \leq d) = ?$$

$X \in N(a, \sigma)$

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$X \in N(a, \sigma)$$

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Интеграл аналитически не вычисляется!

1 способ (при вычислении в Excel)

$$P(c \leq x \leq d) = F_{N(a,\sigma)}(d) - F_{N(a,\sigma)}(c)$$

$F_{N(a,\sigma)}(x)$ функция нормального
Распределения, для вычисления
Которой используется функция
НОРМРАСП($x;a;\sigma;1$)

1 способ (при вычислении в Excel)

$$P(c \leq x \leq d) = F_{N(a,\sigma)}(d) - F_{N(a,\sigma)}(c)$$

НОРМРАСП(x;a;σ;1)

Например, если X имеет нормальное распределение со средним $a=4$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma=2$, то для вычисления $P(-1 \leq x \leq 3)$

Пишем

НОРМРАСП(3;4;2;1)-НОРМРАСП(-1;4;2;1)

$$\begin{aligned} P(x \leq d) &= P(-\infty \leq x \leq d) = \\ &= F_{N(a,\sigma)}(d) - F_{N(a,\sigma)}(-\infty) = F_{N(a,\sigma)}(d) \end{aligned}$$

Например, если X имеет нормальное распределение со средним $a=4$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma=2$, то для вычисления $P(x \leq 3)$

Пишем

НОРМРАСП(3;4;2;1)

$$\begin{aligned} P(x > c) &= P(c < x < +\infty) = \\ &= F_{N(a,\sigma)}(+\infty) - F_{N(a,\sigma)}(c) = \\ &= 1 - F_{N(a,\sigma)}(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x > c) &= P(c < x < +\infty) = \\ &= F_{N(a,\sigma)}(+\infty) - F_{N(a,\sigma)}(c) = \\ &= 1 - F_{N(a,\sigma)}(c) \end{aligned}$$

Например, если X имеет нормальное распределение со средним $a=4$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma=2$, то для вычисления $P(X>5)$

Пишем

1- НОРМРАСП(5;4;2;1)

2 способ (при вычислении вручную)

$$P(c \leq x \leq d) = \hat{O}\left(\frac{d - a}{\sigma}\right) - \hat{O}\left(\frac{c - a}{\sigma}\right)$$

$\Phi(x)$ – табличная функция Лапласа

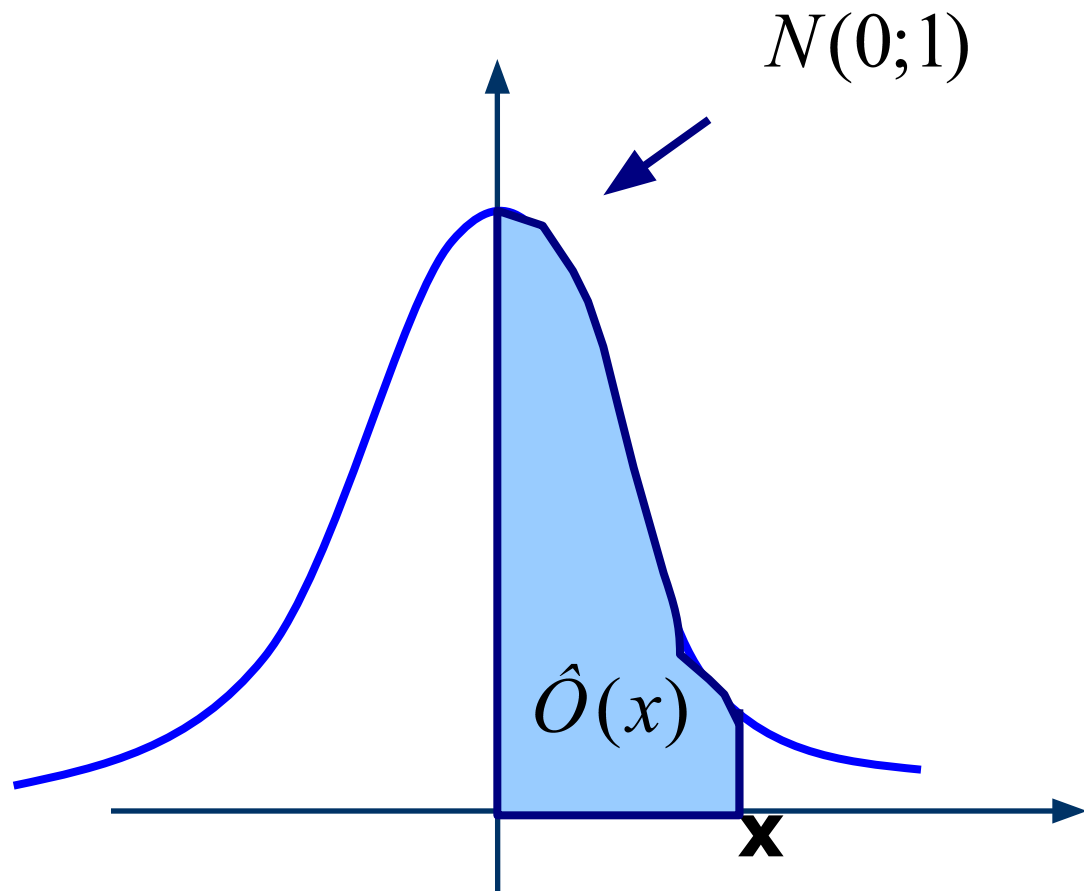
$$\hat{O}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\hat{O}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{-функция Лапласа}$$

$$\hat{O}(-x) = -\hat{O}(x)$$

$$\hat{O}(+\infty) = 0,5$$

$$\hat{O}(-\infty) = -0,5$$



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	0,5	0,1915	1	0,3413	1,5	0,4332	2	0,4772	3	0,49865
0,01	0,004	0,51	0,195	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,2	0,49931
0,02	0,008	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,4	0,49966

$$\begin{aligned} P(x \leq d) &= P(-\infty \leq x \leq d) = \\ &= \hat{O}\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \hat{O}(-\infty) = \hat{O}\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) + 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x > c) &= P(c < x < \infty) = \\ &= \hat{O}(+\infty) - \hat{O}\left(\frac{c - a}{\sigma}\right) = 0,5 - \hat{O}\left(\frac{c - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

ПРИМЕР.

Пусть случайная величина X - рост наугад выбранного студента подчиняется нормальному распределению с параметром $\mu=174$ см. и $\sigma = 6$ см.

Найти вероятности $p(X < 190)$, $p(X > 180)$, $p(160 < X < 190)$.

РЕШЕНИЕ.

$$X \in N(174; 6)$$

$$P(X < 190) = P(-\infty < X < 190)$$

В Excel пишем =НОРМРАСП(190;174;6;1)

	A
1	0,99617

Вручную

$$\begin{aligned} P(X < 190) &= \Phi\left(\frac{190 - 174}{6}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{8}{3}\right) + 0,5 = \\ &= \hat{O}(2,67) + 0,5 = 0,496 + 0,5 = 0,996 \end{aligned}$$

Находим в таблице Лапласа

РЕШЕНИЕ.

$$X \in N(174; 6)$$

$$P(X > 180) = P(180 < X < +\infty)$$

В Excel пишем =1-НОРМРАСП(180;174;6;1)

	A
1	0,15866

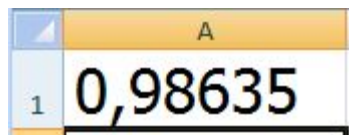
Вручную

$$\begin{aligned} P(X > 180) &= \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{180 - 174}{6}\right) = 0,5 - \Phi(1) = \\ &= 0,5 - 0,34 = 0,16 \end{aligned}$$

$$X \in N(174, 6)$$

$$P(160 < X < 190)$$

В Excel пишем =НОРМРАСП(190;174;6;1)- НОРМРАСП(160;174;6;1)



	A
1	0,98635

Вручную

$$\begin{aligned} P(160 < X < 190) &= \Phi\left(\frac{190 - 174}{6}\right) - \Phi\left(\frac{160 - 174}{6}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{8}{3}\right) + \Phi\left(\frac{7}{3}\right) = 0.4963 + 0.4898 = 0.986 \end{aligned}$$

Находим в таблице Лапласа

ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

Пусть X - нормально распределенная случайная величина с параметрами a, σ . Тогда

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) \approx 1$$

Действительно,

$$\begin{aligned} P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) &= \Phi\left(\frac{a + 3\sigma - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 3\sigma - a}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) + \Phi(3) = 0.49865 + 0.49865 = 0.9973 \approx 1 \end{aligned}$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Изобразить схематично график плотности распределения
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.
- С помощью правила трех сигм определить, в каком интервале почти наверное (с вероятностью 0,9973) лежит дневная выручка магазина

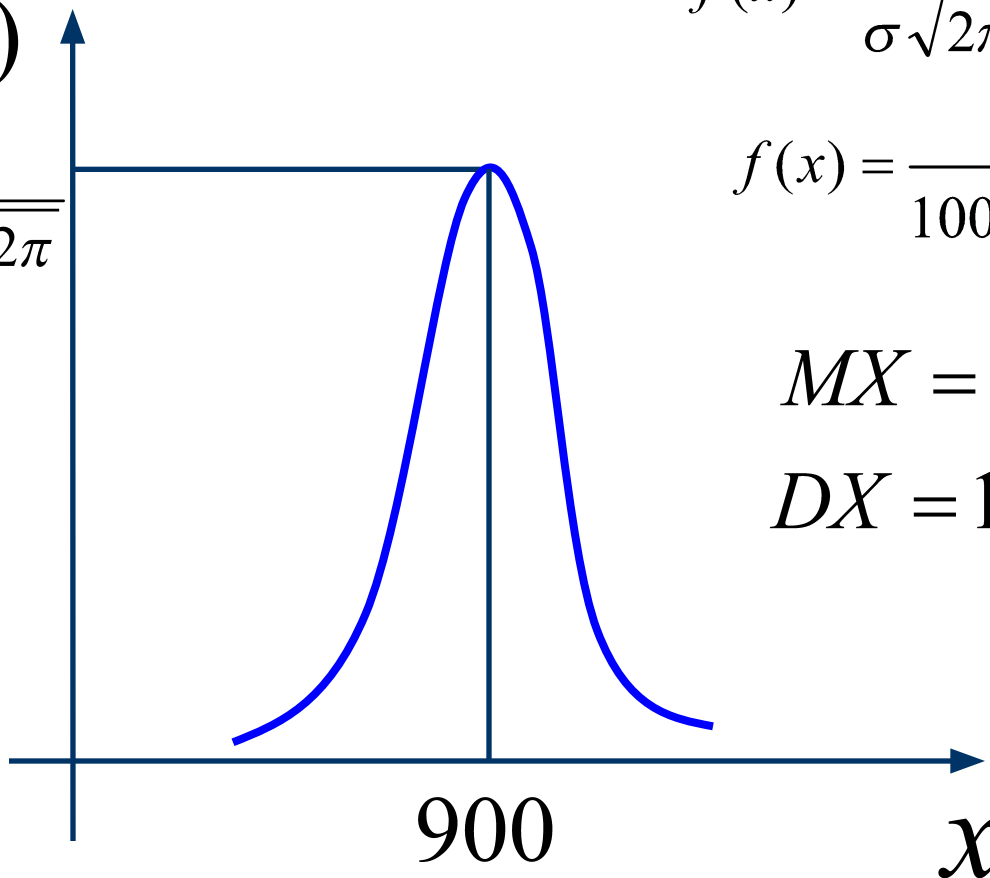
Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

• Изобразить схематично график плотности распределения

$N(900; 100)$

$f(x)$

$$\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}$$



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-900)^2}{2 \cdot 100^2}}$$

$$MX = 900$$

$$DX = 100^2$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.

Решение вручную:

$$\begin{aligned} P(800 < X < 1000) &= \Phi\left(\frac{1000 - 900}{100}\right) - \Phi\left(\frac{800 - 900}{100}\right) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) = 0.341 + 0.341 = 0.682 \end{aligned}$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.

Решение вручную:

$$\begin{aligned} P(X < 800) &= P(-\infty < X < 800) = \Phi\left(\frac{800 - 900}{100}\right) - \Phi(-\infty) = \\ &= \Phi(-1) + \Phi(\infty) = -0.341 + 0.5 = 0.159 \end{aligned}$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.

Решение вручную:

$$\begin{aligned} P(X > 1000) &= P(1000 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{1000 - 900}{100}\right) = \\ &= 0.5 - \Phi(1) = 0.5 - 0.341 = 0.159 \end{aligned}$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс.руб.

Решение в Excel:

Средняя дневная выручка $m=$	900	тысяч рублей	
Среднеквадратичное отклонение	100	тысяч рублей	
A - дневная выручка от 800 до 1000 тысяч рублей			
P(A)=	0,682689		=НОРМРАСП(1000;900;100;1)- НОРМРАСП(800;900;100;1)
B - дневная выручка меньше 800 тысяч рублей			
P(B)=	0,158655		=НОРМРАСП(800;900;100;1)
C - дневная выручка больше 1000 тысяч рублей			
P(C)=	0,158655		=1-НОРМРАСП(1000;900;100;1)

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- С помощью правила трех сигм определить, в каком интервале почти наверное (с вероятностью 0,9973) лежит дневная выручка магазина

$$X \sim N(900; 100)$$

$$p(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = 0.9973$$

$$p(900 - 3 \cdot 100 < X < 900 + 3 \cdot 100) = 0.9973$$

$$p(600 < X < 1200) = 0.9973$$