Теоретические основы электротехники

Лекция 20. Переходные процессы в неразветвленных линейных электрических цепях. Часть 2

Расчет переходных процессов в *RLC*-цепи при замыкании на источник постоянного напряжения

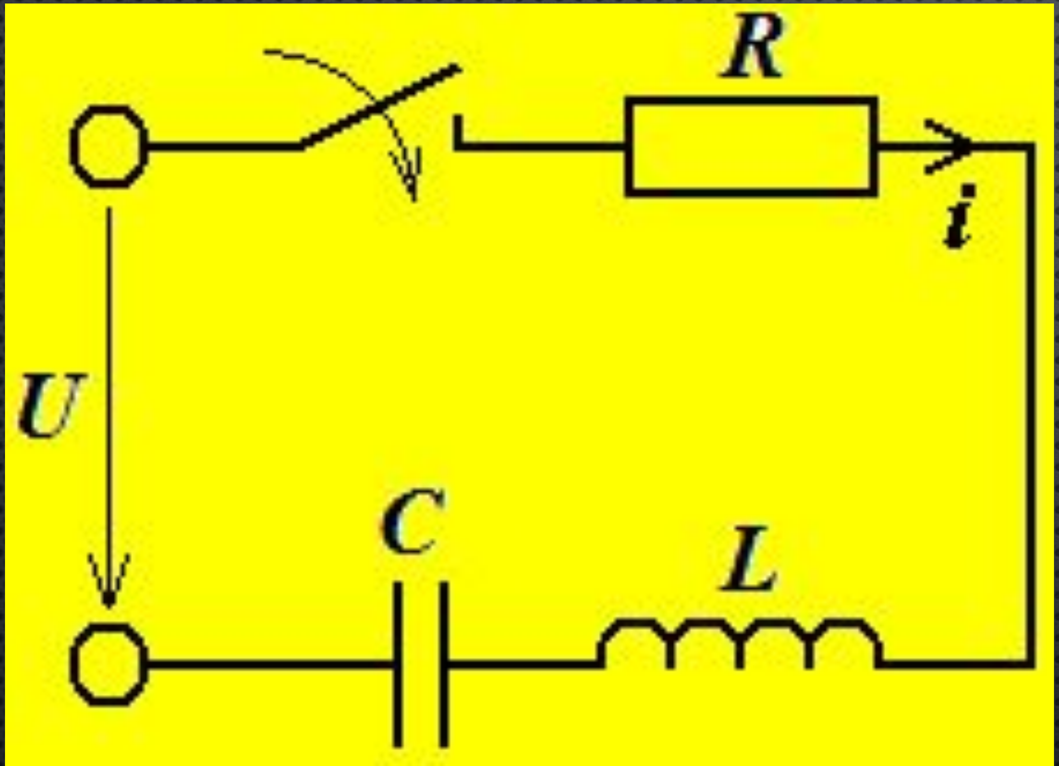

Рисунок 1 – К расчету переходных процессов в цепи последовательно соединенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора, замыкающихся на источник постоянного напряжения

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C = u$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

$$LC\frac{d^2u''_C}{dt}+RC\frac{du''_C}{dt}+u''_C=0$$

$$LCp^2+RCp+1=0$$

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$\alpha=\dfrac{R}{2L}$ – *коэффициент затухания контура*

$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – *резонансная частота контура*

$\rho = \sqrt{L/C}$ – *характеристическое (волновое) сопротивление контура*

Различают три возможных вида корней $p_{1,2}$:

- при $R > 2\rho$ корни будут вещественными и различными;
- при $R < 2\rho$ корни будут комплексно-сопряженными;
- при $R = 2\rho$ корни будут вещественными и равными (кратными)

Расчет переходных процессов в RLC-цепи при $R > 2\rho$

$$u_C'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$u_C' = U \qquad\qquad u_C = U + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = A_1 C p_1 e^{p_1 t} + A_2 C p_2 e^{p_2 t}$$

$$t = 0: \qquad \begin{cases} U + A_1 + A_2 = 0\,, \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{Up_2}{p_1 - p_2}\,, \qquad A_2 = -\frac{Up_1}{p_1 - p_2}$$

$$u_C(t) = U\left[1 - \frac{1}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}\right)\right]$$

$$i(t) = -\frac{U}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}\right)$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{U}{p_1 - p_2}\left(p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t}\right)$$

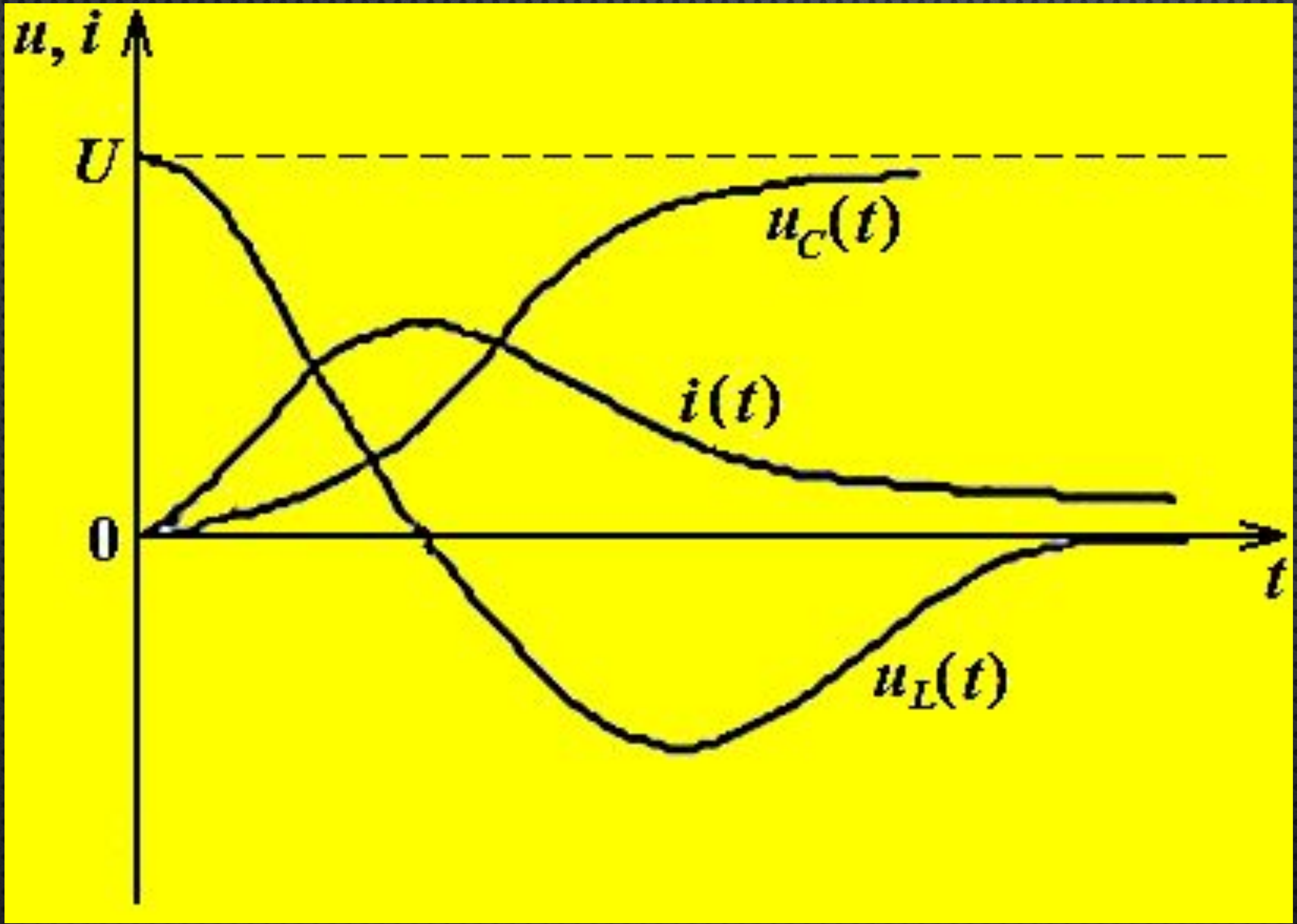

Рисунок 2 – Графики изменения во времени в переходном апериодическом процессе тока в последовательном колебательном контуре и напряжений на реактивных элементах при замыкании цепи на источник постоянного напряжения

Апериодические процессы – переходные процессы, при которых ток и напряжения в контуре принимают новые установившиеся значения, переходя к ним монотонно либо имеют не более одного экстремума

Расчет переходных процессов в RLC-цепи при $R < 2\rho$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j \cdot \omega''$$

ω'' – частота свободных затухающих колебаний

$$u_C'' = A\,e^{-\alpha t} \sin(\omega'' t + \theta)$$

$$u_C(t) = U + A\,e^{-\alpha t} \sin(\omega'' t + \theta)$$

$$\begin{cases} U + A \sin\theta = 0\,, \\ -\alpha A \sin\theta + \omega'' A \cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$A = -U\,\frac{\omega_0}{\omega''}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{\omega''}{\alpha}$$

$$u_C(t) = U\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin\left(\omega'' t + \operatorname{arctg} \frac{\omega''}{\alpha}\right)\right]$$

$$i(t) = \frac{U}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega'' t$$

$$u_L(t) = U \frac{\omega_0}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin\left(\omega'' t - \operatorname{arctg} \frac{\omega''}{\alpha}\right)$$

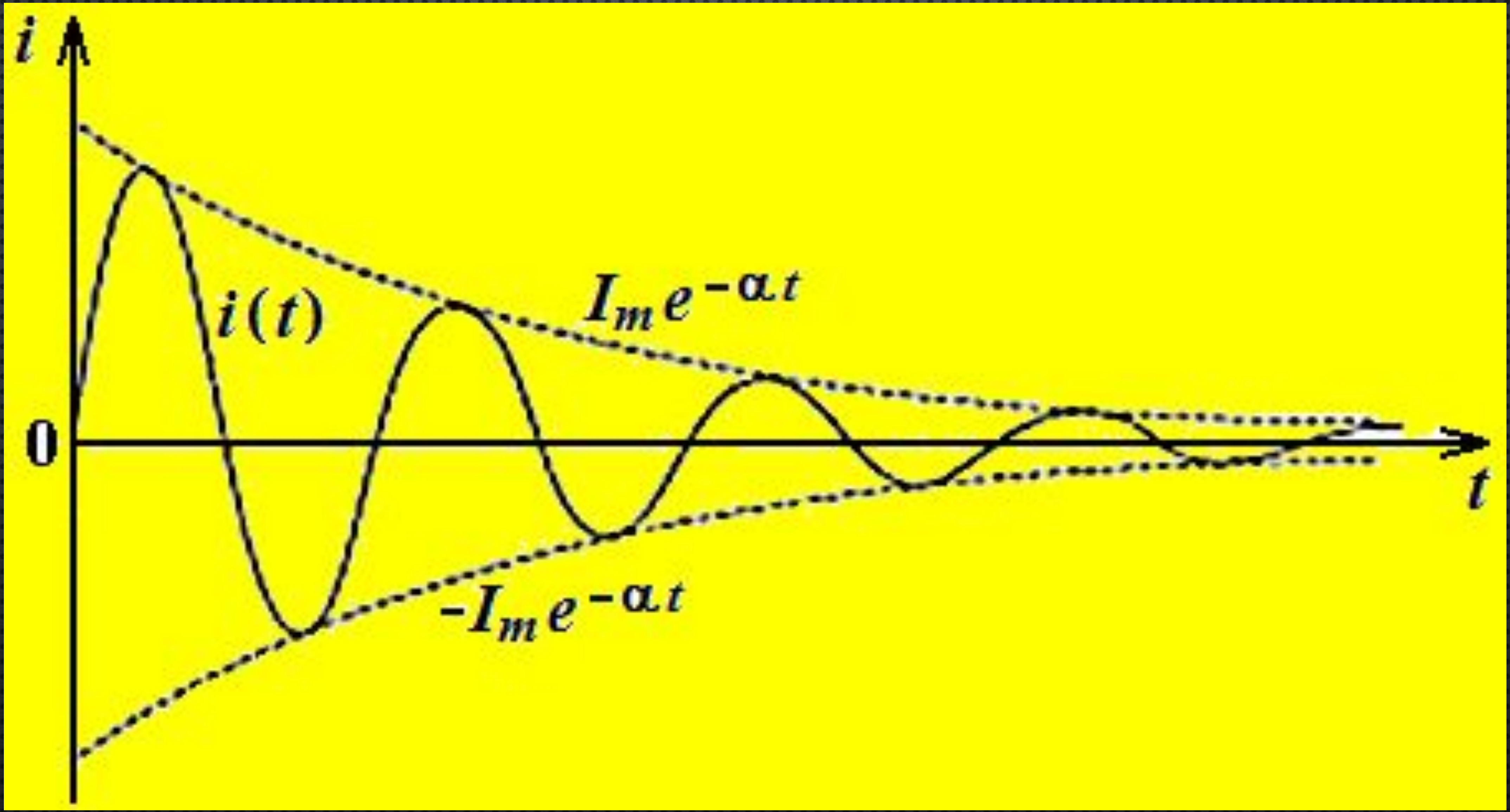

Рисунок 3 – График изменения во времени тока в переходном колебательном процессе в последовательном колебательном контуре при замыкании цепи на источник постоянного напряжения

Расчет переходных процессов в RLC-цепи при $R = 2\rho$

$$p_1 = p_2 = p = -\alpha$$

$$i(t) = -\frac{U}{L}\lim_{p_2 \to p_1}\frac{e^{p_2 t} - e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} = -\frac{U}{L}\lim_{p_2 \to p_1}\frac{\frac{d}{dp_2}\left(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}\right)}{\frac{d}{dp_2}\left(p_1 - p_2\right)}$$

$$i(t) = -\frac{U}{L}\frac{t \cdot e^{p_2 t}}{-1} = \frac{U}{L}t \cdot e^{p_2 t}$$

$$i(t) = \frac{U}{L}t \cdot e^{-\alpha t}$$

$$u_C(t) = U - U \lim_{p_2 \to p_1} \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2}$$

$$u_C(t) = U - U \lim_{p_2 \to p_1} \frac{\frac{d}{dp_2}(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t})}{\frac{d}{dp_2}(p_1 - p_2)} = U - U \frac{p_1 t e^{p_2 t} - e^{p_1 t}}{-1}$$

$$u_C(t) = U[1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}]$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{L}t\cdot e^{-\alpha t}\right) = U(e^{-\alpha t} - \alpha t\, e^{-\alpha t})$$

$$u_L(t) = Ue^{-\alpha t}(1 - \alpha t\,)$$

Переходный процесс, протекающий в колебательном контуре при $R = 2\rho$ называется *предельным апериодическим процессом*, т.к. при дальнейшем уменьшении активного сопротивления R ниже значения $R = 2\rho = 2\sqrt{L/C}$ переходный процесс превращается из апериодического в колебательный. При этом активное сопротивление, равное удвоенному значению характеристического сопротивления ($R = 2\rho$), называется критическим сопротивлением контура.

При выполнении условия $R \ll 2\rho$, т.е. при идеальном случае отсутствия активного сопротивления в контуре колебания в нем становятся незатухающими ($\alpha = 0$). При этом ток в контуре будет изменятся по гармоническому закону

Расчет переходных процессов в *RLC*-цепи при замыкании на источник синусоидального напряжения

$R > 2\rho$

$$R \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = u(t)$$

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{du}{dt}$$

$$i(t) = i' + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$i' = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$I_m = U_m / z$$

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\psi_i = \psi_u - \varphi$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

$$i(0) = 0 = i' + A_1 e^{p_1 \cdot 0} + A_2 e^{p_2 \cdot 0}$$

$$I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) + A_1 + A_2 = 0$$

$$u_L(0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = u(0)$$

$$U_m \sin \psi_u = L \left. \frac{di'}{dt} \right|_{t=0} + L p_1 A_1 + L p_2 A_2$$

$$U_m \sin \psi_u = I_m z \sin(\psi_i + \varphi) = I_m(z \cos \varphi \sin \psi_i + z \sin \varphi \cos \psi_i) =$$

$$= I_m(R \sin \psi_i + x \cos \psi_i) = I_m \left[R \sin \psi_i + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \psi_i \right]$$

$$L \left. \frac{di'}{dt} \right|_{t=0} = \omega L I_m \cos \psi_i$$

$$\begin{cases} I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) + A_1 + A_2 = 0\,, \\ -I_m \dfrac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i + 2 I_m \alpha \sin \psi_i = p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{cases}$$

$$A_1 = -\frac{I_m}{p_1 - p_2}\left(p_1 \sin\psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega}\cos\psi_i\right)$$

$$A_2 = \frac{I_m}{p_1 - p_2}\left(p_2 \sin\psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega}\cos\psi_i\right)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \frac{\sin\psi_i}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}\right) -$$

$$- I_m \frac{\cos\psi_i}{p_1 - p_2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

$R < 2\rho$

$$\frac{1}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}\right) = \frac{\omega_0}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin(\omega'' t + \theta)$$

$$\frac{1}{p_1 - p_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) = \frac{1}{\omega''} e^{-\alpha t} \sin \omega'' t$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) -$$
$$- \frac{\omega_0}{\omega''} I_m e^{-\alpha t}\left[\sin \psi_i \sin(\omega'' t + \theta) + \frac{\omega_0}{\omega} \cos \psi_i \sin \omega'' t\right]$$

При $\omega'' \approx \omega$, $\alpha \ll \omega_0$, в первые мгновения после коммутации $e^{-\alpha t} \approx 1$:

$$i(t) = I_m[\sin(\omega t + \psi_i) - \sin(\omega'' t + \psi_i)]$$

Формула биений колебаний тока

$$i(t) = 2\, I_m \sin\left(\frac{\omega - \omega''}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega''}{2} t + \psi_i\right)$$

При $\omega'' = \omega,\ \alpha \ll \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega \approx \omega_0,\ \theta \approx \pi/2$:

$$i(t) \approx I_m(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \psi_i)$$

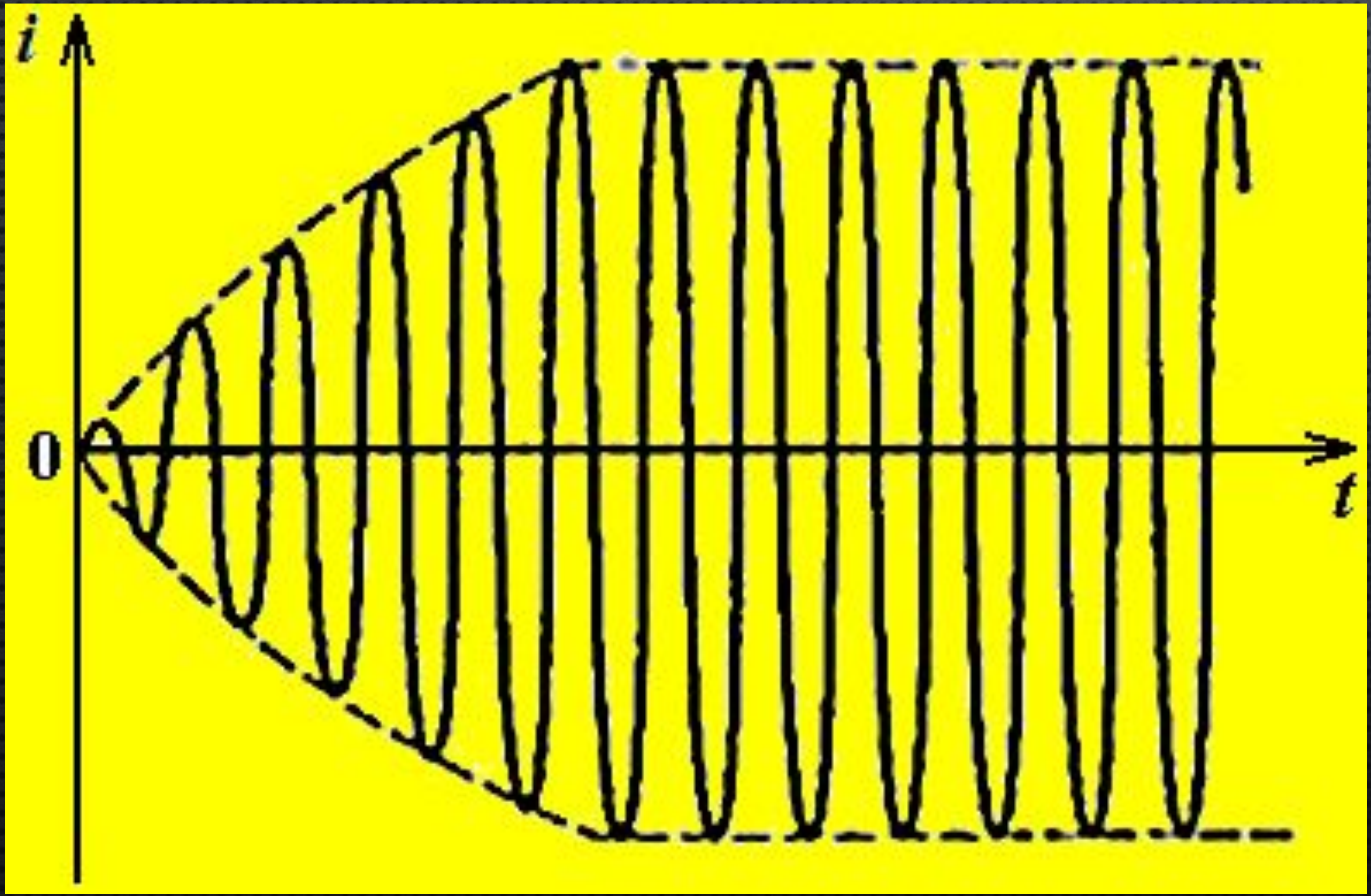

Рисунок 4 – График изменения во времени тока в переходном колебательном процессе в последовательном колебательном контуре при замыкании цепи на источник синусоидального напряжения

Амплитуда установившегося напряжения на конденсаторе в силу близости частоты колебаний напряжения источника резонансной частоте может кратно (даже многократно) превысить амплитуду приложенного напряжения источника энергии, т.е. на конденсаторе наблюдается *перенапряжение*

При коммутациях в линейных электрических цепях, содержащих только резистивные элементы, установившийся режим наступает сразу (мгновенно) после коммутации

Отсутствие в цепи резистивных элементов (присутствие только реактивных элементов) в линейной электрической цепи означает отсутствие диссипации энергии (утилизации в тепло) в ней, следовательно, колебательные процессы взаимного превращения электрической и магнитной энергии в реактивных элементах будут протекать бесконечно долго без потерь, и колебания тока в цепи будут незатухающими