# Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ 4

Соответствия между множествами.

Отображения. Функции.

# Соответствия между множествами

Пары $(a_i, b_j)$ задают **соответствие** между множествами *A* и *B*, если указано правило *R*, по которому для элемента множества *A* выбирается элемент из множества *B*.

Пусть для некоторого элемента *a* множества *A* поставлен в соответствие некоторый элемент *b* из множества *B*, который называется **образом** элемента *a* и записывается $b = R(a)$. Тогда $a = R^{-1}(b)$ - **прообраз** элемента $b \in B$.

## *Соответствия*

***Соответствие*** ***между множествами A и B определяется заданным правилом, согласно которому элементам одного множества сопоставляются элементы другого множества.***

***Соответствием*** ***между множествами A и B называется подмножество $\phi$ их прямого произведения:***

$$\phi \subset A \times B \quad и \quad \phi : A \to B$$

***Про элементы $x \in A$ и $y \in B$ говорят, что они находятся в соответствии $\phi$, если пара $(x,y) \in \phi$.***

$$\phi : x \to y, \quad x \in A, y \in B.$$

***Если $(x, y) \in \phi$, то иногда пишут $x \phi y$***

***’у называют*** ***образом*** ***x, а x -*** ***прообразом*** ***y.***

***Пусть*** $\phi \subset A \times B$ ***и*** $\phi : A \to B$***, тогда***

***Область определения соответствия (domain):*** $D(\phi) = \{ a \in A \mid \exists b \in B: (a,b) \in \phi \} \subset A$

***Область значений соответствия (range):*** $R(\phi) = \{ b \in B \mid \exists a \in A: (a,b) \in \phi \} \subset B$

***Пример:*** ***Пусть даны множества A и B***

$A = \{ 2, 3, 8 \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$,

$\phi = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$

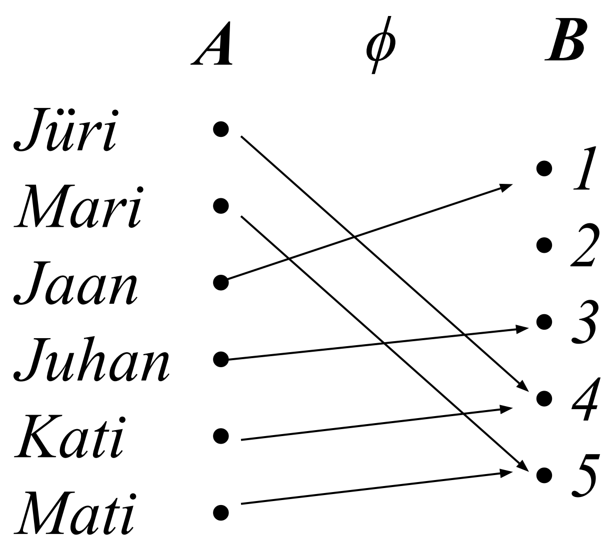
***Тогда*** $D(\phi) = \{2, 3\} \subset A$ ***и*** $R(\phi) = \{2, 3, 4, 6\} \subset B$

## Пример:

***Пусть дано множество студентов:***
***A = {Jüri, Mari, Jaan, Juhan, Kati, Mati}***
***и множество возможных оценок:***
***B = { 1, 2, 3, 4, 5}***
***$\phi : A \to B$ соответствие между множествами A и B, которое сопоставляет каждому студенту его оценку.***

## Диаграмма (граф) соответствия:

***$\phi$ = { (Jüri, 4), (Mari, 5), (Jaan, 1), (Juhan, 3), (Kati, 4), (Mati, 5)}***



## <u>Пример:</u>

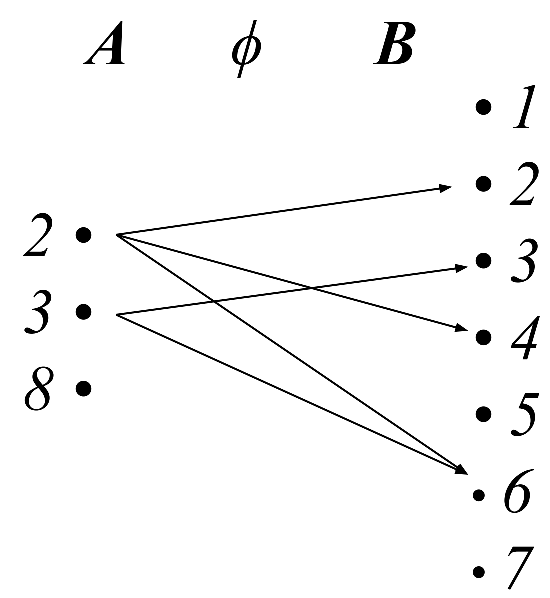
***Пусть даны множества A и B***

***A = { 2, 3, 8 }***

***B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }.***

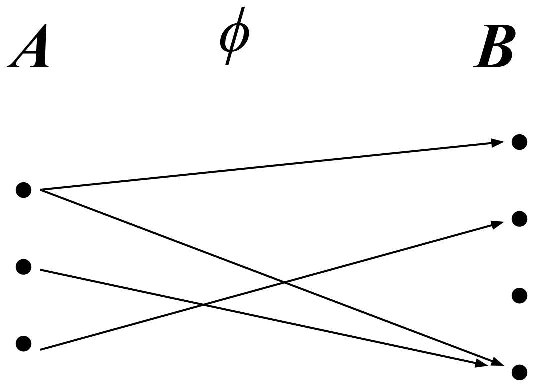
***Соответствием между множествами A и B «число из A есть делитель числа из B» представляется множеством***

$\phi = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$,

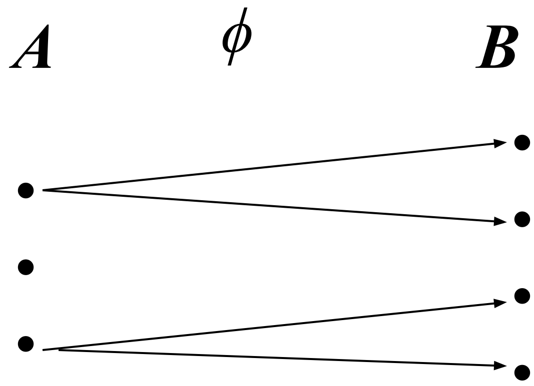


## ***Классификация соответствий:***

***Соответствие $\phi \subset A \times B$ всюду определенное, если $D(\phi) = A$.***

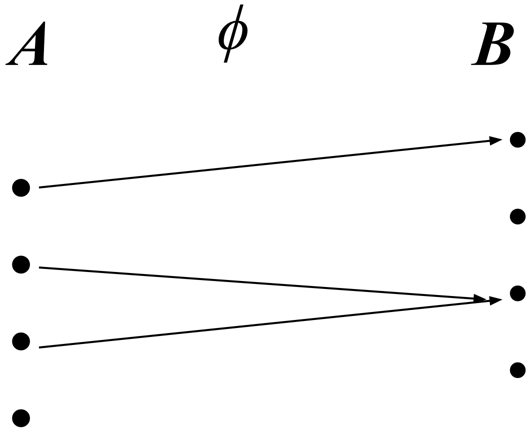



***Соответствие $\phi \subset A \times B$ на всю область значений определенное,***
***если $R(\phi) = B$.***



***Соответствие $\phi \subset A\times B$ однозначное,***
***если***

$$\forall a \in D(\phi) \quad \exists!\, b \in R(\phi) : (a,b) \in \phi$$




***Свойство:*** ***если соответствие $\phi \subset A\times B$ – однозначное, то***

$$\phi^{-1} \circ \phi = \{ (b,b) \mid b \in B \}$$

Образ множества *A* при соответствии *R* называется **множеством значений** этого соответствия и обозначается $R(A)$, если $R(A)$ состоит из образов всех элементов множества А:

$$R(A) = \{b \mid \forall a \in A, \exists b \in B : b = R(a)\}.$$

Прообраз множества *B* при некотором соответствии *R* называют **областью определения** этого соответствия и обозначают $R^{-1}(B)$, т.е.

$$R^{-1}(B) = \{a \mid \forall b \in B, \exists a \in A : R(a) = b\}.$$

$R^{-1}$ является **обратным** соответствием для *R*.

Для описания соответствий между множествами используют понятие отображения (функции) одного множества на другое.

# Функциональные БО

Бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$ называется функциональным, если каждому элементу x из X такому, что $(x, y) \in f$ соответствует один и только один элемент y из Y.

Все элементы (упорядоченные пары) функционального бинарного отношения имеют различные первые координаты.

Отличительной особенностью матрицы функционального отношения является то, что в каждом ее столбце содержится не более одного единичного элемента. Граф функционального отношения характеризуется тем, что из каждой вершины может выходить только одна дуга.

# Функция (отображение)

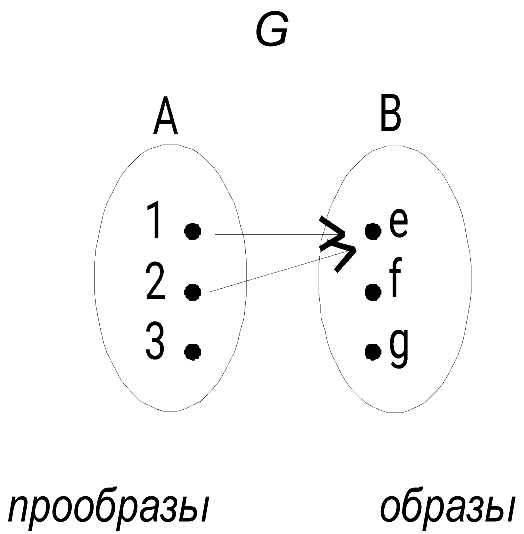
- **Определение** $f : X \to Y$
- Всюду определенное функциональное отношение называется называется ***функцией*** или ***отображением*** множества *X* в *Y*: то *есть каждому элементу* $x \in X$ *ставится в соответствие единственный элемент* $y \in Y$*.* $(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X})\,(\exists y \in Y)\;\; x\mathrm{fy}$
- $x$ - прообраз элемента $y$ , $x = f^{-1}(y)$ .
- $y$ - образ элемента $x$ , $y = f(x)$
- **Замечание**
- Образ всегда единственный, прообразов может быть несколько.

# *Образы и прообразы*

- **Пример**

  $A=\{1,2,3\}$, $B=\{e,f,g\}$

  $G=\{(1,e), (2,e)\} \subseteq A\times B$

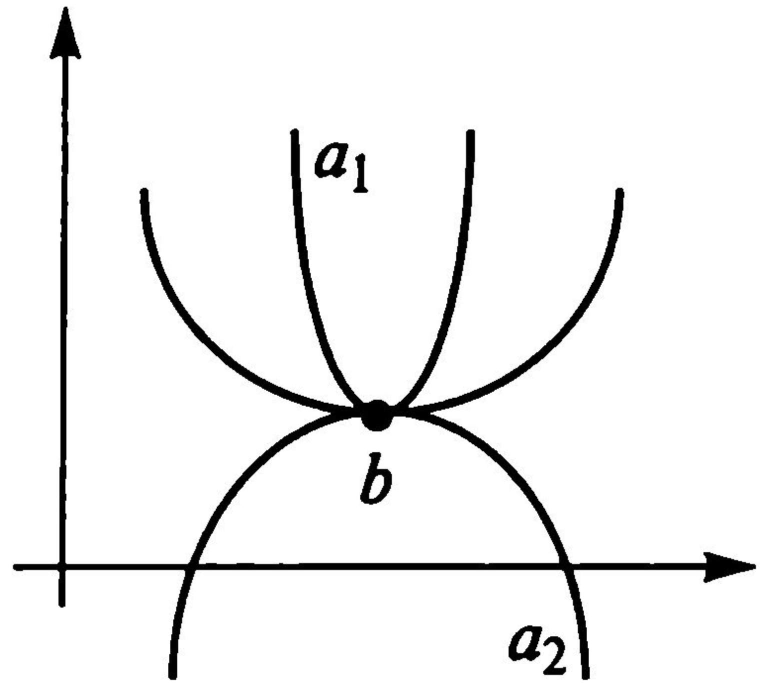


Например, если

*А — множество парабол,*

*В — множество точек плоскости,*

*R — соответствие «вершина параболы»,*

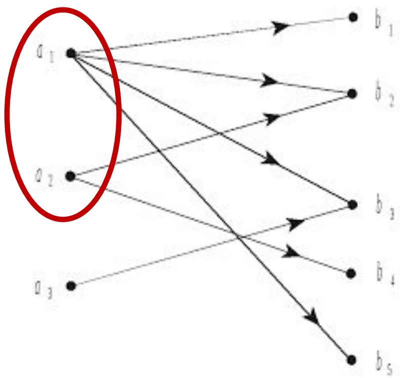


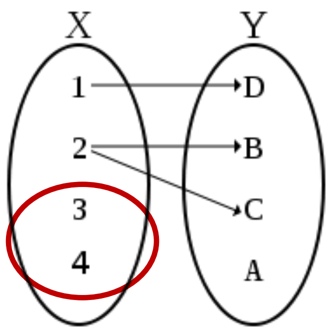

*то R(a) — точка, являющаяся вершиной параболы a,*

*а $R^{-1}(b)$ состоит из всех парабол $a_i$ с вершиной в точке b*

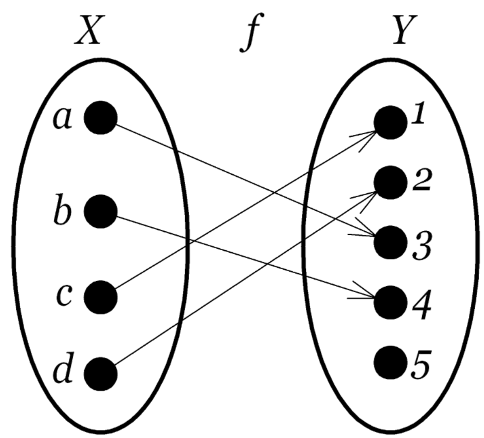
# Отображение

Отношение
Не отображение






Отношение
Отображение



# Функция. Пример.

Пусть $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, а $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Отношение $f \subseteq A \times B$ определяется как $f = \{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$. Отношение $f$ – функция $A$ из $B$, так как $f \subseteq A \times B$ и каждый из элементов $A$ присутствует в качестве первой компоненты упорядоченный пары из $f$ ровно один раз.

Область определения?

Область значений?

Образ множества $\{1,2\}$?

Прообраз множества $\{5\}$?

# Функция. Пример.

Пусть $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Функция $f : A \to B$ определена соотношением $f(x) = x^2 + 1$.

Если $E = \{1, 2\}$, то $f(E) = \{b : (a, b) \in f$ для некоторого $a$ из $E\} =$

$= \{b : b = f(a)$ для некоторого $a$ из $E\} = \{2, 5\}$

является образом $E$ при отображении $f$.

Если $F = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, то $f^{-1}(F) = \{b :$ существует $a \in A$ такое, что $f(a) = b\} = \{-1, 1, -2, 2\}$ -

является прообразом $F$, где $-1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-1) = 2$,

$1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(1) = 2$,

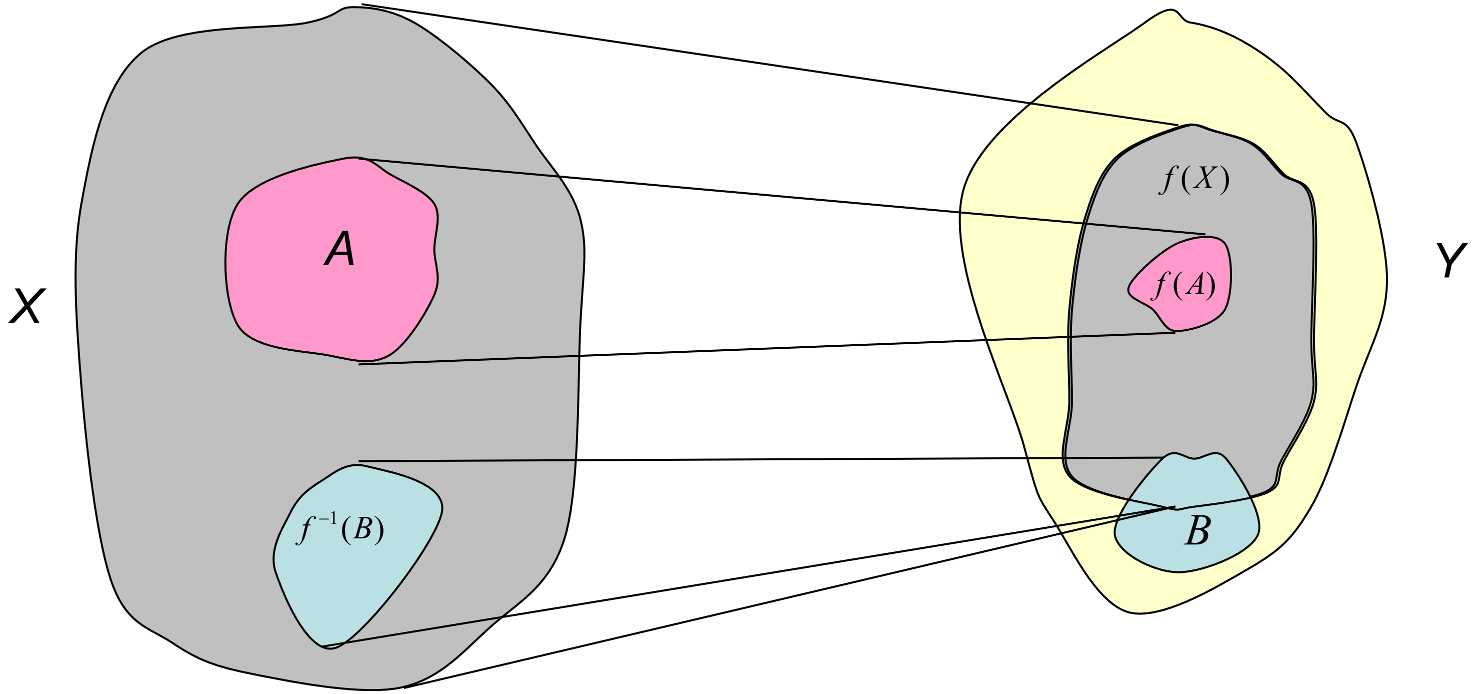
$-2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-2) = 5$

и $2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(2) = 5$.

Элементы 0, 3 и 4 не вносят никаких элементов в $f^{-1}(F)$, поскольку они не принадлежат области значений функции $f$.

# Отображение множеств

- **Определение**
- А) Пусть $A \subset X, f : X \to Y$. Образом множества $A$ называют множество $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$
- Б) Пусть $B \subset Y, f : X \to Y$. Прообразом множества *B* называют множество $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.



# Задание отображений.

*Для задания отображения необходимо указать:*

* *множество, которое отображается (область определения данного отображения D(f));*
* *множество, в (на) которое отображается данная область определения (множество значений этого отображения E(f));*
* *закон или соответствие между этими множествами, по которому для элементов первого множества (прообразов, аргументов) выбраны элементы (образы) из второго множества.*

*Приняты записи* $A \xrightarrow{f} B$ *или f: A* $\to$ *B.*

При записи $f : A \to B$ подразумевается, что отображение *f* определено *всюду* на *A*, т.е. *A* – полный прообраз отображения *f*, хотя для *B* такое свойство полноты не подразумевается.

**Однозначным** называется отображение, где каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа.

Отображения можно задавать:

а) аналитически ( с помощью формул);

б) графически ( с помощью стрелочных схем);

в) с помощью таблиц.

*Способ задания отображений в виде формул называется аналитическим. Существуют еще табличный и графический способы.*

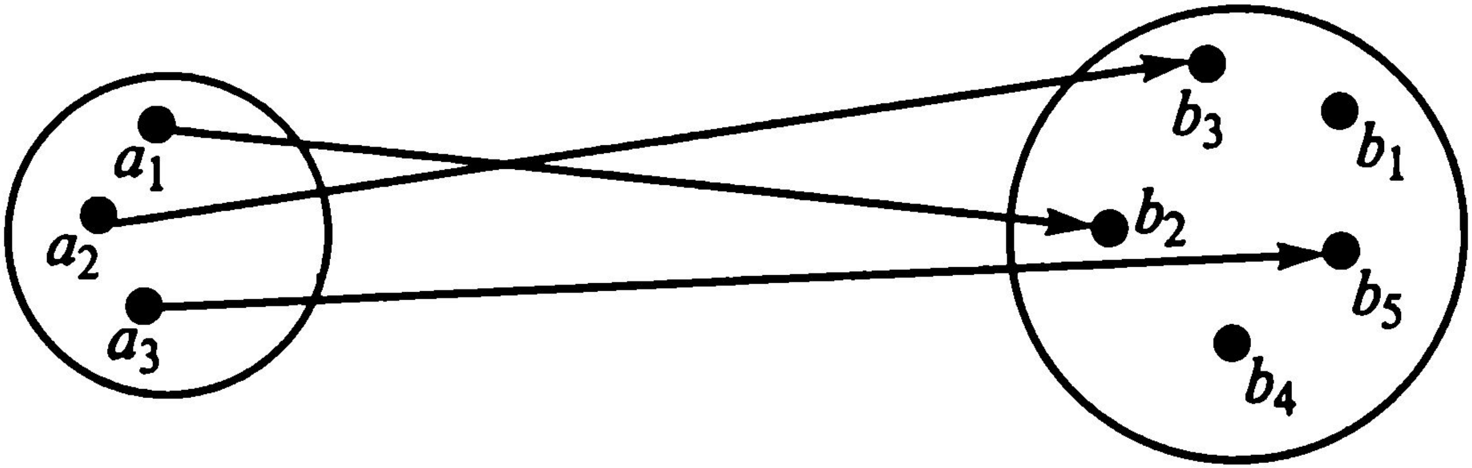
*Для задания отображения множеств табличным способом принято строить таблицу, в которой первую строку составляют элементы области определения (прообразы вида а), а вторую строку — их образы, т. е. элементы вида γ (х) при отображении γ : а  γ (а), где* $a \in A$

| $x$ | $a_1$ | $a_2$ | ... | $a_n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma(x)$ | $\gamma(a_1)$ | $\gamma(a_2)$ | ... | $\gamma(a_n)$ | ... |

*Такой способ удобен при достаточно малой мощности прообраза (не более 10).*

*Графическое представление отображения связано со стрелочными схемами (диаграммами или графами).*

*Пример графического задания отображения множества A ={$a_1$, $a_2$, $a_3$} в B = {$b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, $b_5$}.*



Отображения $f: A \to B$ и $g: A \to B$

называются равными, если $\forall x \in A \; f(x) = g(x)$.

Отображения называются однозначными, если каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа.

# Свойства отображений.

*Различают два основных вида отображений (функций): сюръективные и инъективные*

**Отображения**

*На множество*
**«сюръекция»**
Соответствие, при котором каждому элементу множества $A$ указан *единственный* элемент множества $B$, а каждому элементу множества $B$ можно указать *хотя бы* один элемент множества $A$, называется отображением множества $A$ **на** множество $B$

*Во множество*
**«инъекция»**
Соответствие, при котором каждому элементу множества $A$ соответствует *единственный* элемент множества $B$, а каждому элементу $B$ соответствует *не более* одного прообраза из $A$, называется отображением множества $A$ **во** множество $B$

# свойства

**Определения**

А) Отображение $f: X \to Y$ называется сюрьективным, если $f(X) = Y$ .

Б) Отображение $f: X \to Y$ называется инъективным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ справедлива импликация

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(т.е. «разные элементы переходят в разные»).

В) Отображение называется биективным, если оно сюръективно и инъективно.

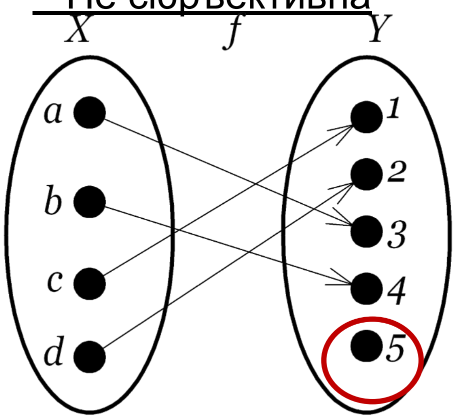
# Свойства функций.

Функция *f* называется ***отображением “на”*** или ***сюръективной функцией***, или ***сюръекцией***, если для каждого $b \in B$ существует некоторое $a \in A$ такое, что $f(a) = b$.

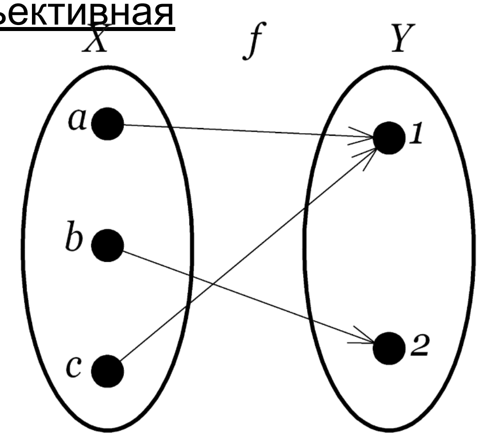
<u>Иначе</u>: всё множество B является областью значений.

Пример.

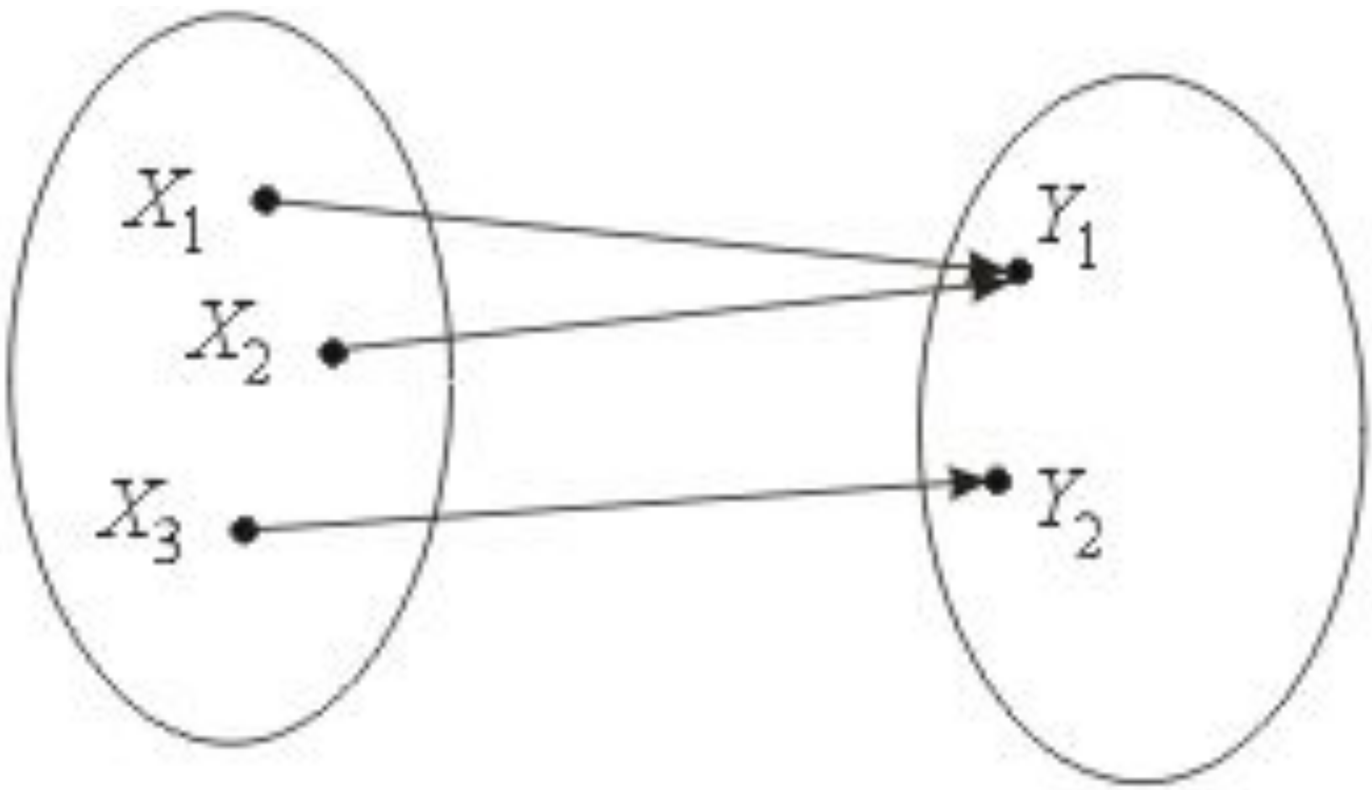
<u>Не сюръективна</u>




<u>Сюръективная</u>



# Сюръекция



# Сюръекция

***Примеры***

1) *Соответствие между множеством всех студентов и множеством групп –*

*сюръективное отображение, так как каждой группе соответствует хотя бы один студент*

2) *Соответствие между множеством студентов 1 курса Вашего института и множеством преподавателей Вашего института не является сюръекцией, так как есть преподаватели, которые не преподают на 1 курсе.*

3) *Является ли сюръекцией соответствие между множеством предметов в Вашей зачетной книжке и множеством оценок* $\{3,4,5\}$

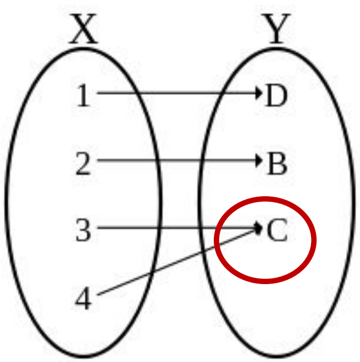
# Свойства функций.

Функция $f : A \to B$ называется ***инъективной***, или ***инъекцией***, если из $f(a) = f(a')$ следует $a=a'$.

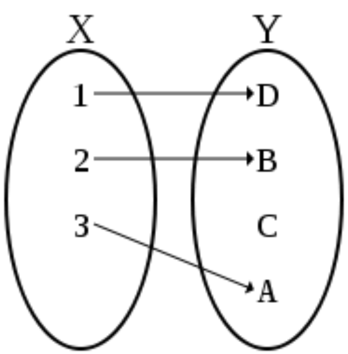
Иначе: для любого элемента из области значений существует только 1 прообраз.

Пример.

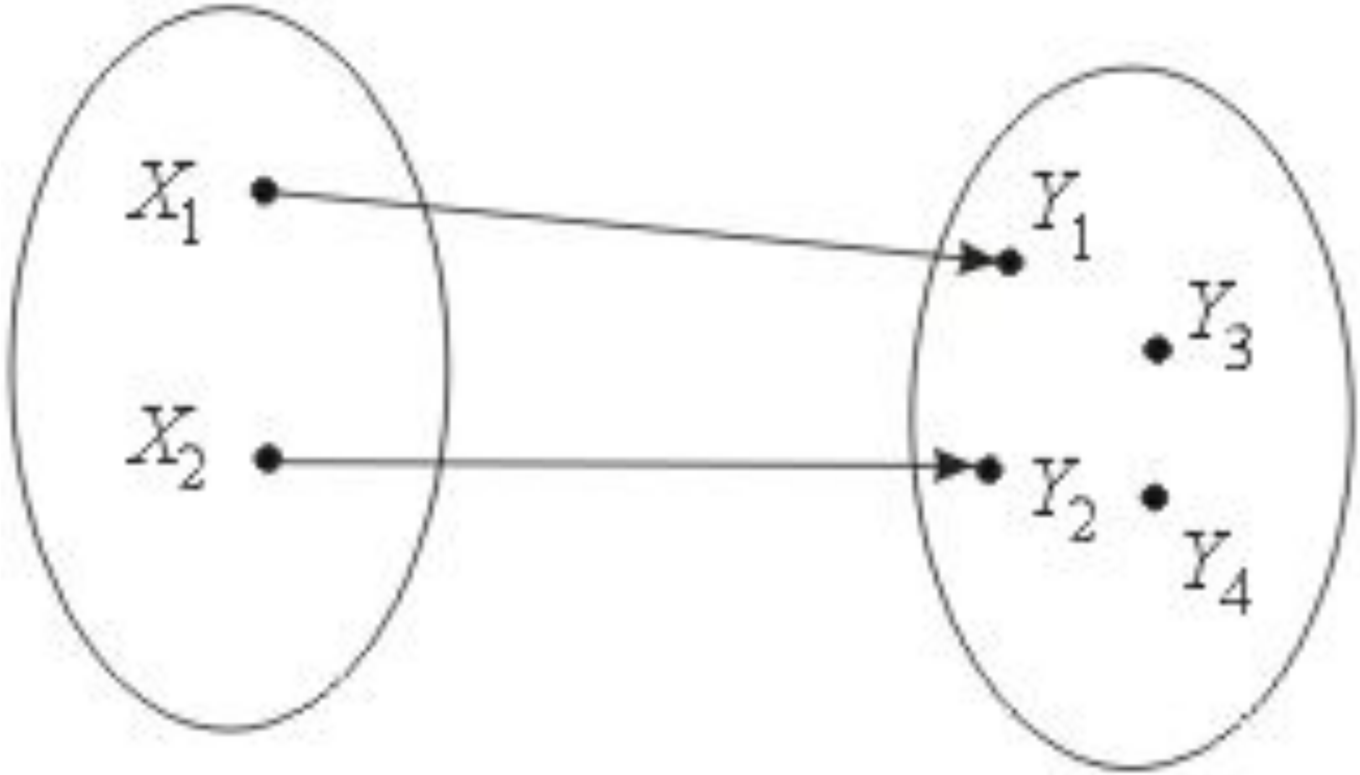
Не инъективна




Инъективная



# Инъекция



# Инъекция

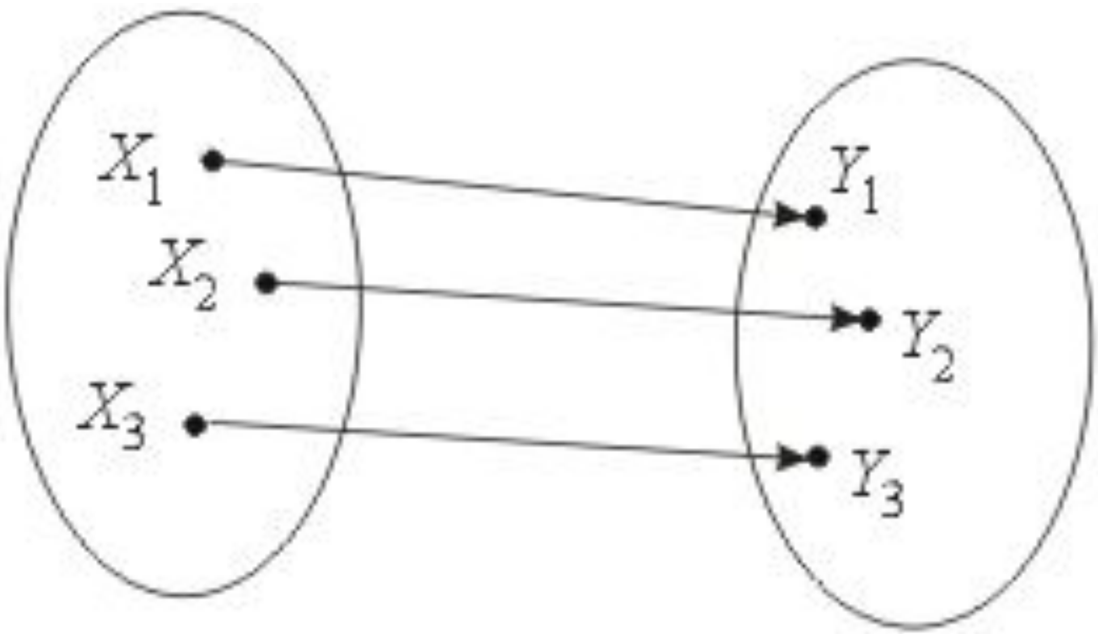
***Примеры***

1) *Отображение множества студентов данной аудитории на множество*
*стульев - инъекция, так как разные студенты сидят на разных стульях.*

*2) Отображение множества детей в Вашем городе*
*на множество имен не является инъекцией, так как есть дети,*
*имеющие одинаковые имена*

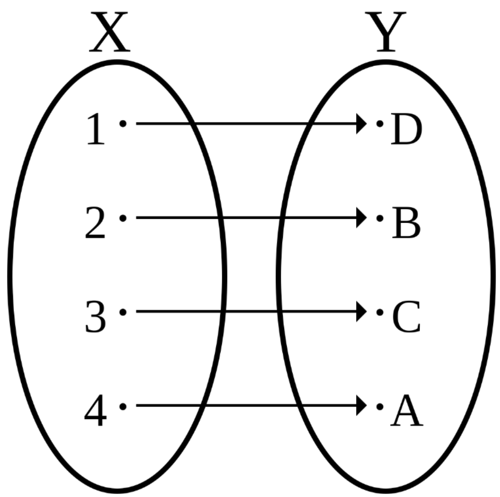
*3) Является ли инъекцией отображение множества людей,*
*проживающих в Вашем доме на множество номеров квартир?*
*Почему?*

*Отображение множества А* ***на*** *множество В, при котором каждому элементу множества В соответствует единственный элемент множества А, называется* ***взаимно-однозначным соответствием*** *между двумя множествами, или* ***биекцией***.



# Свойства функций.

Функция, которая является одновременно и инъективной, и сюръективной, называется ***взаимно однозначным соответствием***, или ***биекцией***.



# Биекция

***Примеры***

1) *Соответствие между множеством государств Европы и множеством*
*европейских столиц - биекция*

*2) Соответствие между множеством страниц учебника по математике и*
*множеством номеров этих страниц - биекция*

*3) Будет ли биекцией соответствие между множеством четных и нечетных чисел*

# Свойства функций. Пример.

Пусть $A$ и $B$ - множества действительных чисел и $f : A \to B$ определена таким образом: $f(x) = 3x + 5$.

Функция $f$ инъективна, так как если $f(a) = f(a')$, тогда $3a + 5 = 3a' + 5 \Rightarrow a = a'$.

Функция $f$ является также сюръективной:

Для любого действительного числа $b$ требуется найти такое $a$, что $f(a) = b = 3a + 5$. $\Rightarrow a = (1/3)(b - 5)$, тогда $f(a) = b$.

Поэтому $f$ представляет собой взаимно однозначное соответствие.

# Свойства функций. Пример.

Пусть A и B – множество действительных чисел, и функция $f : A \to B$ определена как $f(x) = x^2$. Функция f не является инъективной, так как $f(2) = f(-2)$, но $2 \neq -2$.

Функция $f$ не является также и сюръективной, так как не существует такого действительного числа $a$, для которого $f(a) = -1$.

Если $A$ и $B$ - множество неотрицательных действительных чисел, тогда $f$ является как инъективной, так и сюрьективной.

# Обратная функция.

Пусть $f$ – функция из множества $A$ во множество $B$, то есть $f : A \to B$ .

$f \subseteq A \times B$, так как $f$ является отношением на $A \times B$.

***Обратное отношение*** $f^{-1} \subseteq B \times A$ определяется как

$$f^{-1} = \{(b, a): (a, b) \in f\}.$$

При этом отношение $f^{-1}$ может не быть функцией из $B$ в $A$, даже если $f$ является функцией из $A$ в $B$.

Если $f^{-1}$ действительно является функцией, то ее называют обращением функции $f$, или ее ***обратной функцией***.

Пример. Функции $f(x) = 3x + 6$ и $f(x) = x^2$ имеют обратные функции?

# Обратная функция. Пример.

Требуется найти обратную функцию для $y = 3x + 6$.

Обращая функцию, получается

$$\{(y, x): y = 3x + 6\}.$$

Это тоже самое, что

$$\{(x, y): x = 3y + 6\}.$$

Решение этого уравнения относительно y:

$$\mathbf{\{(x, y): y = (x - 6) / 3\}.}$$

Два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить биективное отображение.

Это обозначается следующим образом:

$$A \sim B.$$

Пусть множество А отображается взаимно-однозначно на множество В, т.е f:A□B. Тогда отображение $f^{-1}$, при котором каждому элементу множества В ставится в соответствие его прообраз из множества А, называется **обратным отображением** для f и записывается

$B \xrightarrow{f^{-1}} A$ или $f^{-1}$:B□A.

Так как одному образу при биекции соответствует в точности один прообраз, обратное отображение будет определено всюду на В и однозначно (отсюда название).

Для биекции принята запись: $A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B.$

Если между элементами множеств установлено взаимно-однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковое количество элементов.

Говорят, что они равносильны, равномощны, или эквивалентны.

**Рассмотрим примеры отображений**.

1) *Каждому действительному числу поставим в соответствие его квадрат.*

*Отображение* $x \to x^2$ *не является взаимно-однозначным соответствием, так как для любого образа* $y=x^2$ *можно найти два прообраза в области определения:*

$x = +\sqrt{y}$ *и* $x = -\sqrt{y}$.

***Рассмотрим примеры отображений.***

*2) Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов английского и русского языков. Такое соответствие не является однозначным, так как каждому английскому понятию соответствуют различные варианты перевода на русский язык, и наоборот.*

***Рассмотрим примеры отображений*.**

*3) Различные виды кодирования (азбука Морзе, представление чисел в различных системах счисления, шифрованные сообщения) являются чаще всего примерами взаимно-однозначного соответствия между множествами.*

*Отображение $e: A \to A$ называется* ***тождественным*** *(**единичным**), если каждому аргументу оно ставит в соответствие себя.*

*Очевидно, такое отображение можно задать на любом непустом множестве.*

*Если $e(x) = x$, то $E(e) = D(e) = A$.*

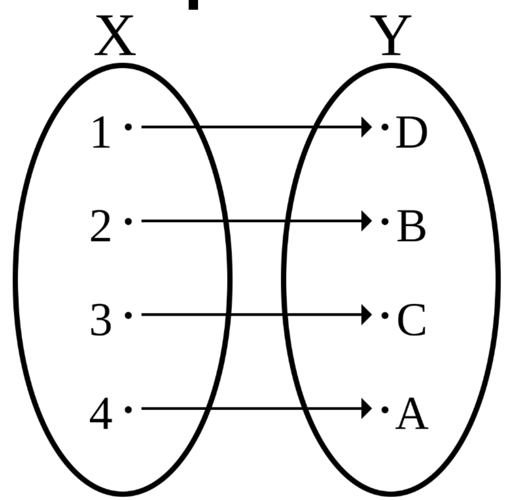
*Очевидно, что отображение, обратное единичному, также единичное.*

# Обратная функция. Теорема 1.

1) Если $f : A \to B$ является биекцией. То обратное отношение $f^{-1}$ является функцией из $B$ в $A$, причем биекцией.

2) Обратно, для $f : A \to B$, если $f^{-1}$ – функция из $B$ в $A$, то $f$ является биекцией.

# Обратная функция. Теорема 2.




Если $f : A \to B$ является биекцией, то

а) $f\,(f^{-1}(b)) = b$ для любого $b$ из $B$;

б) $f^{-1}\,(f\,(a)) = a$ для любого $a$ из $A$.

Доказательство:

Пусть $b \in B$ и $a = f^{-1}(b)$. Тогда $f(a) = b$.

Поскольку $a = f^{-1}(b)$), то $f\,(f^{-1}(b)) = f(a) = b$.

Аналогично доказывается

$$f^{-1}\,(f\,(a)) = a \text{ для любого } a \text{ из } A.$$

# Обратная функция. Теорема 3.

Если $f : A \to A$ и $I$ - тождественная функция на $A$,

то $I \circ f = f \circ I = f$ .

Если для f существует обратная функция,

то $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

Прим. Тождественная функция – это функция, переводящая элемент сам в себя. Например, $f(x) = x$.

# Композиция функций.

*Пусть заданы отображения* $f_1$*: A□B и* $f_2$*: B□C. Отображение f: A□C, при котором каждому элементу* $x \in A$ *соответствует определенный элемент* $z \in C$*, такой, что*

$z = f_2(y)$*, где* $y = f_1(x)$*, называется произведением, композицией, или суперпозицией отображений*

$f_1$ *и* $f_2$*.*

# Композиция функций.

**Теорема**:

Пусть $g : A \to B$ и $f : B \to C$.

Тогда

а) композиция $f \circ g$ есть отображение из $A$ в $C$. Обозначение $f \circ g : A \to C$;

б) если $a \in A$, то $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

# Композиция функций. Примеры.

- Пусть $f : A \to B$ , $g : B \to C$ и $h : C \to D$.

Тогда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, то есть *композиция двух функций ассоциативна*.

**Пример**. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x + 3$ - функции, заданные на множестве действительных чисел.

Функция $$f(g(x)) = f(x+3) = \sqrt{x+3}$$

Функция $$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 3$$

# Композиция функций. Теорема.

Пусть $g : A \to B \quad f : B \to C$ . Тогда

а) если $g$ и $f$ - сюръекции $A$ на $B$ и $B$ на $C$ соответственно, то $f \circ g$ есть сюръекция $A$ на $C$. <u>Иначе</u>: композиция двух сюръекций – сюръекция.

б) если $g$ и $f$ - инъекции, то $f \circ g$ - также инъекция.

<u>Иначе</u>: Композиция двух инъекций – инъекция.

в) если $g$ и $f$ - биекции, то $f \circ g$ - также биекция.

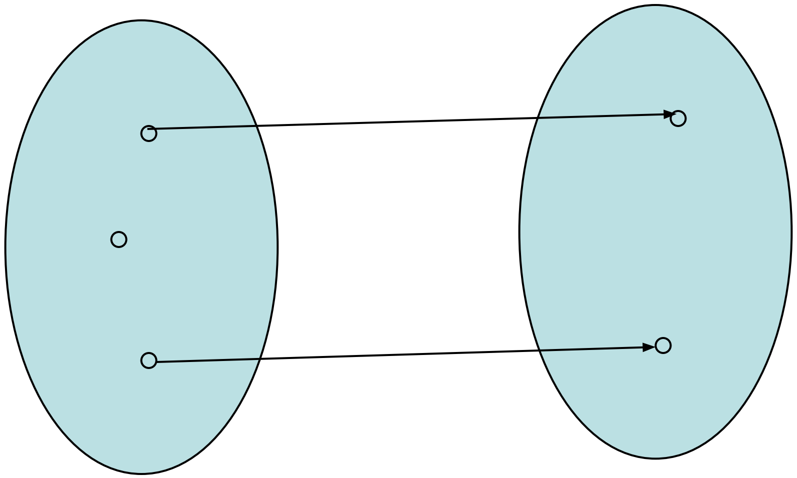
<u>Иначе</u>: Композиция двух биекций – биекция.

г) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

# Повторение

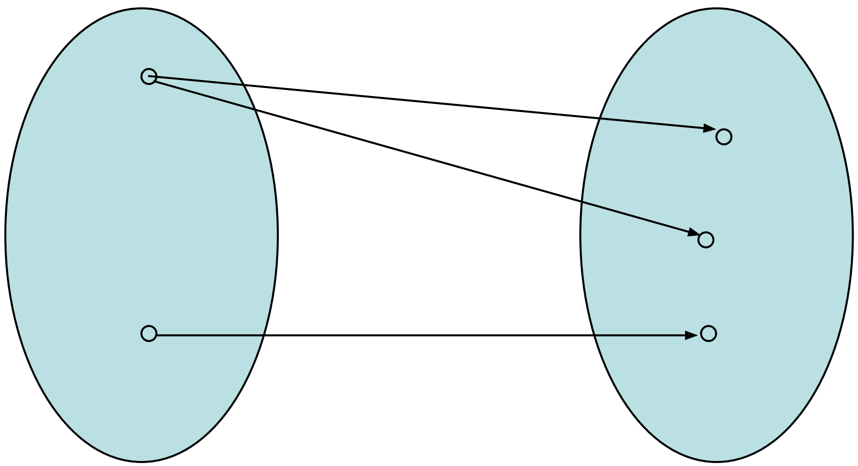
# Примеры

*3)*



*Функциональное бо*
*Не отображение*

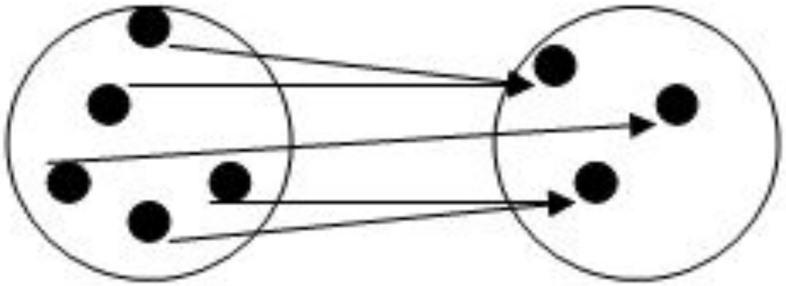
*4)*



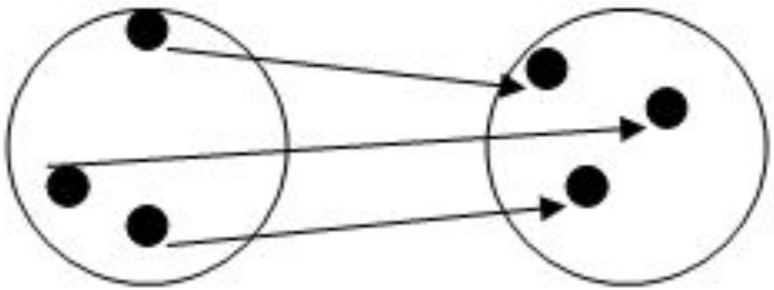
*Не функциональное бо*
*Не отображение*

# Классификация отображений по мощности

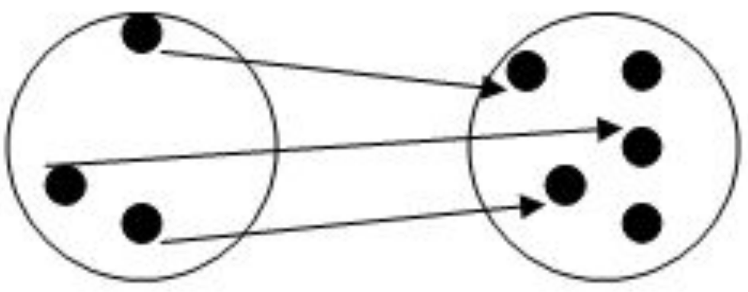
- На множество «сюръекция»;



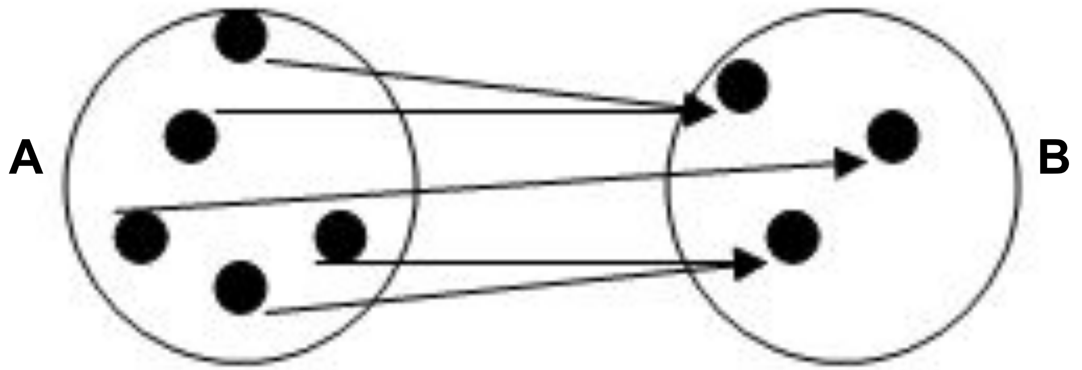
- На множество «биекция»;



- Во множество «инъекция».

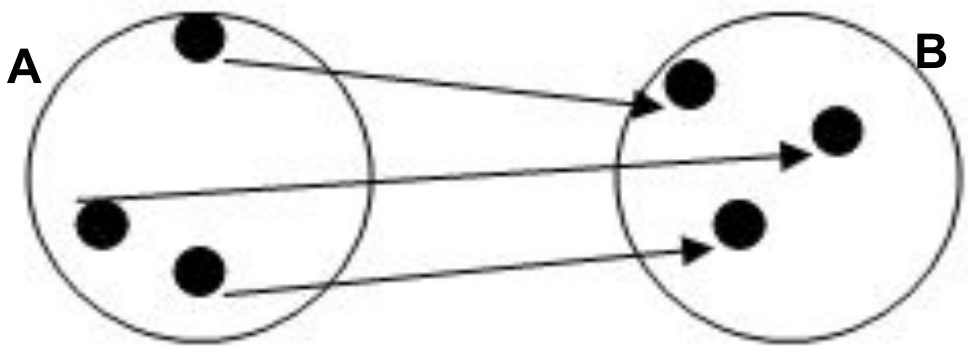


# На множество - «сюръекция»



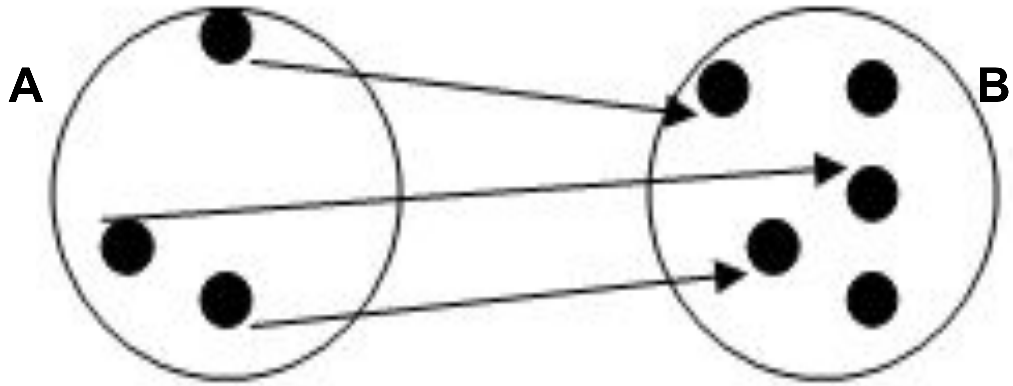

Соответствие. при котором каждому элементу множества *A* указан *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу множества *B* можно указать *хотя бы* один элемент множества *A*, называется отображением множества *A* **на** множество *B*

# На множество - «биекция»




Отображение множества А **на** множество В, при котором каждому элементу множества В соответствует единственный элемент множества А, называется **взаимно-однозначным** соответствием между двумя множествами, или **биекцией**.

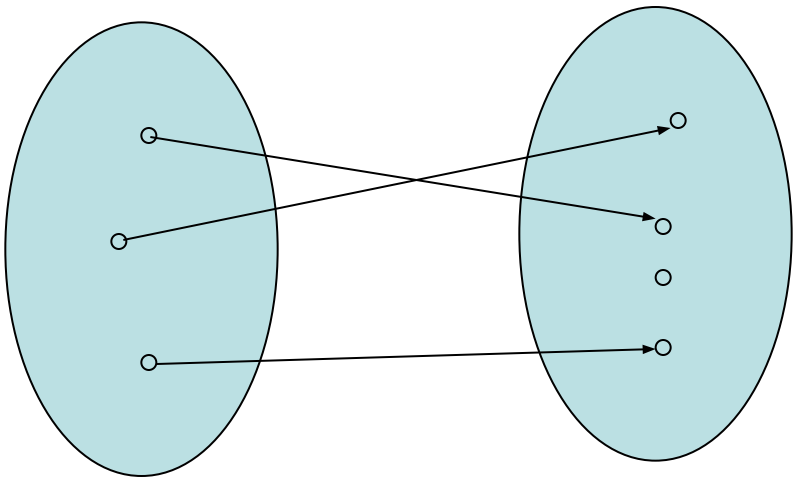
Во множество - «инъекция»




Соответствие. при котором каждому элементу множества *A* указан *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу *B* соответствует *не более* одного прообраза из *A*, называется отображением множества *A* **во** множество *B.*

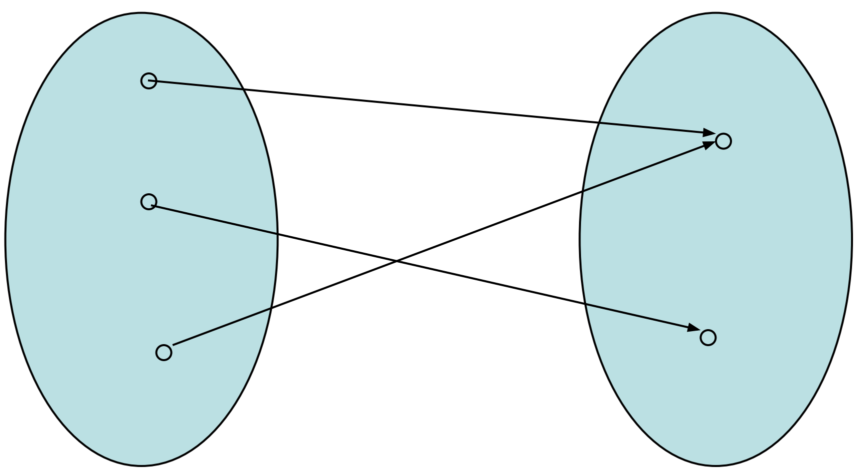
# Примеры

*1)*



*Инъективное, не сюръективное отображение*

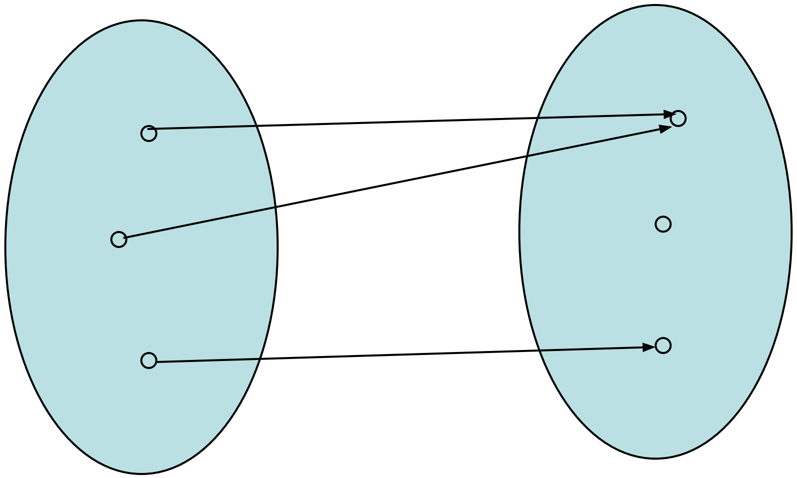
*2)*



*Не инъективное, сюръективное отображение*

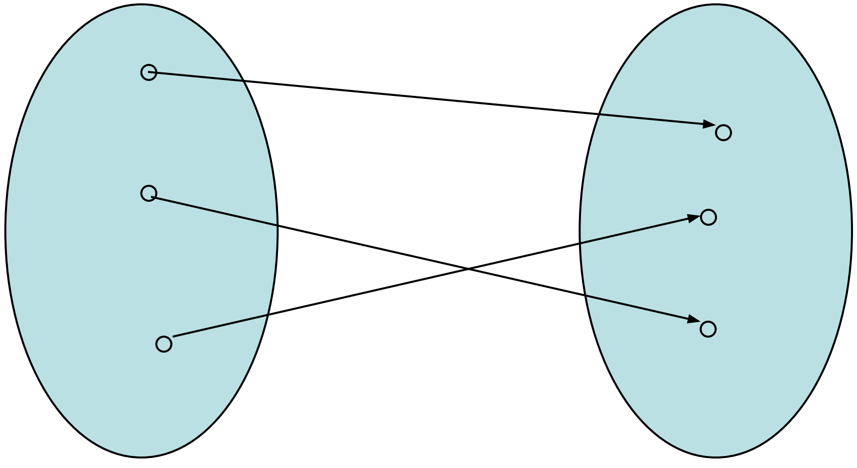
# Примеры

*5)*



*Не инъективное, не сюръективное отображение*

*6)*



*Инъективное, сюръективное отображение – биекция*

# Примеры

- 7) Список студентов – биекция между номером и фамилией.
- 8) $f: X \to Y$, где $X$ - множество экзаменов в сессии, $Y$ - множество оценок.

  $f$ - не инъекция, не сюръекция.
- 9) Определить множества, на которых отображение $f(x) = x^2$ является биекцией.

  $R \to R$ не сюръекция, не инъекция,

  $R \to [0, +\infty)$ сюръекция, не инъекция,

  $[0, \infty) \to [0, \infty)$ сюръекция, инъекция – биекция.

# Пример

*Соответствие* $G=\{ (x,y) \mid y = \exp x \} \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$

- ***всюду определено***: $Pr_1 G = (-\infty; \infty) = \mathbf{R}$
- ***функционально***: *каждому прообразу соответствует единственный образ*
- *не* ***сюрьективно***: $Pr_2 G = (0; \infty) \neq \mathbf{R}$
- ***инъективна***: *образ имеет единственный прообраз*
- *не является* ***биекцией***
- ***функция***, *так как функционально*
- ***отображение***, *так как всюду определено и функционально*