

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Лекция 20. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
ЦЕПЯХ. ЧАСТЬ 2

# Расчет переходных процессов в $RLC$ -цепи при замыкании на источник постоянного напряжения

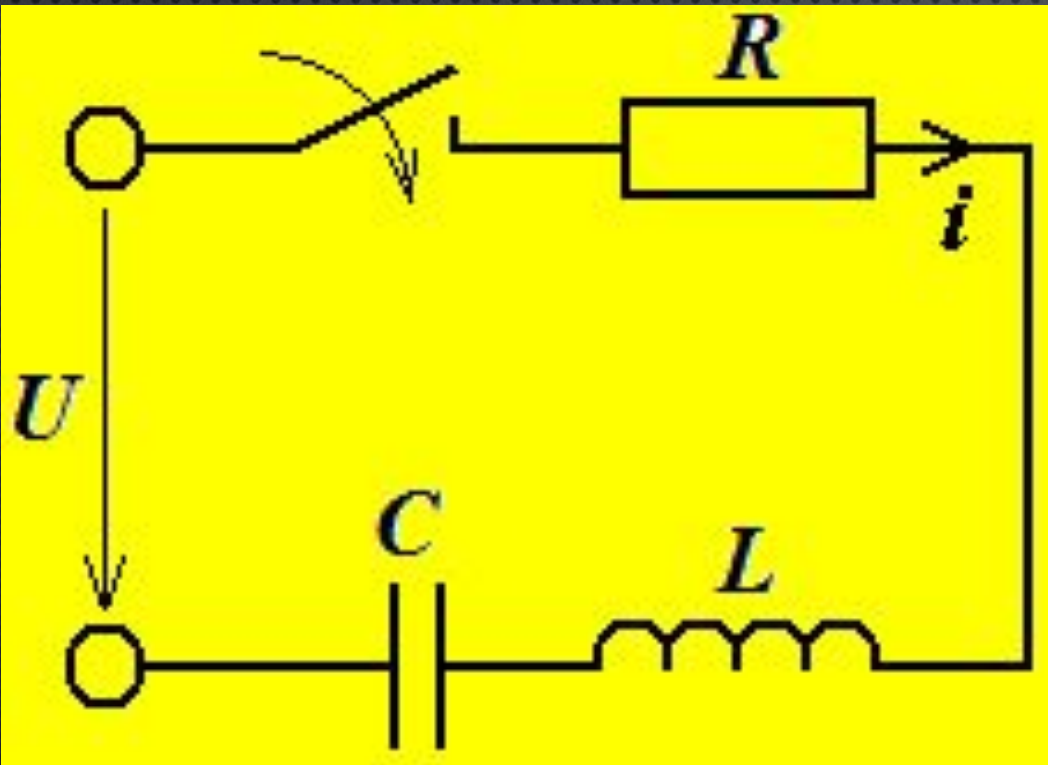


Рисунок 1 – К расчету переходных процессов в цепи последовательно соединенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора, замыкающихся на источник постоянного напряжения

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = u$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

$$LC \frac{d^2 u_c''}{dt} + RC \frac{du_c''}{dt} + u_c'' = 0$$

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} - \text{коэффициент затухания контура}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{резонансная частота контура}$$

$\rho = \sqrt{L/C}$  – характеристическое (волновое) сопротивление контура

Различают три возможных вида корней  $p_{1,2}$ :

- при  $R > 2\rho$  корни будут вещественными и различными;
- при  $R < 2\rho$  корни будут комплексно-сопряженными;
- при  $R = 2\rho$  корни будут вещественными и равными (кратными)

Расчет переходных процессов в RLC-цепи при  $R > 2\rho$

$$u_C'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$u_C' = U$$

$$u_C = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = A_1 C p_1 e^{p_1 t} + A_2 C p_2 e^{p_2 t}$$

$$t = 0 : \begin{cases} U + A_1 + A_2 = 0, \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{Up_2}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = -\frac{Up_1}{p_1 - p_2}$$

$$u_C(t) = U \left[ 1 - \frac{1}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}) \right]$$

$$i(t) = -\frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t})$$

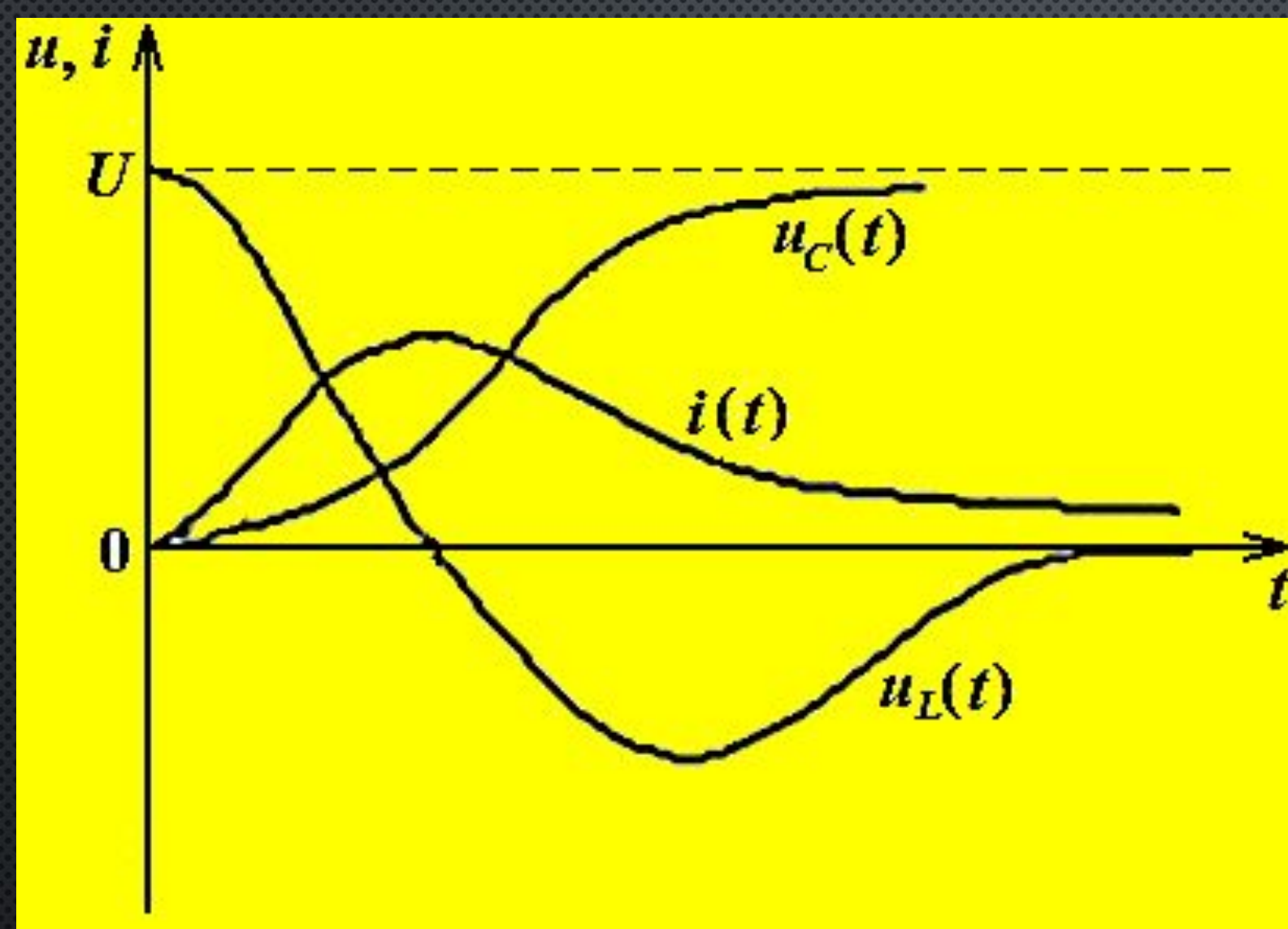


Рисунок 2 – Графики изменения во времени в переходном апериодическом процессе тока в последовательном колебательном контуре и напряжений на реактивных элементах при замыкании цепи на источник постоянного напряжения

Апериодические процессы – переходные процессы, при которых ток и напряжения в контуре принимают новые установившиеся значения, переходя к ним монотонно либо имеют не более одного экстремума

Расчет переходных процессов в RLC-цепи при  $R < 2\rho$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j \cdot \omega''$$

$\omega''$  – частота свободных затухающих колебаний

$$u_C'' = A e^{-\alpha t} \sin(\omega'' t + \theta)$$

$$u_C(t) = U + A e^{-\alpha t} \sin(\omega'' t + \theta)$$

$$\begin{cases} U + A \sin \theta = 0, \\ -\alpha A \sin \theta + \omega'' A \cos \theta = 0 \end{cases}$$

$$A = -U \frac{\omega_0}{\omega''}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\omega''}{\alpha}$$



$$u_C(t) = U \left[ 1 - \frac{\omega_0}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin \left( \omega'' t + \operatorname{arctg} \frac{\omega''}{\alpha} \right) \right]$$

$$i(t) = \frac{U}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega'' t$$

$$u_L(t) = U \frac{\omega_0}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin \left( \omega'' t - \operatorname{arctg} \frac{\omega''}{\alpha} \right)$$

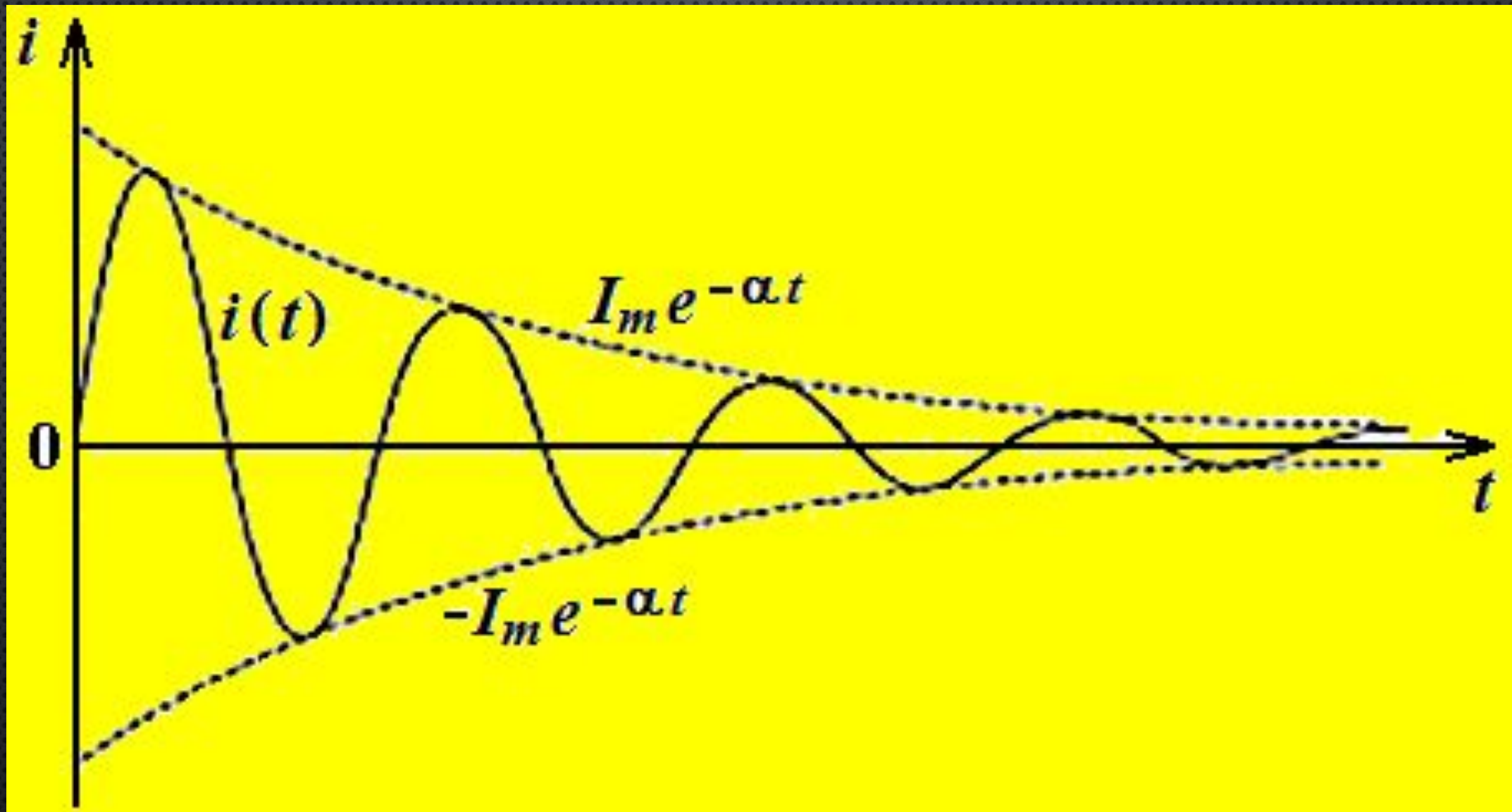


Рисунок 3 – График изменения во времени тока в переходном колебательном процессе в последовательном колебательном контуре при замыкании цепи на источник постоянного напряжения

Расчет переходных процессов в RLC-цепи при  $R = 2\rho$

$$p_1 = p_2 = p = -\alpha$$

$$i(t) = -\frac{U}{L} \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{e^{p_2 t} - e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} = -\frac{U}{L} \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{\frac{d}{dp_2} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t})}{\frac{d}{dp_2} (p_1 - p_2)}$$

$$i(t) = -\frac{U}{L} \frac{t \cdot e^{p_2 t}}{-1} = \frac{U}{L} t \cdot e^{p_2 t}$$

$$i(t) = \frac{U}{L} t \cdot e^{-\alpha t}$$

$$u_C(t) = U - U \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2}$$

$$u_C(t) = U - U \lim_{p_2 \rightarrow p_1} \frac{\frac{d}{dp_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t})}{\frac{d}{dp_2} (p_1 - p_2)} = U - U \frac{p_1 t e^{p_2 t} - e^{p_1 t}}{-1}$$

$$u_C(t) = U[1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}]$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \left( \frac{U}{L} t \cdot e^{-\alpha t} \right) = U (e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$$

$$u_L(t) = U e^{-\alpha t} (1 - \alpha t)$$

Переходный процесс, протекающий в колебательном контуре при  $R = 2\rho$  называется *предельным апериодическим процессом*, т.к. при дальнейшем уменьшении активного сопротивления  $R$  ниже значения  $R = 2\rho = 2\sqrt{L/C}$  переходный процесс превращается из апериодического в колебательный. При этом активное сопротивление, равное удвоенному значению характеристического сопротивления ( $R = 2\rho$ ), называется критическим сопротивлением контура.

При выполнении условия  $R \ll 2\rho$ , т.е. при идеальном случае отсутствия активного сопротивления в контуре колебания в нем становятся незатухающими ( $\alpha = 0$ ). При этом ток в контуре будет изменяться по гармоническому закону

# Расчет переходных процессов в $RLC$ -цепи при замыкании на источник синусоидального напряжения

$$R > 2\rho$$

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u(t)$$

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt}$$

$$i(t) = i' + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$i' = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$I_m = U_m / z$$

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\psi_i = \psi_u - \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

$$i(0) = 0 = i' + A_1 e^{p_1 \cdot 0} + A_2 e^{p_2 \cdot 0}$$

$$I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) + A_1 + A_2 = 0$$

$$u_L(0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = u(0)$$

$$U_m \sin \psi_u = L \left. \frac{di'}{dt} \right|_{t=0} + L p_1 A_1 + L p_2 A_2$$



$$\begin{aligned}
 U_m \sin \psi_u &= I_m z \sin(\psi_i + \varphi) = I_m (z \cos \varphi \sin \psi_i + z \sin \varphi \cos \psi_i) = \\
 &= I_m (R \sin \psi_i + x \cos \psi_i) = I_m \left[ R \sin \psi_i + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \psi_i \right]
 \end{aligned}$$

$$L \left. \frac{di'}{dt} \right|_{t=0} = \omega L I_m \cos \psi_i$$

$$\begin{cases}
 I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) + A_1 + A_2 = 0, \\
 -I_m \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i + 2I_m \alpha \sin \psi_i = p_1 A_1 + p_2 A_2
 \end{cases}$$

$$A_1 = -\frac{I_m}{p_1 - p_2} \left( p_1 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i \right)$$

$$A_2 = \frac{I_m}{p_1 - p_2} \left( p_2 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i \right)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \frac{\sin \psi_i}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) - \\ - I_m \frac{\cos \psi_i}{p_1 - p_2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$R < 2\rho \quad \frac{1}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) = \frac{\omega_0}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin(\omega'' t + \theta)$$

$$\frac{1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{1}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin \omega'' t$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) - \frac{\omega_0}{\omega''} I_m e^{-\alpha t} \left[ \sin \psi_i \sin(\omega'' t + \theta) + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \sin \omega'' t \right]$$

При  $\omega'' \approx \omega$ ,  $\alpha \ll \omega_0$ , в первые мгновения после коммутации  $e^{-\alpha t} \approx 1$ :

$$i(t) = I_m [\sin(\omega t + \psi_i) - \sin(\omega'' t + \psi_i)]$$

## Формула биений колебаний тока

$$i(t) = 2 I_m \sin\left(\frac{\omega - \omega''}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega''}{2} t + \psi_i\right)$$

При  $\omega'' = \omega$ ,  $\alpha \ll \omega_0 \Rightarrow \omega \approx \omega_0, \theta \approx \pi/2$ :

$$i(t) \approx I_m(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \psi_i)$$

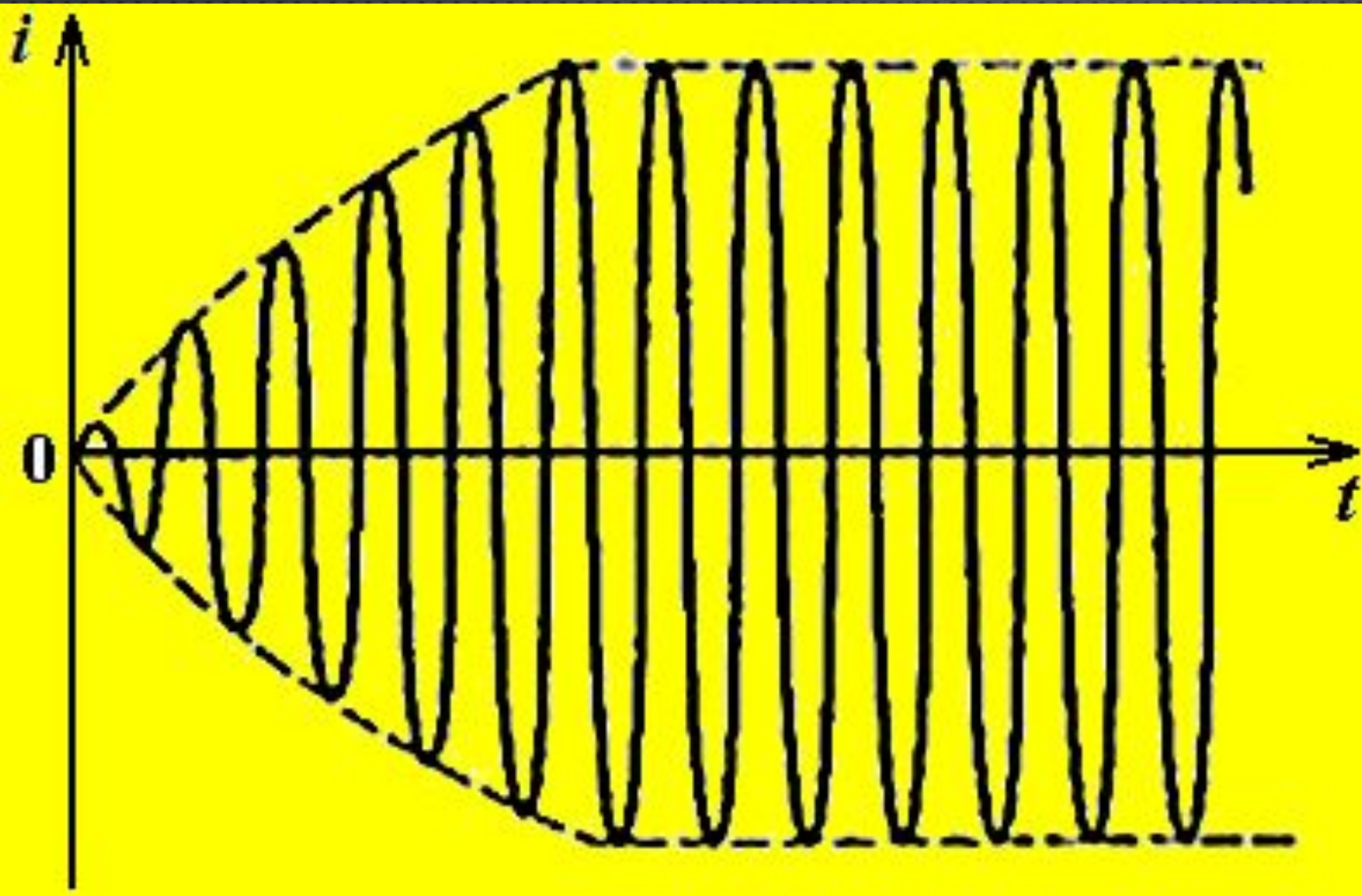


Рисунок 4 – График изменения во времени тока в переходном колебательном процессе в последовательном колебательном контуре при замыкании цепи на источник синусоидального напряжения

Амплитуда установившегося напряжения на конденсаторе в силу близости частоты колебаний напряжения источника резонансной частоте можеткратно (даже многократно) превысить амплитуду приложенного напряжения источника энергии, т.е. на конденсаторе наблюдается *перенапряжение*

При коммутациях в линейных электрических цепях, содержащих только резистивные элементы, установившийся режим наступает сразу (мгновенно) после коммутации

Отсутствие в цепи резистивных элементов (присутствие только реактивных элементов) в линейной электрической цепи означает отсутствие диссипации энергии (утилизации в тепло) в ней, следовательно, колебательные процессы взаимного превращения электрической и магнитной энергии в реактивных элементах будут протекать бесконечно долго без потерь, и колебания тока в цепи будут незатухающими