Потоки минимальной стоимости

Дана сеть $G = (V,E)$, на каждой дуге $e \in E$ задана пропускная способность $c(e) > 0$ и *удельная стоимость* $d(e)$, выделен источник s и сток t. Если в сети имеется поток f, то его стоимость определяется как

$$S(f) = \sum_{e \in E} d(e) f(e) .$$

Задача состоит в поиске допустимого потока f, имеющего заданную величину m и минимальную стоимость $S(f)$.

Граф модифицированных стоимостей $G_f = (V_f, E_f)$ имеет $V_f = V$. Дуги строятся по следующему правилу:

1) если $e \in E$ и $f(e) = 0$, то дуга e строится в G_f с той же пропускной способностью $c_f(e) = c(e)$ и стоимостью $d_f(e) = d(e)$;

2) если $e = (x, y) \in E$ и $f(e) = c(e)$, то в G_f строится обратная дуга $\bar{e} = (y, x)$ с пропускной способностью $c_f(\bar{e}) = c(e)$ и удельной стоимостью $d_f(\bar{e}) = -d(e)$;

3) если $e = (x, y) \in E$ и $0 < f(e) < c(e)$, то в G_f строятся две дуги $e = (x, y), \bar{e} = (y, x)$ с $c_f(e) = c(e) - f(e),\ d_f(e) = d(e),\ c_f(\bar{e}) = f(e),\ d_f(\bar{e}) = -d(e)$.

Легко показать, что каждому простому ориентированному путь в сети G_f, ведущему из источника в сток, соответствует увеличивающая цепь в сети G.

Потоки минимальной стоимости

Пусть h некоторый поток в сети G_f . Определим по h поток $\overline{h}$ в сети G по формуле $\overline{h}(e)=h(e)-h(\overline{e})$ Для любой вершины $v\in V$ выполняется равенство $div\,\overline{h}(v)=div\,h(v).$ Поэтому $\overline{h}$ - поток. Здесь $div\,h(v)=\sum_{e\in O^+(v)} h(e)-\sum_{e\in O^-(v)} h(e)$

Лемма 1. Пусть f - допустимый поток в сети $G = (V,E)$, h – допустимый поток в сети $G_f =(V_f ,E_f)$ и $\overline{h}$ - определённый выше поток в сети G . Тогда поток $f+\overline{h}$ допустим в G , причём $v(\overline{h})=v(h)$ и $S(\overline{h})=S(h)$.

Доказательство. В силу допустимости потока h в сети G_f получим

$$0\le h(e)\le c(e)-f(e) \text{ и } 0\le h(\overline{e})\le f(e)\ \forall\, e\in E.$$

Поэтому $0\le f(e)+\overline{h}(e)\le c(e)$, что означает допустимость потока $f+\overline{h}$. Из равенства $div\,\overline{h}(v)=div\,h(v)$ вытекает $v(\overline{h})=v(h).$ Наконец

$$S(\overline{h})=\sum_{e\in E} d(e)\,(h(e)-h(\overline{e}))=\sum_{e'\in E_f} h(e')\,d_f(e')=S(h)\ .$$

■

Для потоков f , g в сети G определим новый поток $h=g\ominus f$ в сети G_f :

1) если $e\in E$ и $g(e) > f(e)$, то $h(e) = g(e) - f(e)$;

2) если $e=(x,y)\in E$ и $g(e)< f(e)$, то $h(\overline{e})=f(e)-g(e)$;

3) на всех остальных дугах сети G_f поток считаем равным 0.

Очевидно $g\ominus f$ всегда неотрицательна. Поэтому, вообще говоря $g\ominus f \neq f\ominus g$. Более того, функции $g\ominus f$ и $f\ominus g$ определены на разных сетях G_f и G_g .

Отметим, что для любых допустимых потоков f и g в сети G и для любой вершины v из V выполняется равенство $div\,(g\ominus f)\,(v) = div\,(g-f)\,(v)$.

Потоки минимальной стоимости

Лемма 2. Для любых двух допустимых потоков f и g в сети $G = (V,E)$ поток $h = g \ominus f$ в сети $G_f = (V_f, E_f)$ также допустим. Для него справедливы равенства $v(h) = v(g) - v(f)$ и $S(h) = S(g) - S(f)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную дугу $e \in E$. В силу допустимости потоков f, g, если $g(e) > f(e)$, то $h(e) = g(e) - f(e) \leq c(e) - f(e)$, а если $g(e) < f(e)$, то $h(\bar{e}) = f(e) - g(e) \leq f(e)$. Отсюда видно, что поток h допустим. Из $div\,(g \ominus f)\,(v) = div\,(g-f)\,(v)$ вытекает, что мощность потока h равна

$\gamma(g - f) = \gamma(g) - \gamma(f)$. Далее, из определения h следует, что для любой дуги $e \in E$ выполняется равенство $(g(e) - f(e))d(e) = h(e)d_f(e)+h(\bar{e})d_f(\bar{e})$ (в правой части которого одно из слагаемых нулевое или вообще отсутствует). Поэтому $S(h)= \sum_{e' \in E_f} h(e')d_f(e')= \sum_{e \in E} (g(e) - f(e))d(e) =$

$= S(g - f)=S(g) - S(f)$. ■

Потоки минимальной стоимости

Удельной стоимостью пути (или цикла) в сети будем называть сумму удельных стоимостей входящих в него дуг.

Теорема 1. (*Критерий оптимальности потока фиксированной мощности*). Пусть дана сеть G с заданными пропускными способностями и удельными стоимостями дуг, источником s и стоком t. Тогда допустимый поток f в сети G имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков той же величины в том и только том случае, когда в графе G_f нет контуров с отрицательной удельной стоимостью.

Доказательство. Пусть f – поток величины m с минимальной стоимостью. Предположим, что в графе G_f есть контур с отрицательной удельной стоимостью. Обозначим через ρ минимальную пропускную способность дуг этого контура. Число ρ положительно. Пропустим по контуру поток h, который принимает значение ρ на всех дугах контура и нулевое значение на остальных дугах. Легко видеть, что этот поток допустим в сети G_f , имеет отрицательную стоимость, а его величина равна нулю. Ему соответствует поток $\bar{h}$ в сети G. По лемме 1 поток $f + \bar{h}$ допустим, имеет величину $v(f)$, а его стоимость строго меньше $S(f)$. Значит, стоимость потока f не минимальна.

С другой стороны, допустим, что поток f не оптимален. Тогда существует такой допустимый поток g в сети G, что $\gamma(g) = \gamma(f)$, а $S(g)<S(f)$. Напомним, что $\gamma(f) = div\ f(s) = -\mathrm{div}\ f(t)$. Поэтому разность $g - f$ является циркуляцией, т.е. потоком величины 0. В силу $div\ (g \ominus f)\ (v) = div\ (g-f)\ (v)$ поток $h = g \ominus f$ в графе G_f тоже является циркуляцией. По лемме 2 ее стоимость $S(h)=S(g)-S(f)$ отрицательна. Но сама циркуляция h положительна. Она раскладывается в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров. Стоимость h равна сумме стоимостей этих потоков. Следовательно, хотя бы один из потоков имеет отрицательную стоимость. Но тогда и соответствующий контур имеет отрицательную удельную стоимость. ■

Потоки минимальной стоимости

Следствие 1. Нулевой поток в сети G тогда и только тогда имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков нулевой величины, когда в G нет контура с отрицательной удельной стоимостью.

Следствие 2. Допустимый поток f в сети G имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков той же величины в том и только том случае, когда не существует потока h вдоль неориентированного цикла в сети G, который удовлетворял бы следующим двум условиям: а) поток $f + h$ допустим и б) $S(h) < 0$.

Алгоритм Басакера − Гоуэна

На каждом его шаге находится наиболее дешевый ориентированный путь из s в t в графе модифицированных стоимостей G_f. По леммам 1, 2 этому пути соответствует увеличивающая цепь минимальной удельной стоимости в сети G. Затем по этой цепи пропускается максимальный поток, который можно добавить к имеющемуся потоку f .

Шаг 0**.** В сети G пропускаем нулевой поток f. Его величина и стоимость равны нулю.

Шаг 1. Строим граф модифицированных стоимостей G_f.

Шаг 2. Если в G_f нет ни одного ориентированного пути из s в t, то мощность потока f не может быть увеличена, и задача не имеет решения. В противном случае среди всех путей из s в t в графе G_f находим путь с минимальной удельной стоимостью. Обозначим его P_f.

Шаг 3. В исходной сети G определяем неориентированную цепь P, соответствующую пути P_f. Для всех дуг e из цепи P вычисляем числа $\rho(e)$: на прямых дугах $\rho(e) = c(e) - f(e)$, а на обратных дугах $\rho(e) = f(e)$. Затем находим $\rho = \min\{\rho(e), m - v(f) \mid e \in P\}$. На прямых дугах цепи P увеличиваем поток f на ρ, а на обратных дугах уменьшаем поток f на ρ. При этом величина потока увеличивается на ρ.

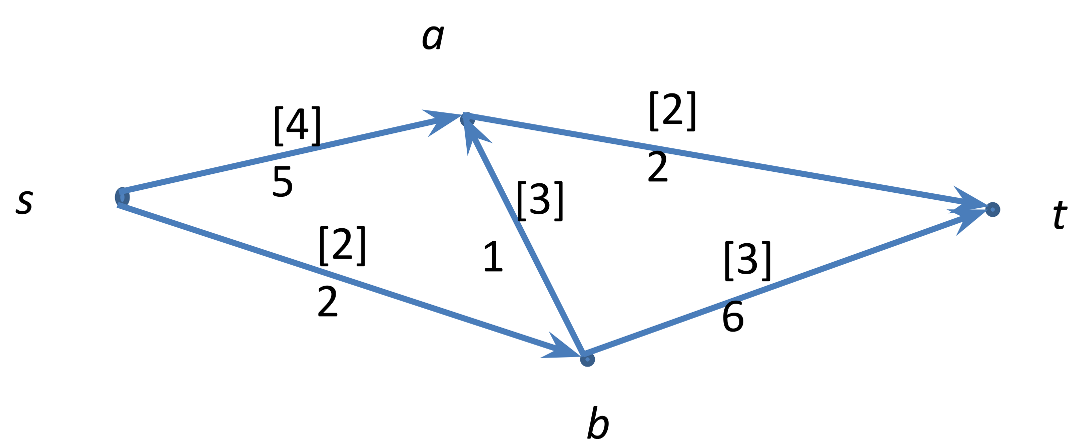
Шаг 4. Если величина нового потока меньше m, то переходим к шагу 1. Если же она равна m, то в сети построен оптимальный поток мощности m.

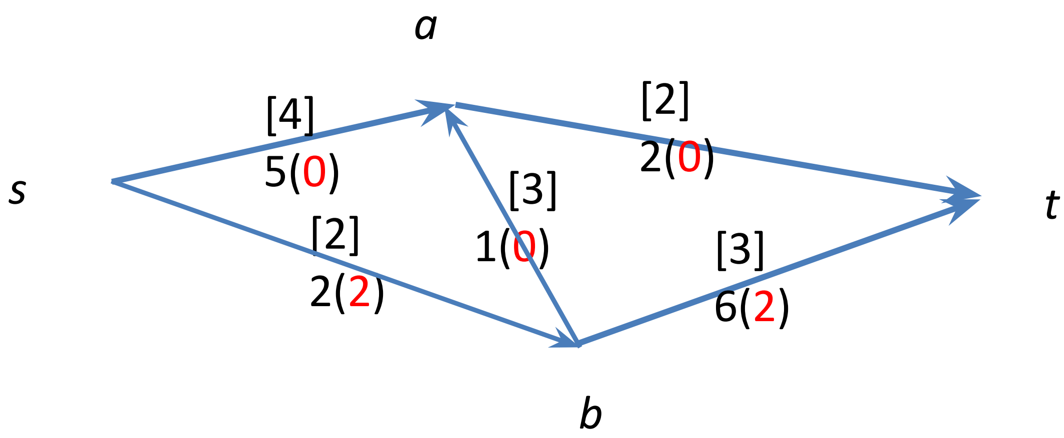
Потоки минимальной стоимости

Теорема 1 показывает, что алгоритм Басакера - Гоуэна имеет смысл применять только к таким сетям *G*, в которых нет контуров отрицательной удельной стоимости. Выполнение или невыполнение этого условия можно проверять с помощью алгоритма Форда-Беллмана или алгоритма Флойда.

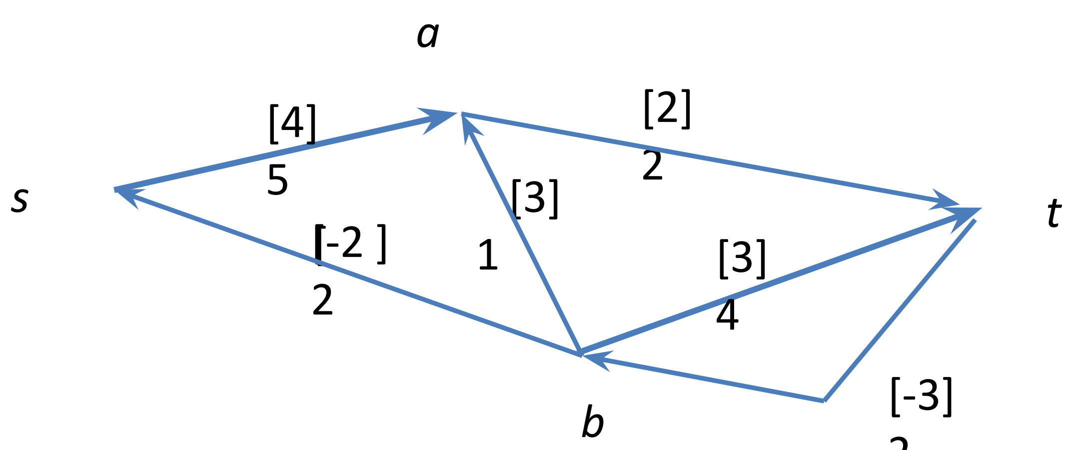
Для поиска самого дешевого пути из s в t в графе G_f (шаг 2 алгоритма Басакера - Гоуэна) тоже можно использовать алгоритмы Форда-Беллмана и Флойда.

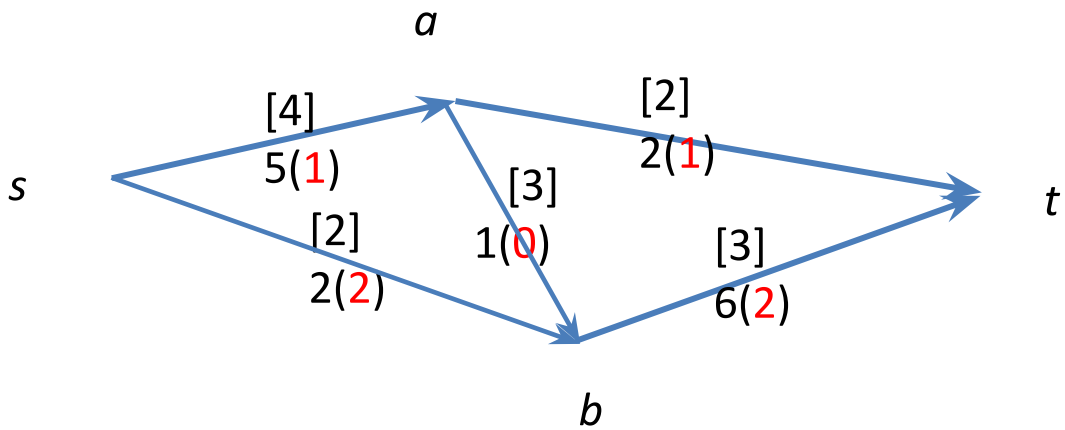
Пример. Построить поток величиной m=3 с минимальной стоимостью в сети *G.* Здесь без скобок указана пропускная способность, в квадратных скобках удельная стоимость.





γ=2, S=10.





γ=3, S=16.

Потоки минимальной стоимости
Алгоритм Клейна

Его сущность заключается в том, что вначале нужно найти *какой-нибудь* поток f величины m, а затем последовательно уменьшать его стоимость, перестраивая вдоль имеющихся циклов с отрицательной удельной стоимостью. При этих перестройках величина потока f будет сохраняться. В тот момент, когда циклы с отрицательной удельной стоимостью исчезнут, поток f станет оптимальным.

Шаг 0. Находим любой допустимый поток f величины $\gamma(f) = m$.

Это можно сделать с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона (в котором вычисления нужно проводить до тех пор, пока поток не достигнет величины m). Если в сети не существует допустимого потока величины m, то задача не имеет решения.

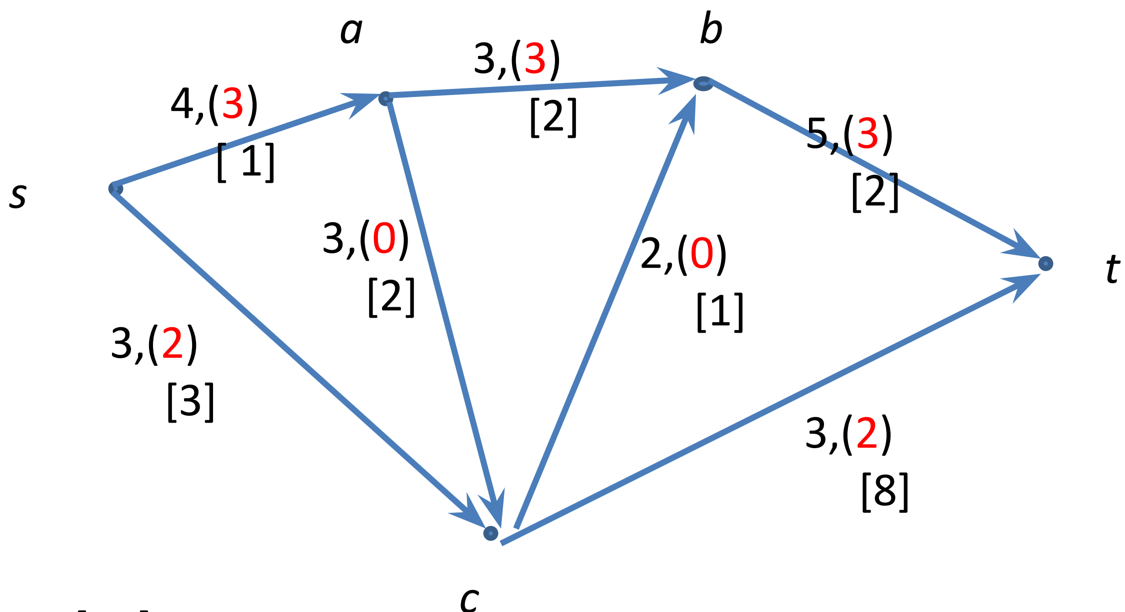
Шаг 1. Строим граф модифицированных стоимостей G_f . Если в нем нет контуров с отрицательной удельной стоимостью, то задача решена: построенный поток f имеет минимальную стоимость среди потоков величины m. В противном случае находим в графе G_f контур P_f с отрицательной удельной стоимостью (например, с помощью алгоритма Флойда).

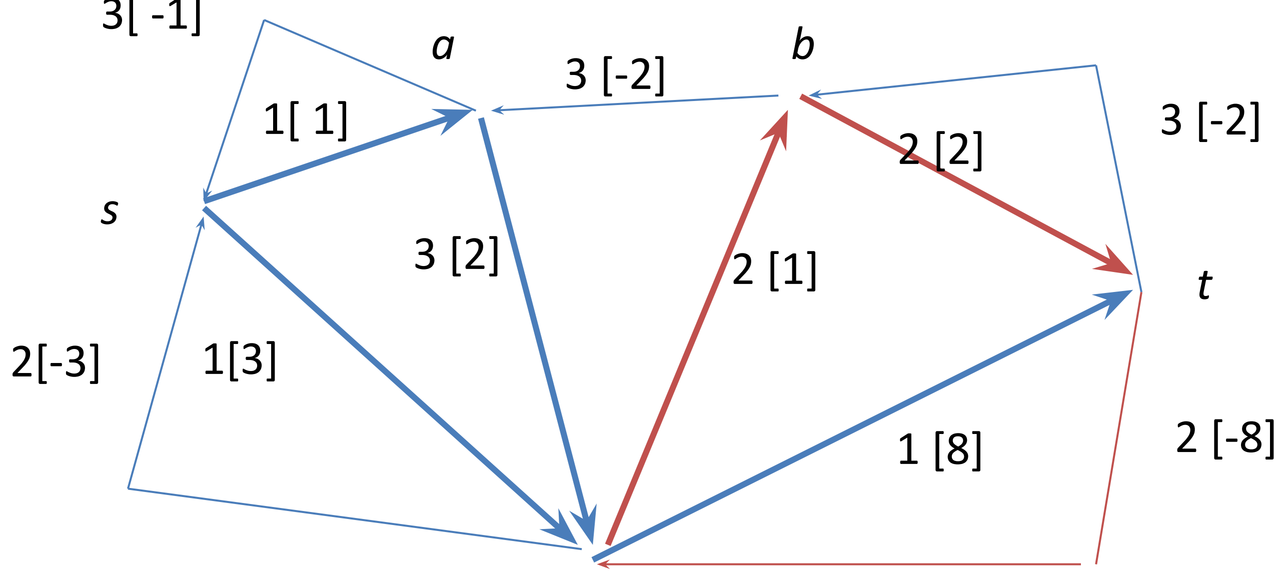
Шаг 2. В исходной сети G определяем неориентированный цикл P, соответствующий контуру P_f. Все дуги $e \in P$ разбиваются на два класса: *прямые,* для которых $e \in P_f$, и *обратные,* для которых $\bar{e} \in P_f$ - (где $\bar{e}$ - дуга, противоположная e). Вычисляем $\rho = \min\{p(e) \mid e \in P\}$, где $\rho(e) = c(e) - f(e)$ на прямых дугах и $\rho(e) = f(e)$ на обратных дугах.

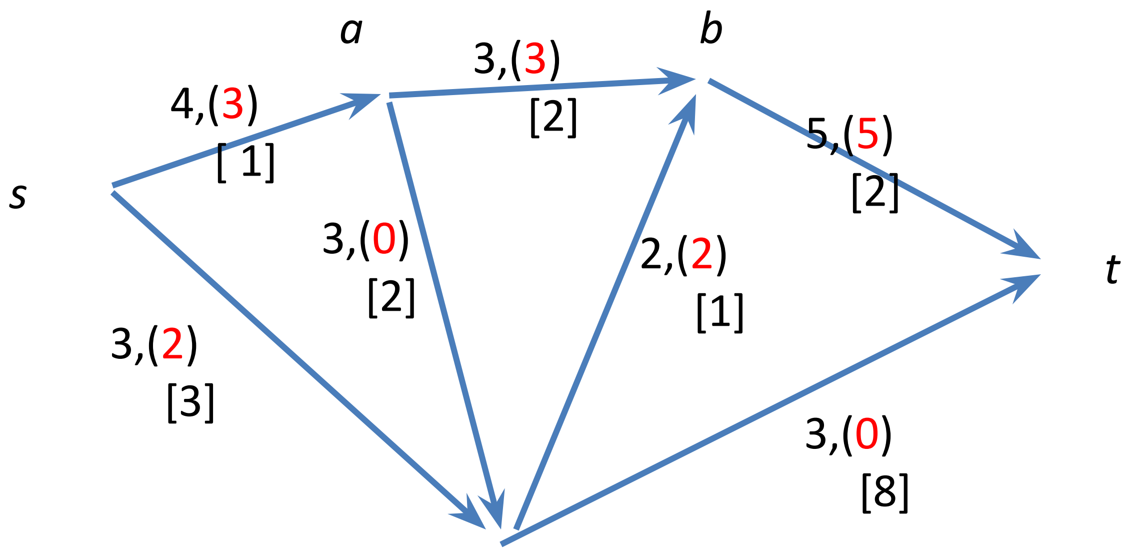
Шаг 3. На прямых дугах цикла P увеличиваем поток f на ρ, а на обратных дугах цикла P уменьшаем поток f на ρ. Переходим к шагу 1.

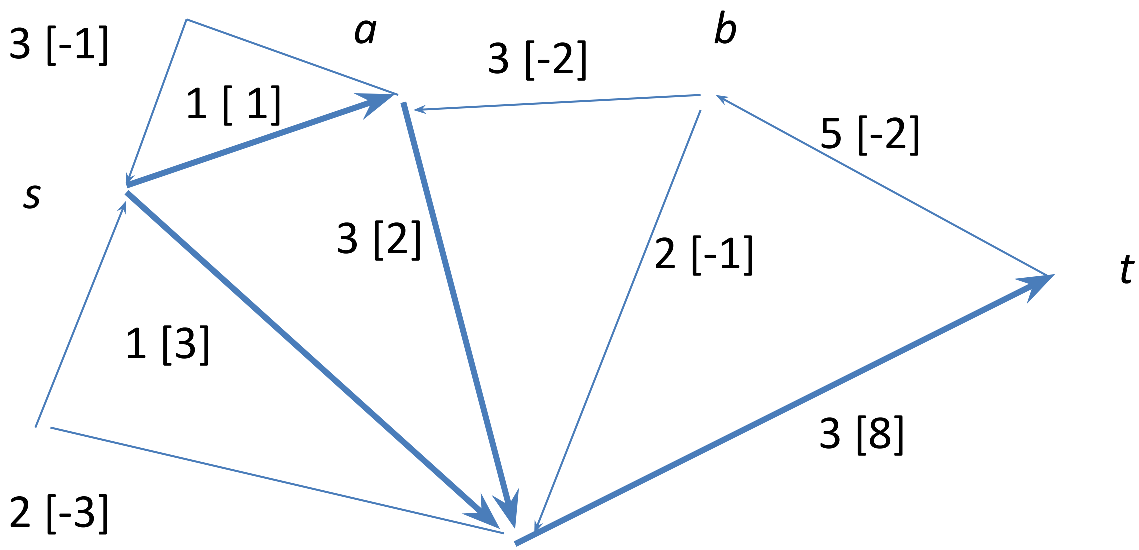
Потоки минимальной стоимости

Пример. Построить поток величиной 5 с минимальной стоимостью в следующей сети:






a
b
s
t
4,(3)
[1]
3,(3)
[2]
5,(5)
[2]
3,(0)
[2]
2,(2)
[1]
3,(2)
[3]
3,(0)
[8]


a
b
s
t
3 [-1]
1 [1]
3 [-2]
5 [-2]
3 [2]
2 [-1]
1 [3]
3 [8]
2 [-3]