Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ 4

Соответствия между множествами.

Отображения. Функции.

Соответствия между множествами

Пары (a_i, b_j) задают **соответствие** между множествами *A* и *B*, если указано правило *R*, по которому для элемента множества *A* выбирается элемент из множества *B*.

Пусть для некоторого элемента *a* множества *A* поставлен в соответствие некоторый элемент *b* из множества *B*, который называется **образом** элемента *a* и записывается $b = R(a)$. Тогда $a = R^{-1}(b)$ - **прообраз** элемента $b \in B$.

Соответствия

Соответствие между множествами A и B определяется заданным правилом, согласно которому элементам одного множества сопоставляются элементы другого множества.

Соответствием между множествами A и B называется подмножество ϕ их прямого произведения:

$$\phi \subset A \times B \quad и \quad \phi : A \to B$$

Про элементы $x \in A$ и $y \in B$ говорят, что они находятся в соответствии ϕ, если пара $(x,y) \in \phi$.

$$\phi : x \to y, \quad x \in A, y \in B.$$

Если $(x, y) \in \phi$, то иногда пишут $x \phi y$

’y называют образом x, а x - прообразом y.

Пусть $\phi \subset A \times B$ ***и*** $\phi : A \rightarrow B$, ***тогда***

Область определения соответствия (domain): $D(\phi) = \{ a \in A \mid \exists b \in B: (a,b) \in \phi \} \subset A$

Область значений соответствия (range): $R(\phi) = \{ b \in B \mid \exists a \in A: (a,b) \in \phi \} \subset B$

Пример: ***Пусть даны множества A и B***

$A = \{ 2, 3, 8 \}, B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$,

$\phi = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$

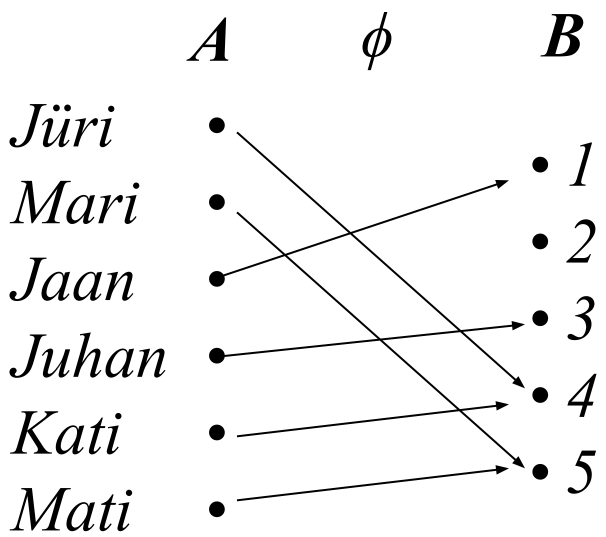
Тогда $D(\phi) = \{2, 3\} \subset A$ ***и*** $R(\phi) = \{2, 3, 4, 6\} \subset B$

Пример:

Пусть дано множество студентов:
A = {Jüri, Mari, Jaan, Juhan, Kati, Mati}
и множество возможных оценок:
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\phi : A \rightarrow B$ соответствие между множествами A и B,
которое сопоставляет каждому студенту его оценку.

Диаграмма (граф) соответствия:

ϕ = { (Jüri, 4), (Mari, 5), (Jaan, 1), (Juhan, 3), (Kati, 4), (Mati, 5)}



Пример:

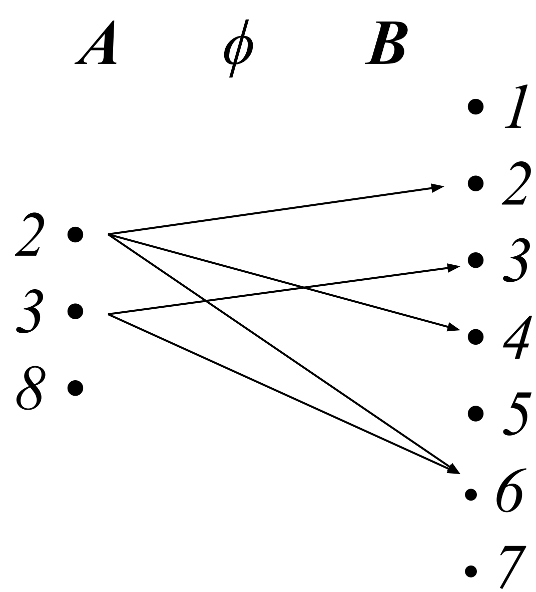
Пусть даны множества A и B

A = { 2, 3, 8 }

B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }.

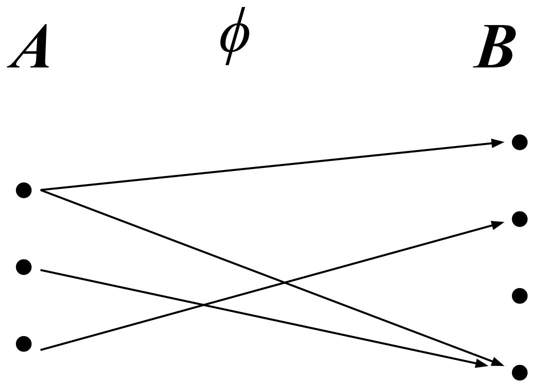
Соответствием между множествами A и B «число из A есть делитель числа из B» представляется множеством

$\phi = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$,

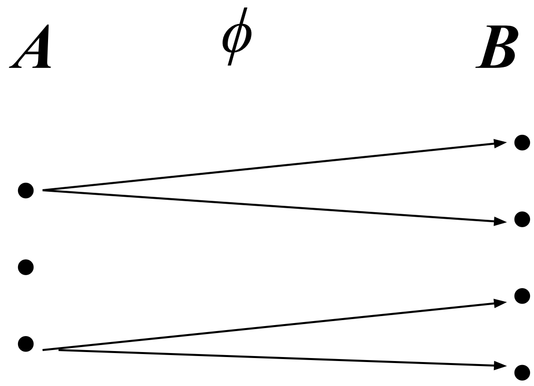


Классификация соответствий:

Соответствие $\phi \subset A \times B$ ***всюду определенное, если*** $D(\phi) = A$.

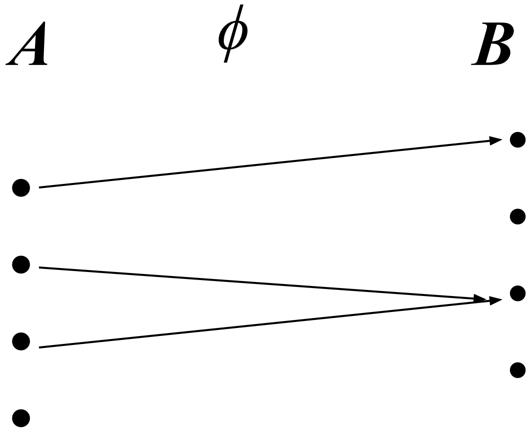


Соответствие $\phi \subset A \times B$ ***на всю область значений определенное,***
если $R(\phi) = B$.



Соответствие $\phi \subset A\times B$ ***однозначное,***
если

$$\forall\, a \in D(\phi)\ \ \exists!\, b \in R(\phi) : (a,b) \in \phi$$



Свойство: ***если соответствие*** $\phi \subset A\times B$ ***– однозначное, то***

$$\phi^{-1} \circ \phi = \{ (b,b) \mid b \in B \}$$

Образ множества *A* при соответствии *R* называется **множеством значений** этого соответствия и обозначается $R(A)$, если $R(A)$ состоит из образов всех элементов множества A:

$$R(A) = \{b \mid \forall a \in A, \exists b \in B : b = R(a)\}.$$

Прообраз множества *B* при некотором соответствии *R* называют **областью определения** этого соответствия и обозначают $R^{-1}(B)$ т.е.

$$R^{-1}(B) = \{a \mid \forall b \in B, \exists a \in A : R(a) = b\}.$$

R^{-1} является **обратным** соответствием для *R*.

Для описания соответствий между множествами используют понятие отображения (функции) одного множества на другое.

Функциональные БО

Бинарное отношение $\mathrm{f} \subseteq X \times Y$ называется функциональным, если каждому элементу x из X такому, что $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{f}$ соответствует один и только один элемент y из Y.

Все элементы (упорядоченные пары) функционального бинарного отношения имеют различные первые координаты.
Отличительной особенностью матрицы функционального отношения является то, что в каждом ее столбце содержится не более одного единичного элемента. Граф функционального отношения характеризуется тем, что из каждой вершины может выходить только одна дуга.

Функция (отображение)

- **Определение** $f : X \to Y$
- Всюду определенное функциональное отношение называется называется ***функцией*** или ***отображением*** множества *X* в *Y*: то *есть каждому элементу* $x \in X$ *ставится в соответствие единственный элемент* $y \in Y$. $(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X})\ (\exists y \in Y)\ x\mathrm{fy}$
- x - прообраз элемента y , $x = f^{-1}(y)$.
- y - образ элемента x , $y = f(x)$

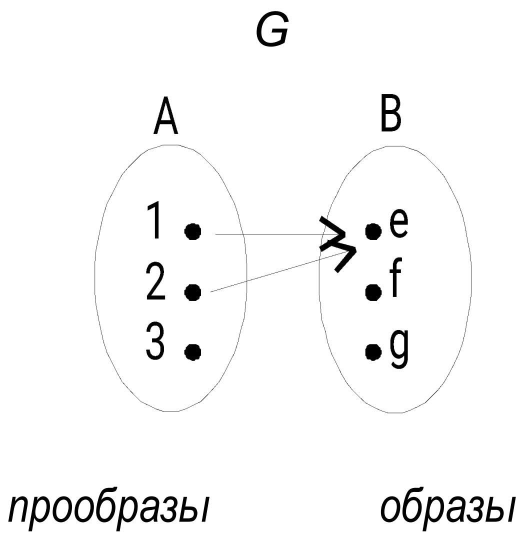
- **Замечание**
- Образ всегда единственный, прообразов может быть несколько.

Образы и прообразы

- **Пример**

  A={1,2,3}, B={e,f,g}

  G={(1,e), (2,e)} $\subseteq$ A×B

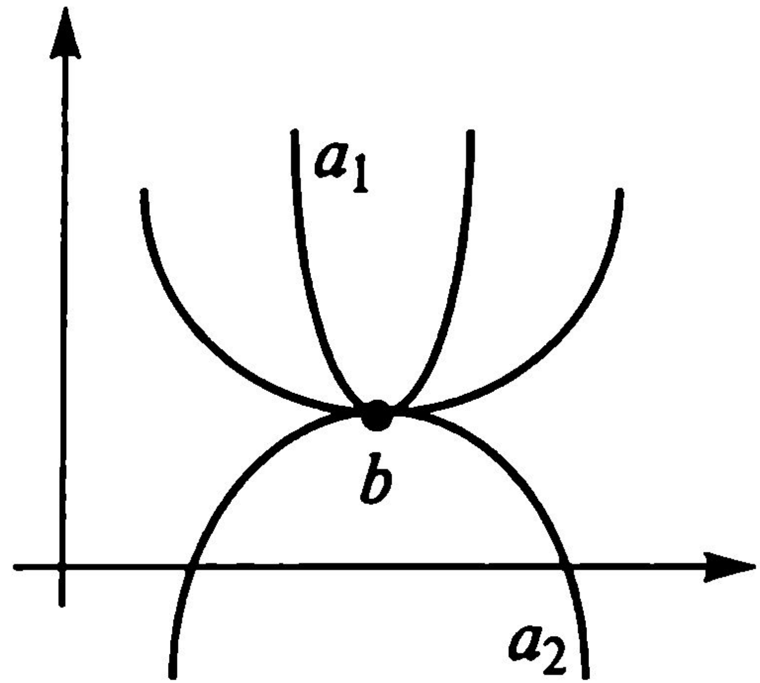


Например, если

A — множество парабол,

B — множество точек плоскости,

R — соответствие «вершина параболы»,

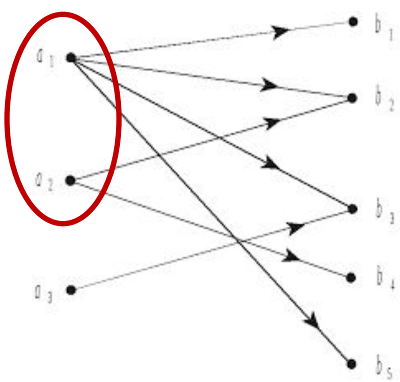


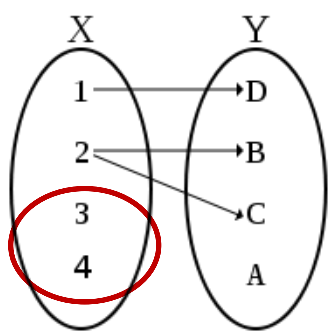
то R(a) — точка, являющаяся вершиной параболы a,

а $R^{-1}(b)$ состоит из всех парабол a_i с вершиной в точке b

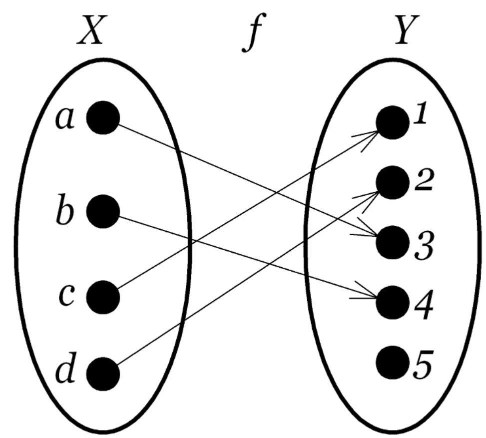
Отображение

Отношение
Не отображение





Отношение
Отображение



Функция. Пример.

Пусть $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, а $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Отношение $f \subseteq A \times B$ определяется как $f = \{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$. Отношение f – функция A из B, так как $f \subseteq A \times B$ и каждый из элементов A присутствует в качестве первой компоненты упорядоченный пары из f ровно один раз.

Область определения?

Область значений?

Образ множества $\{1,2\}$?

Прообраз множества $\{5\}$?

Функция. Пример.

Пусть $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Функция $f : A \to B$ определена соотношением $f(x) = x^2 + 1$.

Если $E = \{1, 2\}$, то $f(E) = \{b : (a, b) \in f$ для некоторого a из $E\} =$

$= \{b : b = f(a)$ для некоторого a из $E\} = \{2, 5\}$

является образом E при отображении f.

Если $F = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, то $f^{-1}(F) = \{b :$ существует $a \in A$ такое, что $f(a) = b\} = \{-1, 1, -2, 2\}$ -

является прообразом F, где $-1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-1) = 2$,

$1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(1) = 2$,

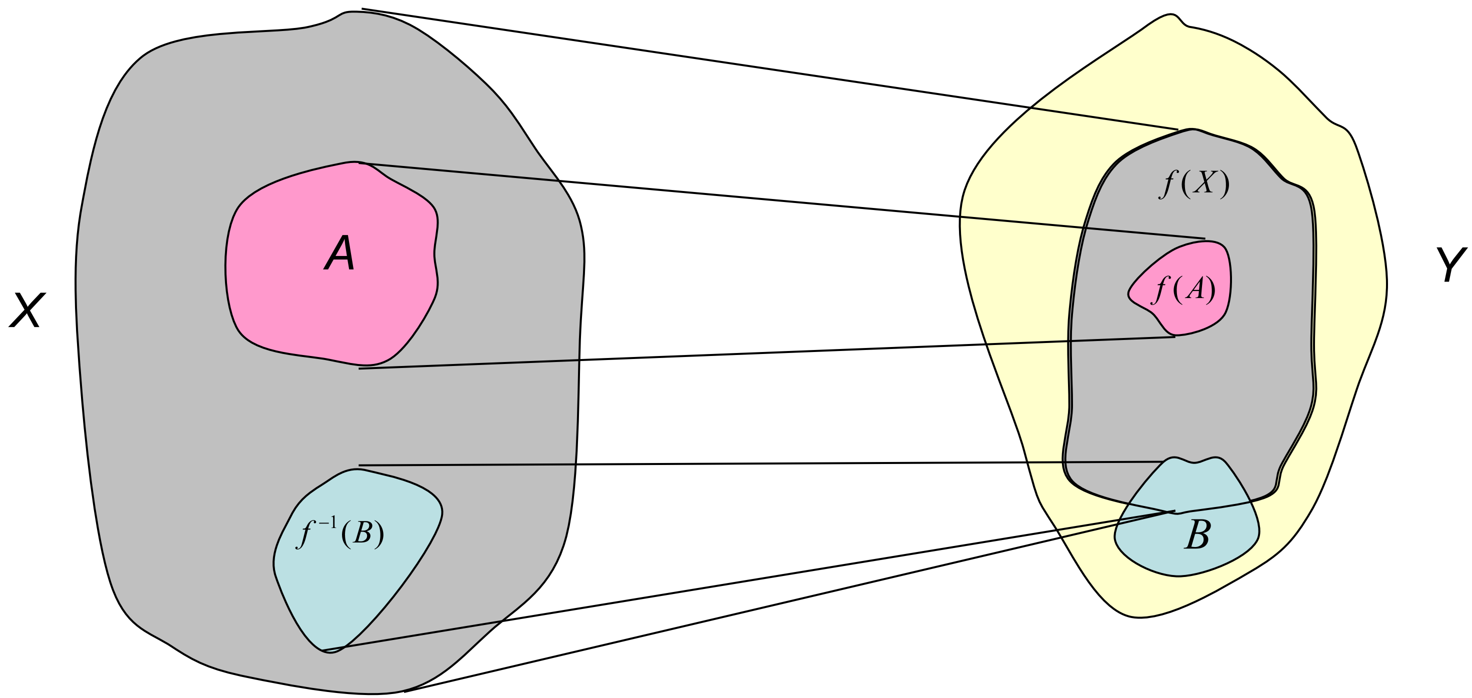
$-2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-2) = 5$

и $2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(2) = 5$.

Элементы 0, 3 и 4 не вносят никаких элементов в $f^{-1}(F)$, поскольку они не принадлежат области значений функции f.

Отображение множеств

- **Определение**
- А) Пусть $A \subset X, f : X \to Y$. Образом множества A называют множество $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$
- Б) Пусть $B \subset Y, f : X \to Y$. Прообразом множества *B* называют множество $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.



Задание отображений.

Для задания отображения необходимо указать:

- *множество, которое отображается (область определения данного отображения D(f));*
- *множество, в (на) которое отображается данная область определения (множество значений этого отображения E(f));*
- *закон или соответствие между этими множествами, по которому для элементов первого множества (прообразов, аргументов) выбраны элементы (образы) из второго множества.*

Приняты записи $A \xrightarrow{f} B$ *или f: A → B.*

При записи $f : A \to B$ подразумевается, что отображение *f* определено *всюду* на *A*, т.е. *A* – полный прообраз отображения *f*, хотя для *B* такое свойство полноты не подразумевается.

Однозначным называется отображение, где каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа.

Отображения можно задавать:

а) аналитически (с помощью формул);

б) графически (с помощью стрелочных схем);

в) с помощью таблиц.

Способ задания отображений в виде формул называется *аналитическим*. *Существуют еще табличный и графический способы.*

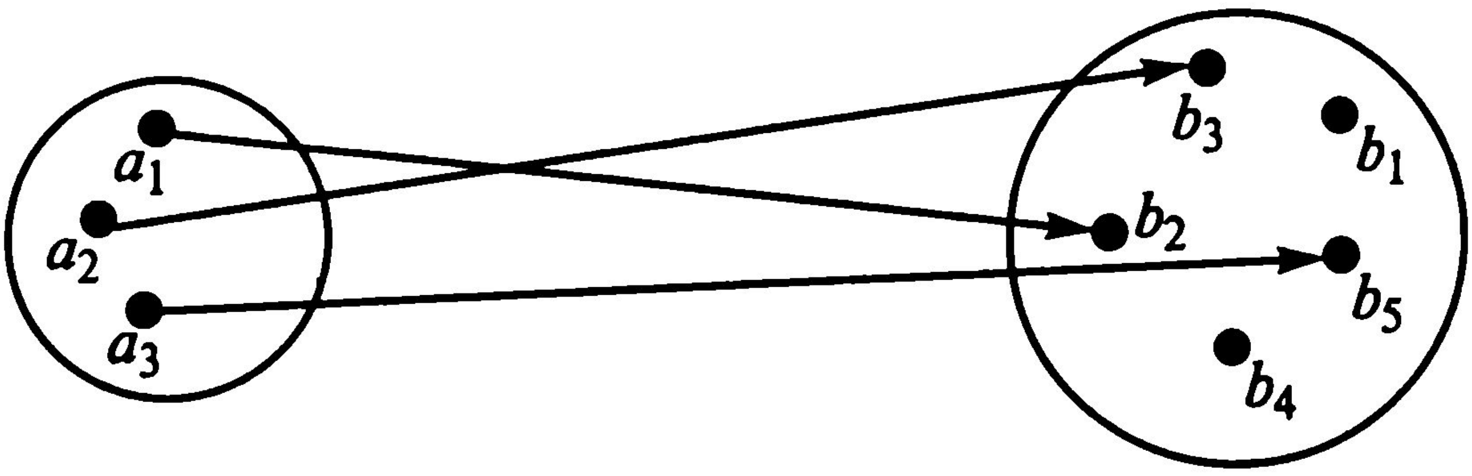
Для задания отображения множеств *табличным* *способом принято строить таблицу, в которой первую строку составляют элементы области определения (прообразы вида а), а вторую строку — их образы, т. е. элементы вида γ (x) при отображении γ : a □ γ (a), где* $a \in A$

x	a_1	a_2	...	a_n	...
$\gamma(x)$	$\gamma(a_1)$	$\gamma(a_2)$	...	$\gamma(a_n)$	...

Такой способ удобен при достаточно малой мощности прообраза (не более 10).

Графическое представление отображения связано со стрелочными схемами (диаграммами или графами).

Пример графического задания отображения множества $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ в $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.



Отображения f: A □ B и g: A □ B

называются равными, если $\forall x \in A\ f(x) = g(x)$.

Отображения называются однозначными, если каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа.

Свойства отображений.

Различают два основных вида отображений (функций): сюръективные и инъективные

Отображения

На множество
«сюръекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества *A* указан *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу множества *B* можно указать *хотя бы* один элемент множества *A*, называется отображением множества *A* **на** множество *B*

Во множество
«инъекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества *A* соответствует *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу *B* соответствует *не более* одного прообраза из *A*, называется отображением множества *A* **во** множество *B*

свойства

Определения

А) Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным, если $f(X) = Y$.

Б) Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ справедлива импликация

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(т.е. «разные элементы переходят в разные»).

В) Отображение называется биективным, если оно сюръективно и инъективно.

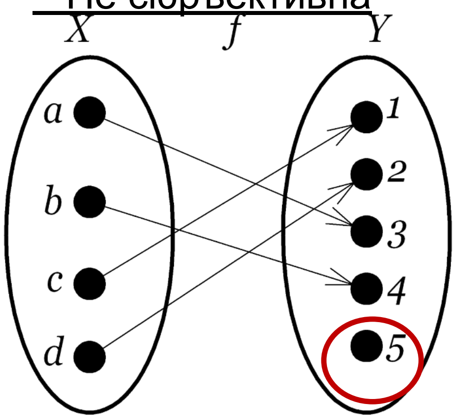
Свойства функций.

Функция *f* называется ***отображением “на”*** или ***сюръективной функцией***, или ***сюръекцией***, если для каждого $b \in B$ существует некоторое $a \in A$ такое, что $f(a) = b$.

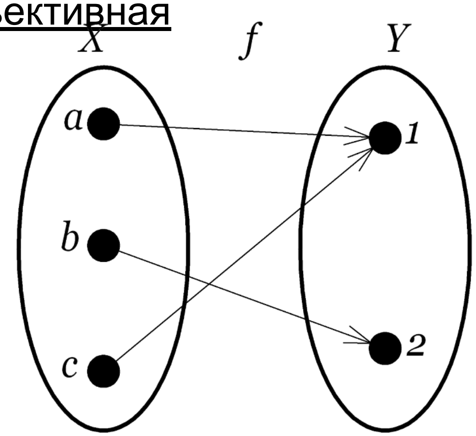
Иначе: всё множество B является областью значений.

Пример.

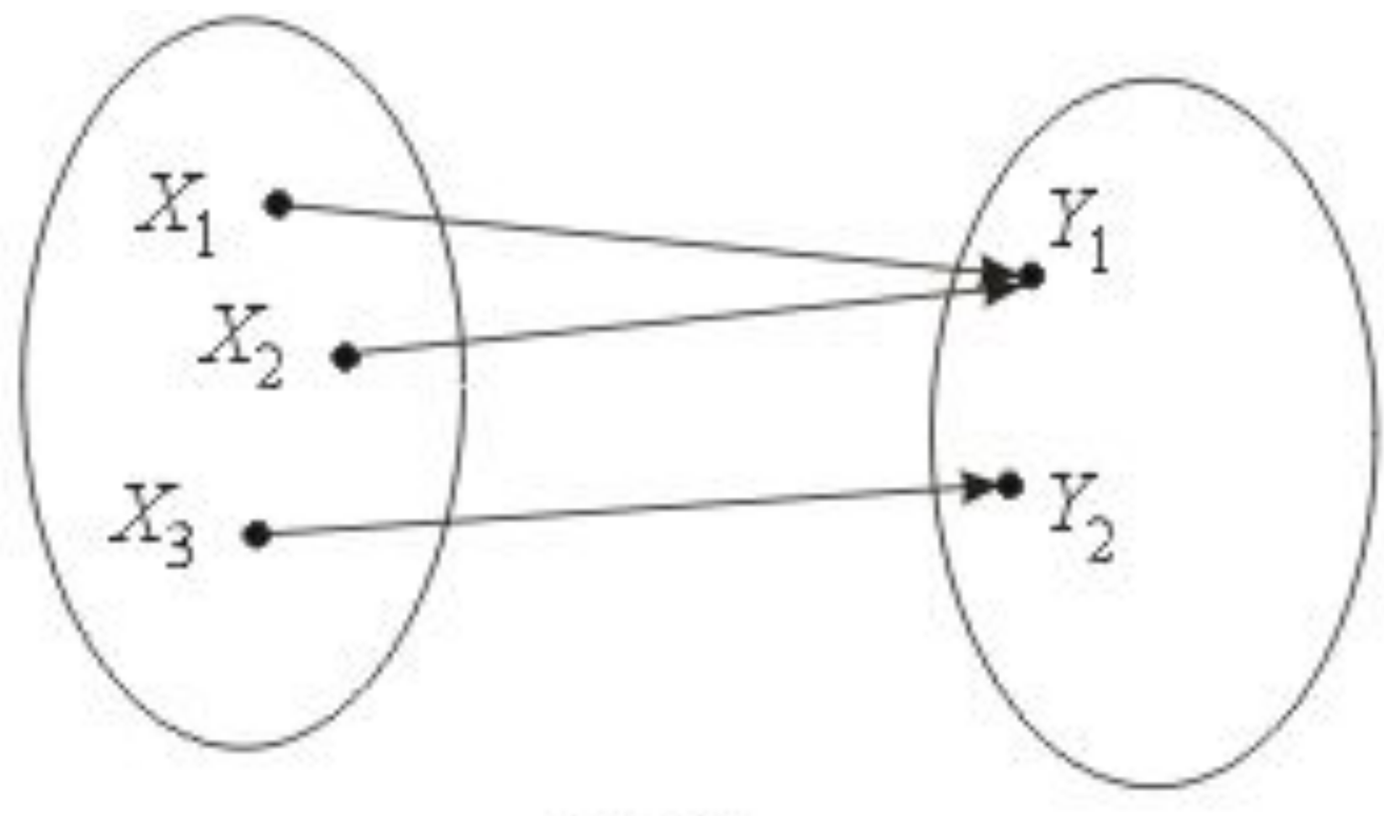
Не сюръективна



Сюръективная



Сюръекция



Сюръекция

Примеры

1) Соответствие между множеством всех студентов и множеством групп –
сюръективное отображение, так как каждой группе соответствует хотя бы один студент

2) Соответствие между множеством студентов 1 курса Вашего института и множеством преподавателей Вашего института не является сюръекцией, так как есть преподаватели, которые не преподают на 1 курсе.

3) Является ли сюръекцией соответствие между множеством предметов в Вашей зачетной книжке и множеством оценок $\{3,4,5\}$

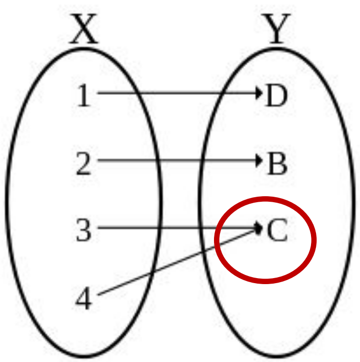
Свойства функций.

Функция $f : A \to B$ называется ***инъективной***, или ***инъекцией***, если из $f(a) = f(a')$ следует $a=a'$.

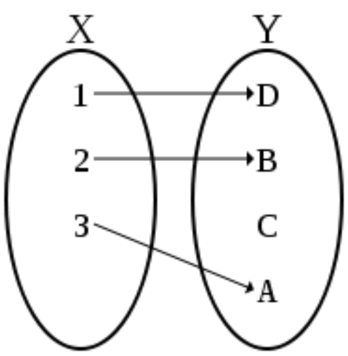
Иначе: для любого элемента из области значений существует только 1 прообраз.

Пример.

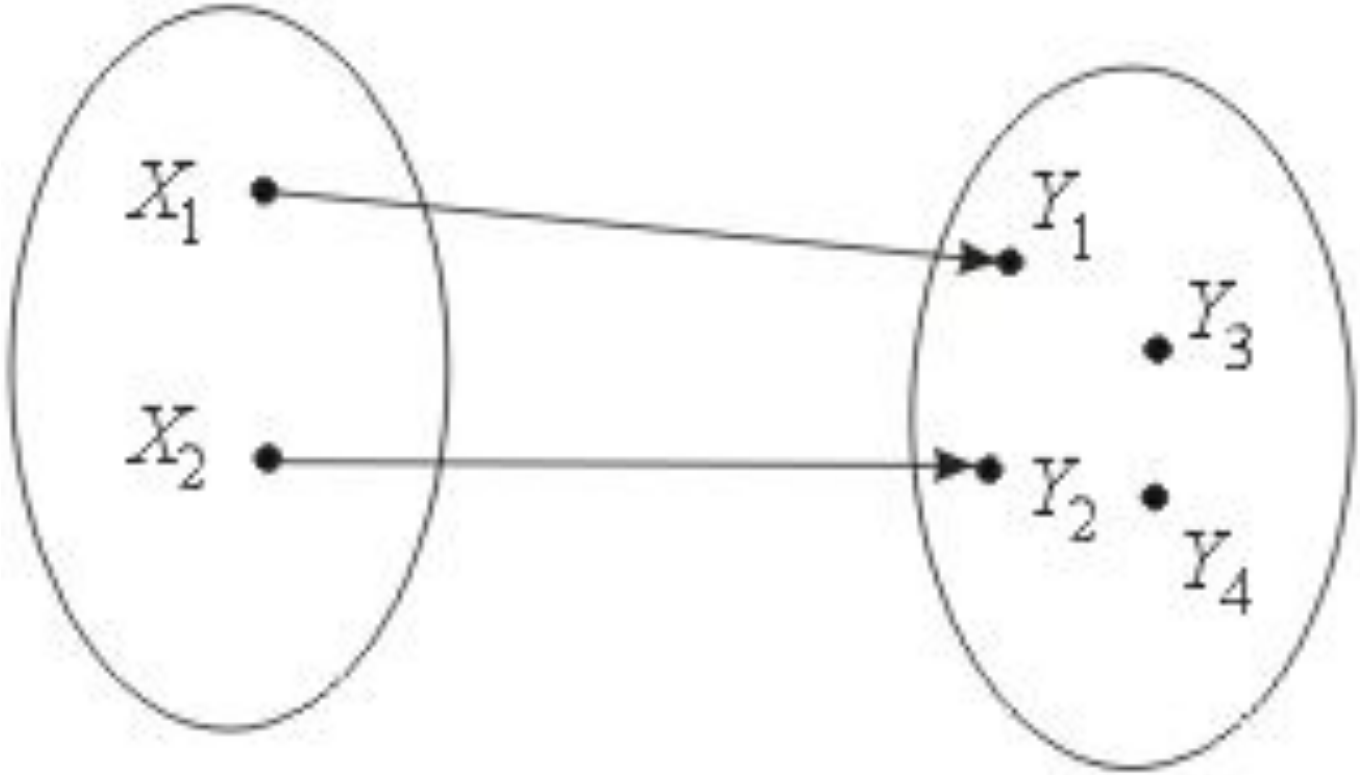
Не инъективна



Инъективная



Инъекция



Инъекция

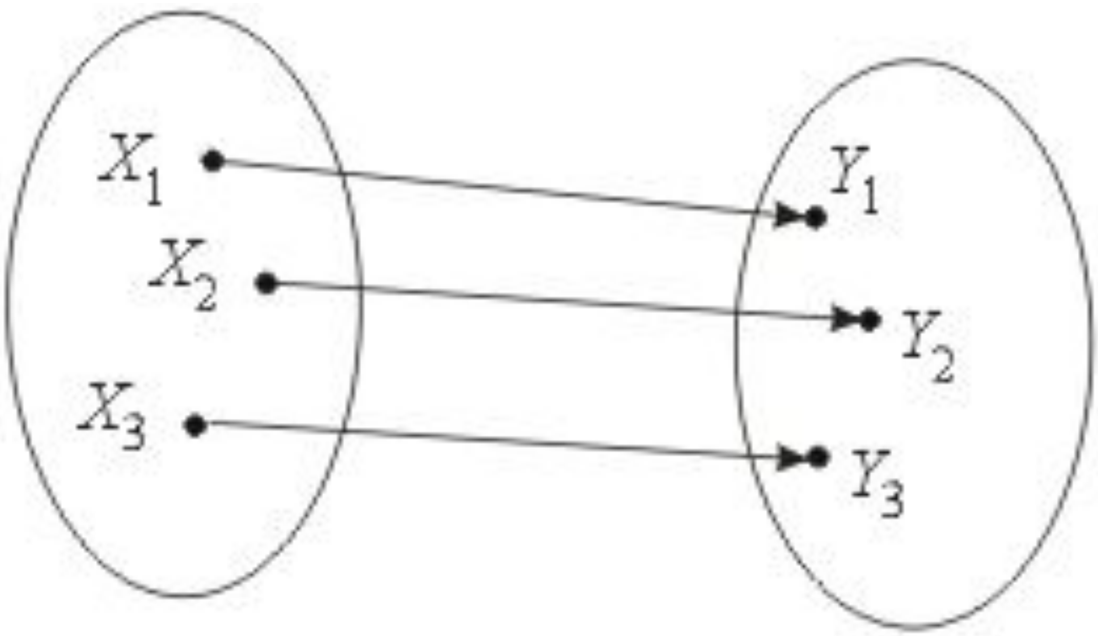
Примеры

1) *Отображение множества студентов данной аудитории на множество*
стульев - инъекция, так как разные студенты сидят на разных стульях.

2) Отображение множества детей в Вашем городе
на множество имен не является инъекцией, так как есть дети,
имеющие одинаковые имена

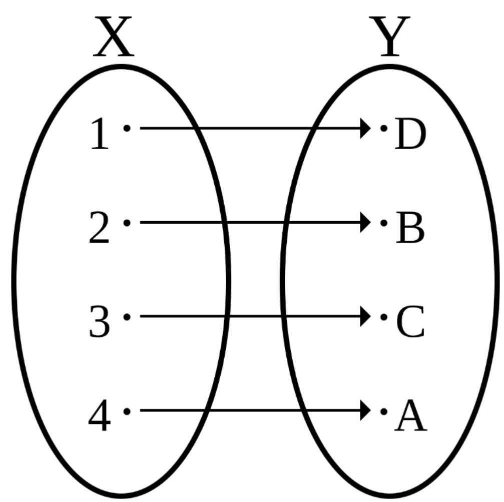
3) Является ли инъекцией отображение множества людей,
проживающих в Вашем доме на множество номеров квартир?
Почему?

Отображение множества А ***на*** *множество В, при котором каждому элементу множества В соответствует единственный элемент множества А, называется* ***взаимно-однозначным соответствием*** *между двумя множествами, или* ***биекцией****.*



Свойства функций.

Функция, которая является одновременно и инъективной, и сюръективной, называется ***взаимно однозначным соответствием***, или ***биекцией***.



Биекция

Примеры

1) *Соответствие между множеством государств Европы и множеством европейских столиц - биекция*

2) *Соответствие между множеством страниц учебника по математике и множеством номеров этих страниц - биекция*

3) *Будет ли биекцией соответствие между множеством четных и нечетных чисел*

Свойства функций. Пример.

Пусть A и B - множества действительных чисел и $f : A \to B$ определена таким образом: $f(x) = 3x + 5$.

Функция f инъективна, так как если $f(a) = f(a')$, тогда $3a + 5 = 3a' + 5 \Rightarrow a = a'$.

Функция f является также сюръективной:

Для любого действительного числа b требуется найти такое a, что $f(a) = b = 3a + 5$. $\Rightarrow a = (1/3)(b – 5)$, тогда $f(a) = b$.

Поэтому f представляет собой взаимно однозначное соответствие.

Свойства функций. Пример.

Пусть A и B – множество действительных чисел, и функция $f : A \to B$ определена как $f(x) = x^2$. Функция f не является инъективной,

так как $f(2) = f(-2)$, но $2 \neq -2$.

Функция f не является также и сюръективной, так как не существует такого действительного числа a, для которого $f(a) = -1$.

Если A и B - множество неотрицательных действительных чисел, тогда f является как инъективной, так и сюрьективной.

Обратная функция.

Пусть f – функция из множества A во множество B, то есть $f : A \to B$.

$f \subseteq A \times B$, так как f является отношением на $A \times B$.

Обратное отношение $f^{-1} \subseteq B \times A$ определяется как

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}.$$

При этом отношение f^{-1} может не быть функцией из B в A, даже если f является функцией из A в B.

Если f^{-1} действительно является функцией, то ее называют обращением функции f, или ее ***обратной функцией***.

<u>Пример</u>. Функции $f(x) = 3x + 6$ и $f(x) = x^2$ имеют обратные функции?

Обратная функция. Пример.

Требуется найти обратную функцию для $y = 3x + 6$.

Обращая функцию, получается

$$\{(y, x)\colon y = 3x + 6\}.$$

Это тоже самое, что

$$\{(x, y)\colon x = 3y + 6\}.$$

Решение этого уравнения относительно y:

$$\boldsymbol{\{(x, y)\colon y = (x - 6) / 3\}.}$$

Два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить биективное отображение.

Это обозначается следующим образом:

$$A \sim B.$$

Пусть множество A отображается взаимно-однозначно на множество B, т.е f:A□B. Тогда отображение f^{-1}, при котором каждому элементу множества B ставится в соответствие его прообраз из множества A, называется ***обратным отображением*** *для f и записывается*

$B \xrightarrow{f^{-1}} A$ *или f^{-1}:B□A.*

Так как одному образу при биекции соответствует в точности один прообраз, обратное отображение будет определено всюду на B и однозначно (отсюда название).

Для биекции принята запись: $A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B.$

Если между элементами множеств установлено взаимно-однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковое количество элементов.

Говорят, что они равносильны, равномощны, или эквивалентны.

Рассмотрим примеры отображений.

1) Каждому действительному числу поставим в соответствие его квадрат.

Отображение $x \square x^2$ *не является взаимно-однозначным соответствием, так как для любого образа* $y=x^2$ *можно найти два прообраза в области определения:*

$x = +\sqrt{y}$ *и* $x = -\sqrt{y}$.

Рассмотрим примеры отображений.

2) Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов английского и русского языков. Такое соответствие не является однозначным, так как каждому английскому понятию соответствуют различные варианты перевода на русский язык, и наоборот.

Рассмотрим примеры отображений.

3) Различные виды кодирования (азбука Морзе, представление чисел в различных системах счисления, шифрованные сообщения) являются чаще всего примерами взаимно-однозначного соответствия между множествами.

Отображение $e: A \to A$ называется **тождественным** (**единичным**), если каждому аргументу оно ставит в соответствие себя.

Очевидно, такое отображение можно задать на любом непустом множестве.

Если $e(x) = x$, то $E(e) = D(e) = A$.

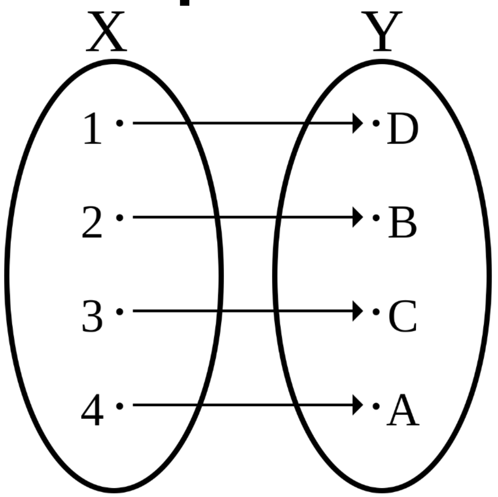
Очевидно, что отображение, обратное единичному, также единичное.

Обратная функция. Теорема 1.

1) Если $f : A \to B$ является биекцией. То обратное отношение f^{-1} является функцией из B в A, причем биекцией.

2) Обратно, для $f : A \to B$, если f^{-1} – функция из B в A, то f является биекцией.

Обратная функция. Теорема 2.



Если $f : A \to B$ является биекцией, то

а) $f\,(f^{-1}(b)) = b$ для любого b из B;

б) $f^{-1}\,(f\,(a)) = a$ для любого a из A.

Доказательство:

Пусть $b \in B$ и $a = f^{-1}(b)$. Тогда $f(a) = b$.

Поскольку $a = f^{-1}(b)$), то $f\,(f^{-1}(b)) = f(a) = b$.

Аналогично доказывается

$$f^{-1}\,(f\,(a)) = a \text{ для любого } a \text{ из } A.$$

Обратная функция. Теорема 3.

Если $f : A \to A$ и I - тождественная функция на A,

то $I \circ f = f \circ I = f$.

Если для f существует обратная функция,

то $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

<u>Прим</u>. Тождественная функция – это функция, переводящая элемент сам в себя. Например, f(x) = x.

Композиция функций.

Пусть заданы отображения f_1*: A□B и* f_2*: B□C. Отображение f: A□C, при котором каждому элементу* $x \in A$ *соответствует определенный элемент* $z \in C$*, такой, что*

$z = f_2(y)$*, где* $y=f_1(x)$*, называется произведением, композицией, или суперпозицией отображений*

f_1 *и* f_2*.*

Композиция функций.

Теорема:

Пусть $g : A \to B$ и $f : B \to C$.

Тогда

а) композиция $f \circ g$ есть отображение из A в C. Обозначение $f \circ g : A \to C$;

б) если $a \in A$, то $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Композиция функций. Примеры.

- Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$.

Тогда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, то есть *композиция двух функций ассоциативна*.

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x + 3$ - функции, заданные на множестве действительных чисел.

Функция $$f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(x+3\right) = \sqrt{x+3}$$

Функция $$g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + 3$$

Композиция функций. Теорема.

Пусть $g : A \to B \quad f : B \to C$. Тогда

а) если g и f - сюръекции A на B и B на C соответственно, то $f \circ g$ есть сюръекция A на C. <u>Иначе</u>: композиция двух сюръекций – сюръекция.

б) если g и f - инъекции, то $f \circ g$ - также инъекция.

<u>Иначе</u>: Композиция двух инъекций – инъекция.

в) если g и f - биекции, то $f \circ g$ - также биекция.

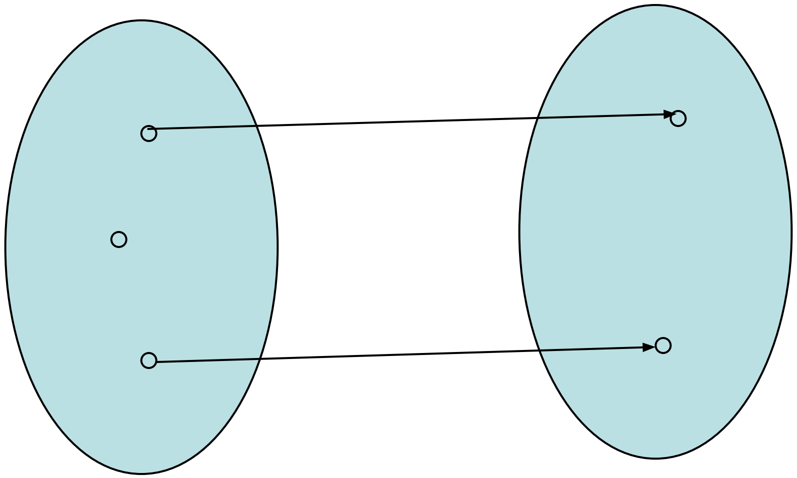
<u>Иначе</u>: Композиция двух биекций – биекция.

г) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Повторение

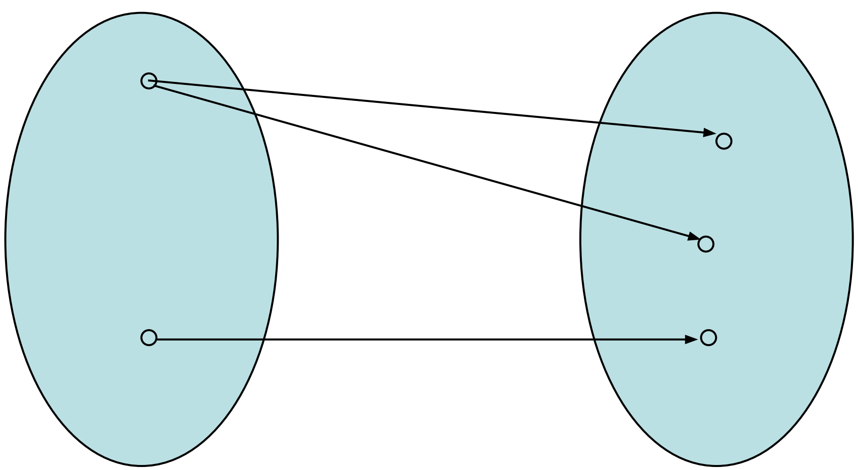
Примеры

3)



Функциональное бо
Не отображение

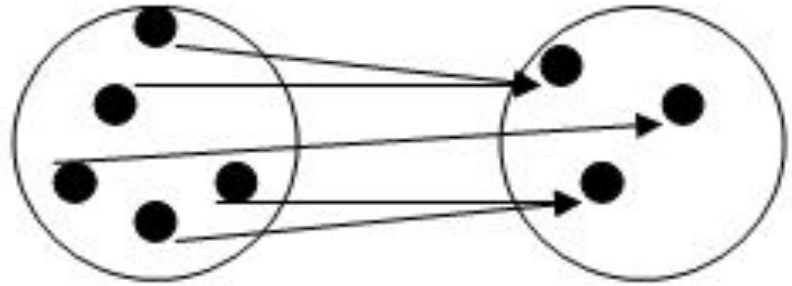
4)



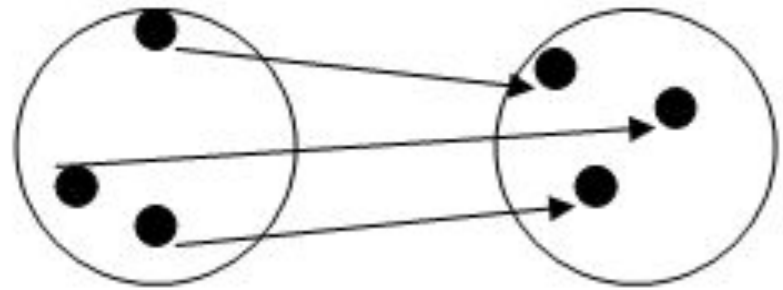
Не функциональное бо
Не отображение

Классификация отображений по мощности

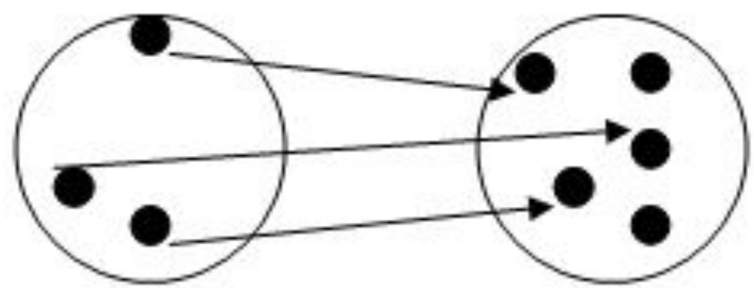
- На множество «сюръекция»;



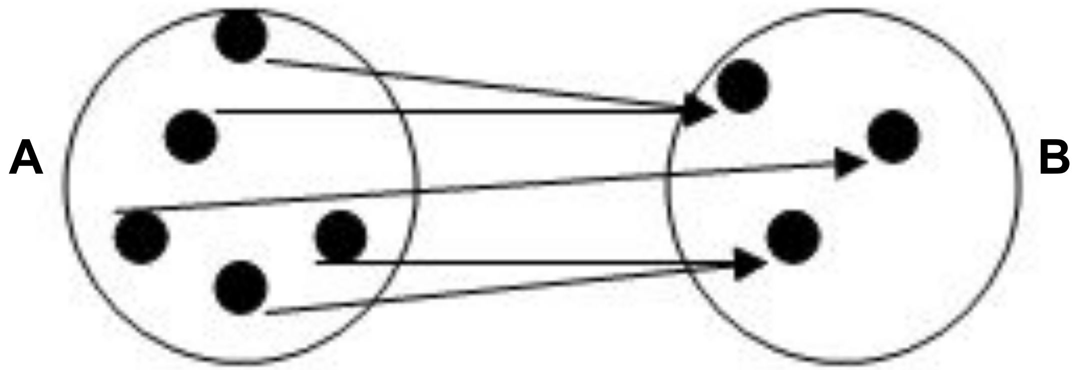
- На множество «биекция»;



- Во множество «инъекция».

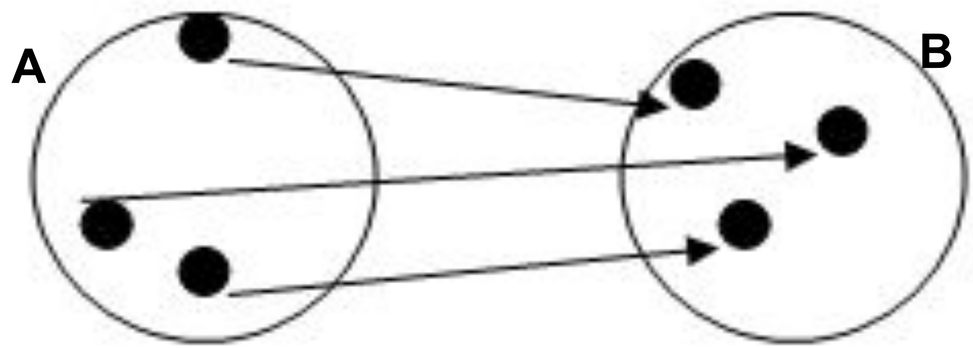


На множество - «сюръекция»



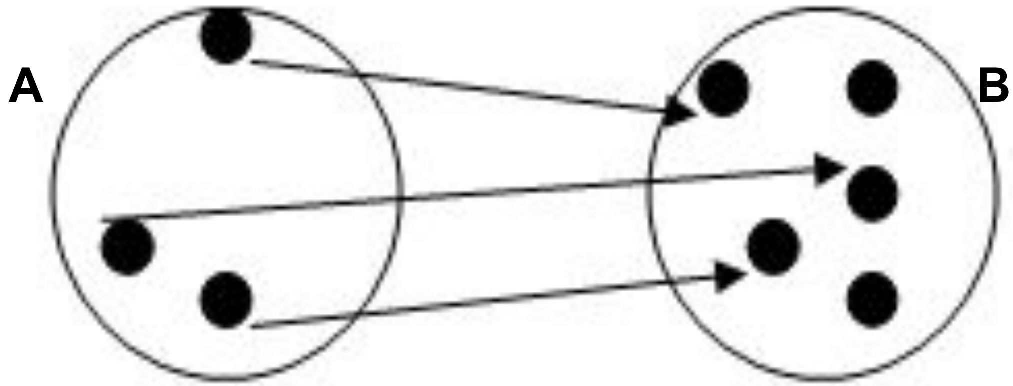
Соответствие. при котором каждому элементу множества *A* указан *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу множества *B* можно указать *хотя бы* один элемент множества *A*, называется отображением множества *A* **на** множество *B*

На множество - «биекция»



Отображение множества А **на** множество В, при котором каждому элементу множества В соответствует единственный элемент множества А, называется **взаимно-однозначным** соответствием между двумя множествами, или **биекцией**.

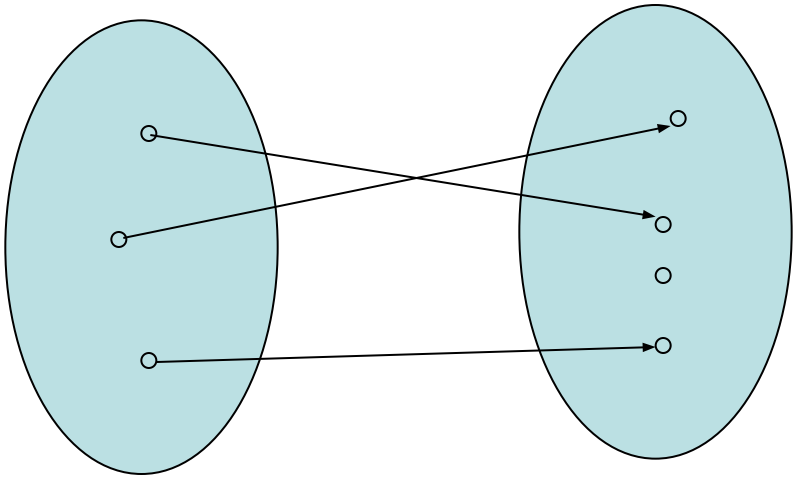
Во множество - «инъекция»



Соответствие. при котором каждому элементу множества *A* указан *единственный* элемент множества *B*, а каждому элементу *B* соответствует *не более* одного прообраза из *A*, называется отображением множества *A* **во** множество *B.*

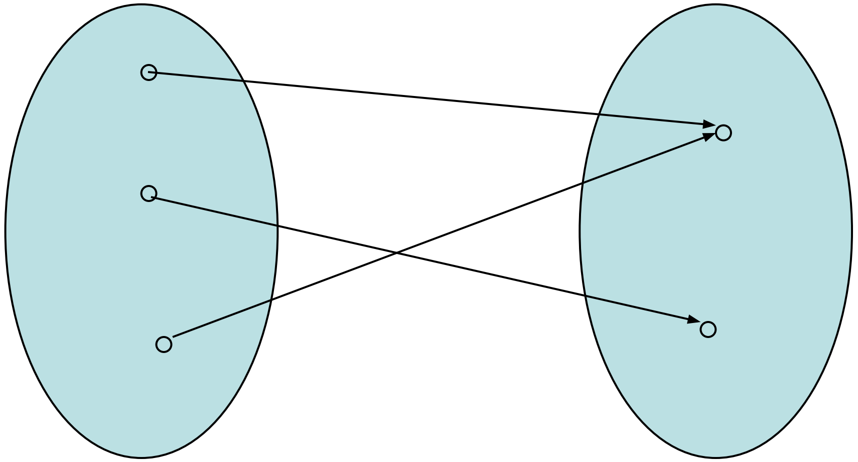
Примеры

1)



Инъективное, не сюръективное отображение

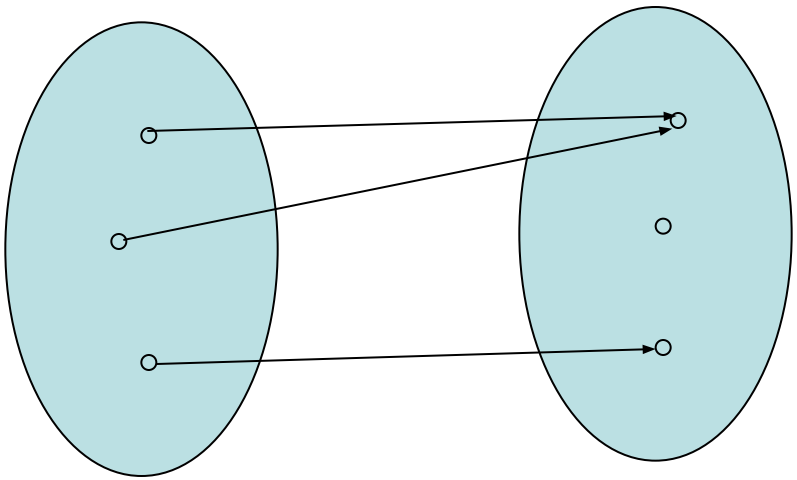
2)



Не инъективное, сюръективное отображение

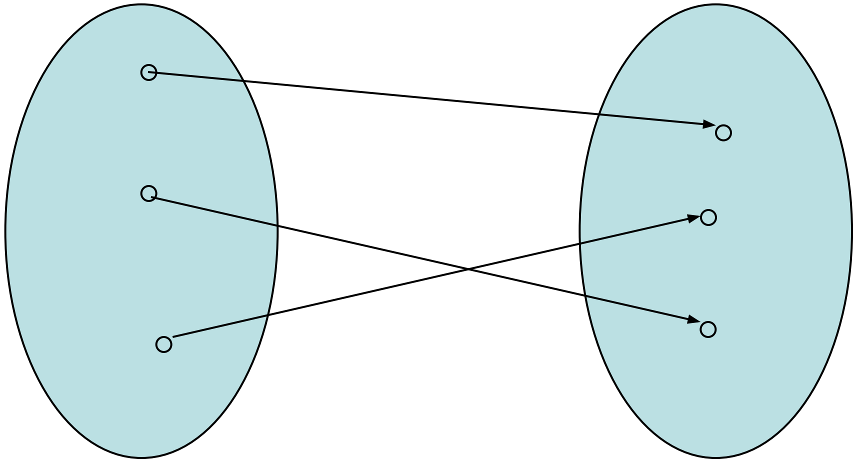
Примеры

5)



Не инъективное, не сюръективное отображение

6)



Инъективное, сюръективное отображение – биекция

Примеры

- 7) Список студентов – биекция между номером и фамилией.
- 8) $f : X \to Y$, где X - множество экзаменов в сессии, Y - множество оценок.

  f - не инъекция, не сюръекция.
- 9) Определить множества, на которых отображение $f(x) = x^2$ является биекцией.

  $R \to R$ не сюръекция, не инъекция,

  $R \to [0,+\infty)$ сюръекция, не инъекция,

  $[0,\infty) \to [0,\infty)$ сюръекция, инъекция – биекция.

Пример

Соответствие $G=\{ (x,y) \mid y = \exp x \} \subset$ **R**×**R**

- ***всюду определено***: $Pr_1G = (-\infty; \infty) =$ **R**
- ***функционально***: *каждому прообразу соответствует единственный образ*
- *не* ***сюрьективно***: $Pr_2G = (0; \infty) \neq$ **R**
- ***инъективна***: *образ имеет единственный прообраз*
- *не является* ***биекцией***
- ***функция***, *так как функционально*
- ***отображение***, *так как всюду определено и функционально*