

25.05.21.

Тема:

Скалярное произведение векторов.

Решение задач на вычисление скалярного произведения векторов.

.

Видео для усвоения материала:

<https://videouroki.net/video/28-skaliarnoie-proizviedi-eniie-viektorov.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=hnldMyAhIJc>

*Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Теоретическая часть.

Прочитать. Выучить определения, теоремы (то, что выделено жирным шрифтом.)

## § 2

### Скалярное произведение векторов

#### 50 Угол между векторами

Возьмем два произвольных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Отложим от какой-нибудь точки  $O$  векторы  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не являются сонаправленными, то лучи  $OA$  и  $OB$  образуют угол  $AOB$  (рис. 133). Градусную меру этого угла обозначим буквой  $\alpha$  и будем говорить, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\alpha$ . Если же векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен  $0^\circ$ . Если угол между векторами равен  $90^\circ$ , то векторы называются **перпендикулярными**.

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается так:  $\widehat{a b}$ .

На рисунке 134 изображено несколько векторов. Углы между ними таковы:  $\widehat{a b} = 30^\circ$ ,  $\widehat{a c} = 120^\circ$ ,  $\widehat{a d} = 60^\circ$ ,  $\widehat{b c} = 90^\circ$ ,  $\widehat{d f} = 0^\circ$ ,  $\widehat{d c} = 180^\circ$ . На этом рисунке  $\vec{b} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{b} \perp \vec{d}$ ,  $\vec{b} \perp \vec{f}$ .

#### 51 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается так:  $\vec{a} \vec{b}$ . Таким образом,

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\widehat{a b}).$$

Как и в планиметрии, справедливы следующие утверждения:

**скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;**

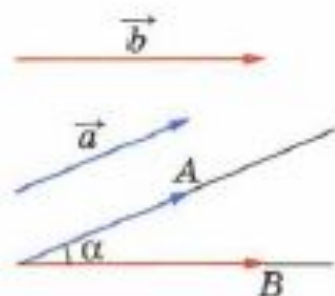


Рис. 133

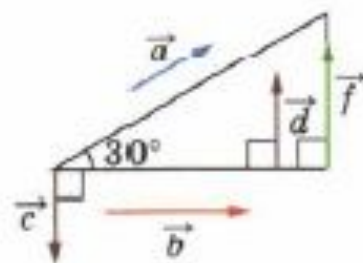


Рис. 134

скалярный квадрат вектора (т. е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов: скалярное произведение векторов  $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$  выражается формулой  $\vec{a} \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ . Это утверждение доказывается точно так же, как в планиметрии.

Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами  $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$  вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1)$$

В самом деле, так как

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha,$$

то

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Подставив сюда выражения для  $\vec{a} \vec{b}$ ,  $|\vec{a}|$  и  $|\vec{b}|$  через координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , получим формулу (1).

Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы соотношения:

1<sup>0</sup>.  $\vec{a}^2 \geq 0$ , причем  $\vec{a}^2 > 0$  при  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .

2<sup>0</sup>.  $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$  (переместительный закон).

3<sup>0</sup>.  $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$  (распределительный закон).

4<sup>0</sup>.  $k(\vec{a} \vec{b}) = (k\vec{a}) \vec{b}$  (сочетательный закон).

Утверждения 1<sup>0</sup>—4<sup>0</sup> доказываются точно так же, как в планиметрии.

Нетрудно доказать, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \vec{d} = \vec{a} \vec{d} + \vec{b} \vec{d} + \vec{c} \vec{d}$  (см. задачу 458).



Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой  $a$ , если он лежит либо на прямой  $a$ , либо на прямой, параллельной  $a$ .

На рисунке 135 вектор  $\overrightarrow{AB}$  является направляющим вектором прямой  $a$ .

### Задача 1

Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

### Решение

Пусть  $\vec{p} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{q} \{x_2; y_2; z_2\}$  — направляющие векторы прямых  $a$  и  $b$ . Обозначим буквой  $\varphi$  искомый угол между этими прямыми. Для решения задачи достаточно найти  $\cos \varphi$ , так как значение  $\cos \varphi$  позволяет найти угол  $\varphi$ .

Введем обозначение:  $\theta = \widehat{\vec{p}\vec{q}}$ . Тогда либо  $\varphi = \theta$ , если  $\theta \leq 90^\circ$  (рис. 136, а), либо  $\varphi = 180^\circ - \theta$ , если  $\theta > 90^\circ$  (рис. 136, б).

Поэтому либо  $\cos \varphi = \cos \theta$ , либо  $\cos \varphi = -\cos \theta$ . В любом случае  $|\cos \varphi| = |\cos \theta|$ , а так как  $\varphi \leq 90^\circ$ , то  $\cos \varphi \geq 0$ , и, следовательно,  $\cos \varphi = |\cos \theta|$ . Используя формулу (1) п. 51, получаем

$$\cos \varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (2)$$

### Задача 2

Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости.

### Решение

Пусть  $\vec{p} \{x_1; y_1; z_1\}$  — направляющий вектор прямой  $a$ ,  $\vec{n} \{x_2; y_2; z_2\}$  — ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости  $\alpha$ . Это означает, что прямая, на которой лежит вектор  $\vec{n}$ , перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ . Обозначим буквой  $\varphi$  искомый угол между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ , а буквой  $\theta$  — угол  $\widehat{\vec{p}\vec{n}}$ .

Пользуясь рисунком 137, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что  $\sin \varphi = |\cos \theta|$ . Поэтому для  $\sin \varphi$  получается такое же выражение, как и в правой части равенства (2). Зная  $\sin \varphi$  и учитывая, что  $\varphi \leq 90^\circ$ , можно найти угол  $\varphi$ .

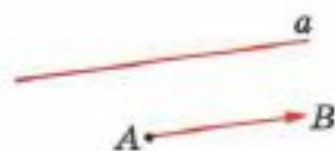
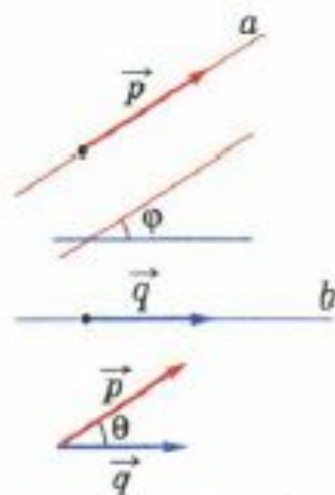
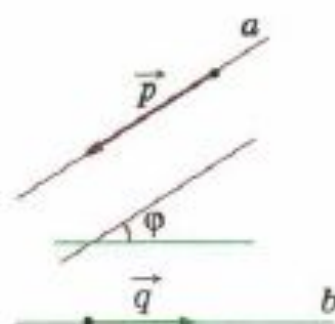


Рис. 135



$\varphi = \theta$

а)



$\varphi = 180^\circ - \theta$

б)

Рис. 136

## Практическая часть.

- 444 Даны векторы  $\vec{a} \{1; -1; 2\}$ ,  $\vec{b} \{-1; 1; 1\}$  и  $\vec{c} \{5; 6; 2\}$ . Вычислите  $\vec{a} \vec{c}$ ,  $\vec{a} \vec{b}$ ,  $\vec{b} \vec{c}$ ,  $\vec{a} \vec{a}$ ,  $\sqrt{\vec{b} \vec{b}}$ .
- 445 Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$ . Вычислите: а)  $\vec{a} \vec{b}$ ; б)  $\vec{a} \vec{i}$ ; в)  $\vec{b} \vec{j}$ ; г)  $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{k}$ ; д)  $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j})$ .
- 446 Даны векторы  $\vec{a} \{3; -1; 1\}$ ,  $\vec{b} \{-5; 1; 0\}$  и  $\vec{c} \{-1; -2; 1\}$ . Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; б)  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ ; в)  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ .