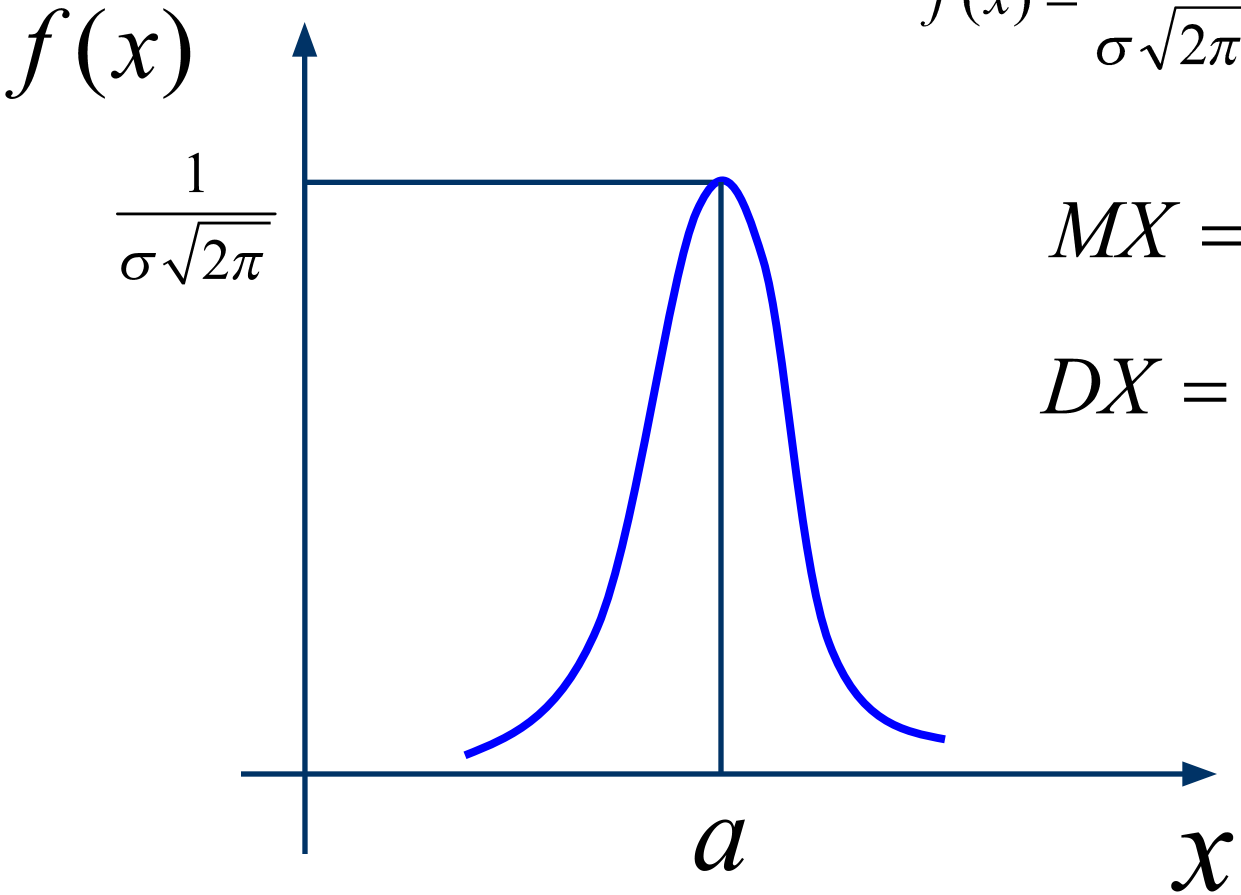
НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Непрерывная случайная величина X называется распределенной <u>по нормальному закону</u> с параметрами a, σ>0, если она имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Кривая распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

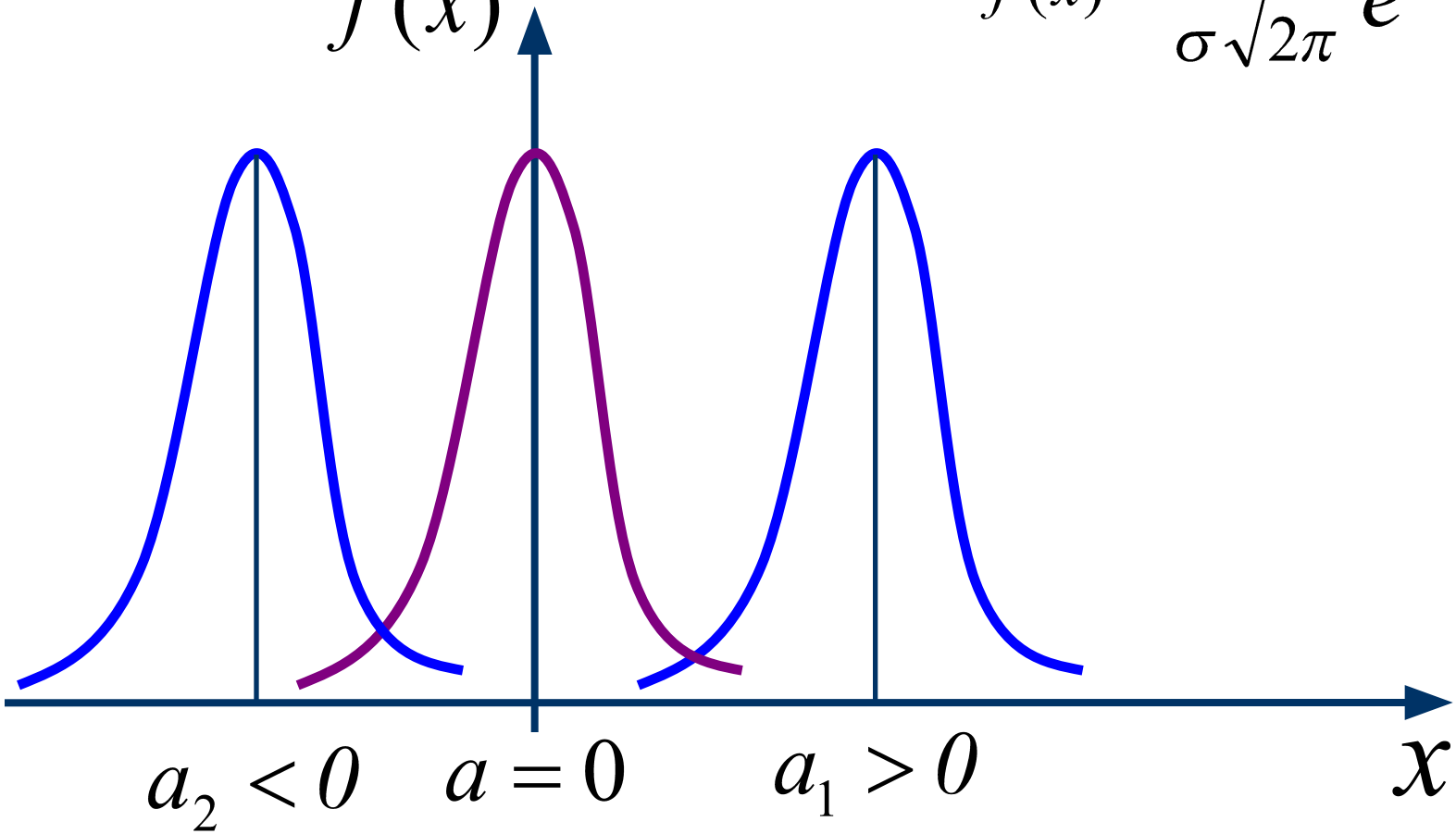


$$MX = a$$

$$DX = \sigma^2$$

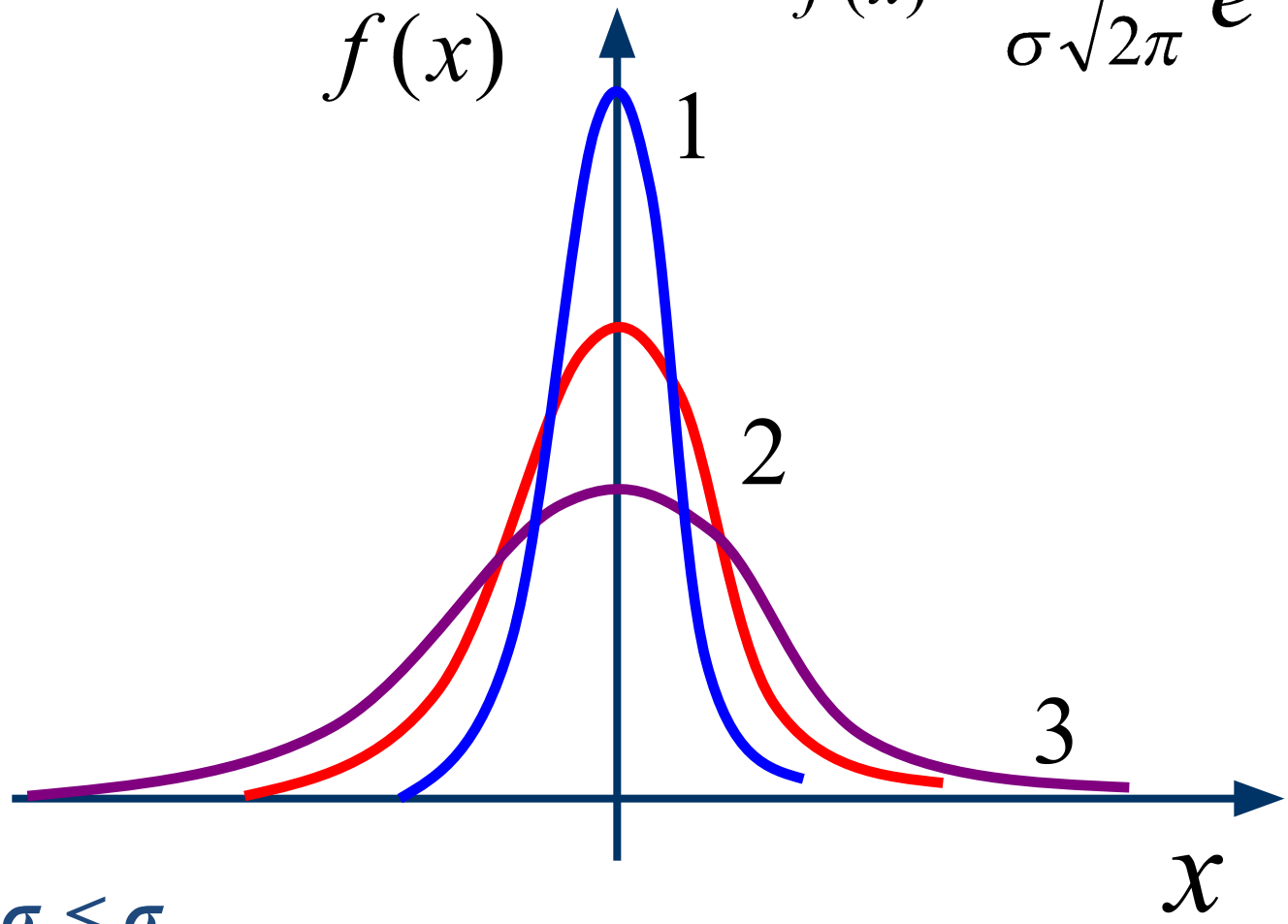
Если изменять параметр a , кривая распределения будет смещаться вдоль оси абсцисс, не изменяя при этом своей формы.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



Параметр σ характеризует форму кривой распределения. При его увеличении кривая распределения становится более плоской, и наоборот.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

То, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a, σ>0 , обозначается

$$X \in N(a, \sigma)$$

$$MX = a$$

$$DX = \sigma^2$$

$$X \in N(a, \sigma)$$

$$P(c \leq X \leq d) = ?$$

$$X \in N(a,\sigma)$$

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$X \in N(a,\sigma)$$

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Интеграл аналитически не вычисляется!

1 способ (при вычислении в Excel)

$$P(c \le x \le d) = F_{N(a,\sigma)}\left(d\right) - F_{N(a,\sigma)}\left(c\right)$$

$F_{N(a,\sigma)}\left(x\right)$ **функция нормального Распределения, для вычисления Которой используется функция НОРМРАСП(x;*a*;σ;1)**

1 способ (при вычислении в Excel)

$$P(c \le x \le d) = F_{N(a,\sigma)}(d) - F_{N(a,\sigma)}(c)$$

НОРМРАСП(x;*a*;σ;1)

Например, если X имеет нормальное распределение со средним a=4 и среднеквадратичным отклонением σ=2, то для вычисления $P(-1 \le x \le 3)$

Пишем

НОРМРАСП(3;4;2;1)-НОРМРАСП(-1;4;2;1)

$$P(x \le d) = P(-\infty \le x \le d) =$$

$$= F_{N(a,\sigma)}\left(d\right) - F_{N(a,\sigma)}\left(-\infty\right) = F_{N(a,\sigma)}\left(d\right)$$

Например, если X имеет нормальное распределение со средним a=4 и среднеквадратичным отклонением σ=2, то для вычисления $P(x \le 3)$

Пишем

НОРМРАСП(3;4;2;1)

$$P(x > c) = P(c < x < +\infty) =$$

$$= F_{N(a,\sigma)}\left(+\infty\right) - F_{N(a,\sigma)}\left(c\right) =$$

$$= 1 - F_{N(a,\sigma)}\left(c\right)$$

$$P(x > c) = P(c < x < +\infty) =$$

$$= F_{N(a,\sigma)}\left(+\infty\right) - F_{N(a,\sigma)}\left(c\right) =$$

$$= 1 - F_{N(a,\sigma)}\left(c\right)$$

Например, если X имеет нормальное распределение со средним a=4 и среднеквадратичным отклонением σ=2, то для вычисления P(X>5)
Пишем
1- НОРМРАСП(5;4;2;1)

2 способ (при вычислении вручную)

$$P(c \le x \le d) = \hat{O}\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \hat{O}\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)$$

Ф(х) – табличная функция Лапласа

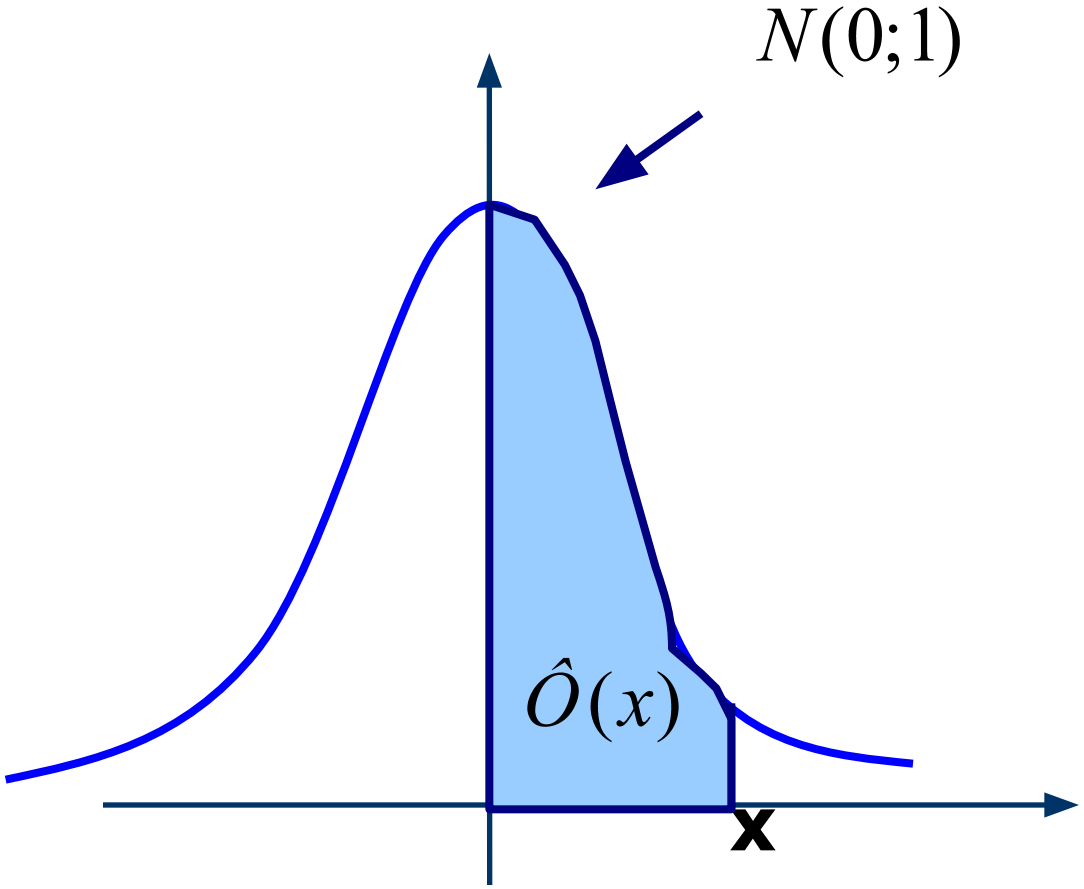
$$\hat{O}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\hat{O}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ **-функция Лапласа**

$$\hat{O}(-x) = -\hat{O}(x)$$

$$\hat{O}(+\infty) = 0,5$$

$$\hat{O}(-\infty) = -0,5$$



x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0	0	**0,5**	0,1915	**1**	0,3413	**1,5**	0,4332	**2**	**0,4772**	**3**	0,49865
0,01	0,004	**0,51**	0,195	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,2**	0,49931
0,02	0,008	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,4**	0,49966

$$P(x \le d) = P(-\infty \le x \le d) =$$

$$= \hat{O}\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \hat{O}\left(-\infty\right) = \hat{O}\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) + 0{,}5$$

$$P(x > c) = P(c < x < \infty) =$$

$$= \hat{O}\left(+\infty\right) - \hat{O}\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) = 0,5 - \hat{O}\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)$$

ПРИМЕР.

Пусть случайная величина X - рост наугад выбранного студента подчиняется нормальному распределению с параметром a=174 см. и $\sigma = 6$ см.

Найти вероятности p(X<190), p(X>180), p(160<X<190).

РЕШЕНИЕ.

$$X \in N(174;6)$$

$$P(X<190)=P(-\infty<X<190)$$

В Excel пишем =НОРМРАСП(190;174;6;1)

	A
1	0,99617

Вручную

$$P(X<190)=\Phi\left(\frac{190-174}{6}\right)-\Phi(-\infty)=\Phi\left(\frac{8}{3}\right)+0,5=$$

$$=\hat{O}(2,67)+0,5=0,496+0,5=0,996$$

Находим в таблице Лапласа

РЕШЕНИЕ.

$$X \in N(174;6)$$

$$P(X > 180) = P(180 < X < +\infty)$$

В Excel пишем =1-НОРМРАСП(180;174;6;1)

	A
1	0,15866

Вручную

$$P(X > 180) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{180-174}{6}\right) = 0,5 - \Phi(1) =$$

$$= 0,5 - 0,34 = 0,16$$

$$X \in N(174;6)$$

$$P(160 < X < 190)$$

В Excel пишем =НОРМРАСП(190;174;6;1)- НОРМРАСП(160;174;6;1)

	A
1	0,98635

Вручную

$$P(160 < X < 190) = \Phi\left(\frac{190-174}{6}\right) - \Phi\left(\frac{160-174}{6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{8}{3}\right) + \Phi\left(\frac{7}{3}\right) = 0.4963 + 0.4898 = 0.986$$

Находим в таблице Лапласа

ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМ

Пусть X - нормально распределенная случайная величина с параметрами a, σ. Тогда

$$p(a-3\sigma < X < a+3\sigma) \approx 1$$

Действительно,

$$P(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = \Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) + \Phi(3) = 0.49865 + 0.49865 = 0,9973 \approx 1$$

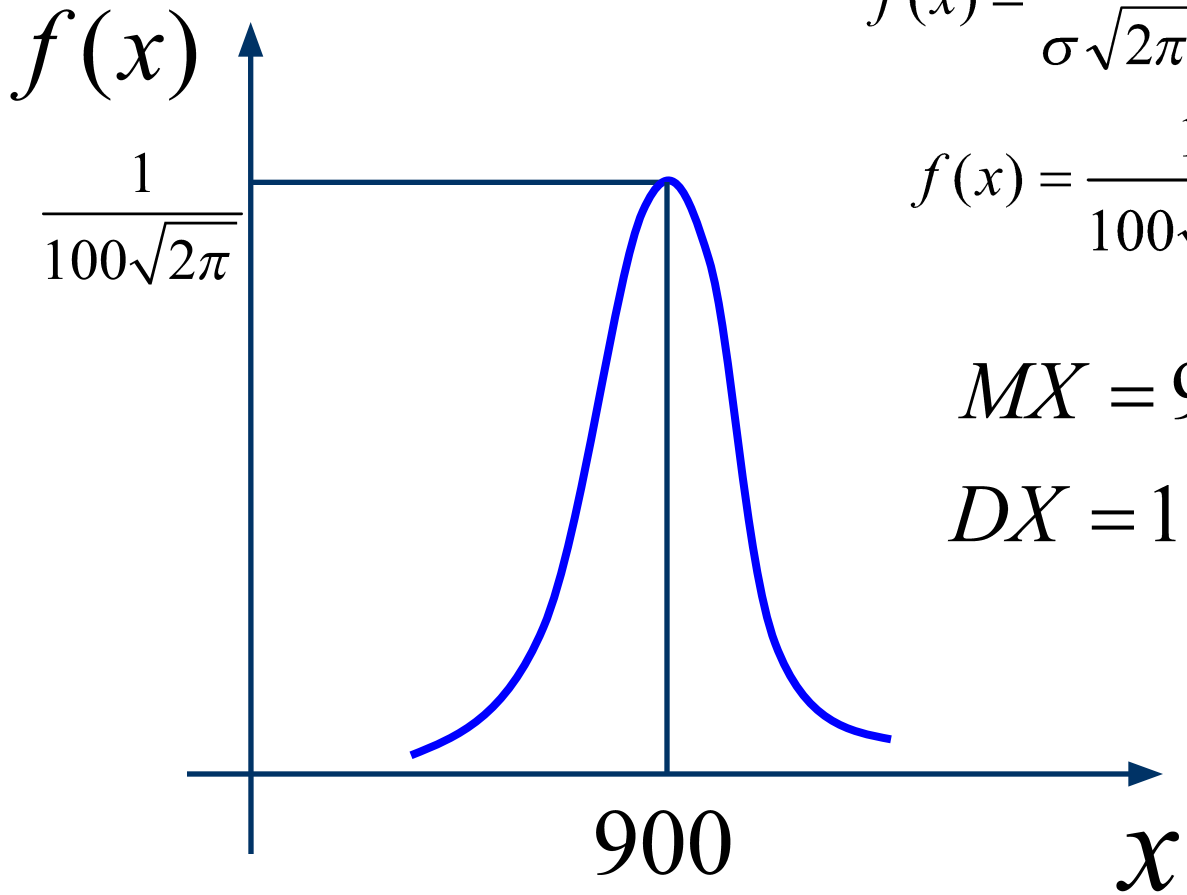
Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Изобразить схематично график плотности распределения
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.
- С помощью правила трех сигм определить, в каком интервале почти наверное (с вероятностью 0,9973) лежит дневная выручка магазина

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Изобразить схематично график плотности распределения

$$N(900;100)$$



$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-900)^2}{2\cdot 100^2}}$$

$$MX=900$$

$$DX=100^2$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.

Решение вручную:

$$P(800 < X < 1000) = \Phi\left(\frac{1000-900}{100}\right) - \Phi\left(\frac{800-900}{100}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) = 0.341 + 0.341 = 0.682$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.

Решение вручную:

$$P(X < 800) = P(-\infty < X < 800) = \Phi\left(\frac{800-900}{100}\right) - \Phi(-\infty) =$$

$$= \Phi(-1) + \Phi(\infty) = -0.341 + 0.5 = 0.159$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.

Решение вручную:

$$P(X > 1000) = P(1000 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{1000-900}{100}\right) = 0.5 - \Phi(1) = 0.5 - 0.341 = 0.159$$

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина лежит в интервале (800;1000).
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина меньше 800 тыс.руб.
- Найти вероятность того, что дневная выручка магазина больше 1000 тыс. руб.

Решение в Excel:

Средняя дневная выручка m=	900	тысяч рублей
Среднеквадратичное отклонение	100	тысяч рублей
A - дневная выручка от 800 до 1000 тысяч рублей		
P(A)=	0,682689	
B - дневная выручка меньше 800 тысяч рублей		
P(B)=	0,158655	
C - дневная выручка больше 1000 тысяч рублей		
P(C)=	0,158655	

=НОРМРАСП(1000;900;100;1)-НОРМРАСП(800;900;100;1)

=НОРМРАСП(800;900;100;1)

=1-НОРМРАСП(1000;900;100;1)

Дневная выручка магазина является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 900 тысяч рублей и среднеквадратичным отклонением 100 тысяч рублей.

- С помощью правила трех сигм определить, в каком интервале почти наверное (с вероятностью 0,9973) лежит дневная выручка магазина

$$X \quad N(900;100)$$

$$p(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = 0.9973$$

$$p(900-3\cdot 100 < X < 900+3\cdot 100) = 0.9973$$

$$p(600 < X < 1200) = 0.9973$$