

Потоки минимальной стоимости

Дана сеть $G = (V, E)$, на каждой дуге $e \in E$ задана пропускная способность $c(e) > 0$ и удельная стоимость $d(e)$, выделен источник s и сток t . Если в сети имеется поток f , то его стоимость определяется как

$$S(f) = \sum_{e \in E} d(e) f(e).$$

Задача состоит в поиске допустимого потока f , имеющего заданную величину m и минимальную стоимость $S(f)$.

Граф модифицированных стоимостей $G_f = (V_f, E_f)$ имеет $V_f = V$. Дуги строятся по следующему правилу:

- 1) если $f(e) = 0$, то дуга e строится в G_f с той же пропускной способностью $c_f(e) = c(e)$ и стоимостью $d_f(e) = d(e)$;
- 2) если $e = (x, y) \in E$ и $f(e) = c(e)$, то в G_f строится обратная дуга $\bar{e} = (y, x)$ с пропускной способностью $c_f(\bar{e}) = c(e)$ и удельной стоимостью $d_f(\bar{e}) = -d(e)$;
- 3) если $e = (x, y) \in E$ и $0 < f(e) < c(e)$, то в G_f строятся две дуги $e = (x, y)$, $\bar{e} = (y, x)$ с $c_f(e) = c(e) - f(e)$, $d_f(e) = d(e)$, $c_f(\bar{e}) = f(e)$, $d_f(\bar{e}) = -d(e)$.

Легко показать, что каждому простому ориентированному пути в сети G_f , ведущему из источника в сток, соответствует увеличивающая цепь в сети G .

Потоки минимальной стоимости

Пусть h некоторый поток в сети G_f . Определим по h поток \bar{h} в сети G по формуле $\bar{h}(e) = h(e) - h(\bar{e})$. Для любой вершины $v \in V$ выполняется равенство $div \bar{h}(v) = div h(v)$. Поэтому \bar{h} - поток. Здесь $div h(v) = \sum_{e \in O^+(v)} h(e) - \sum_{e \in O^-(v)} h(e)$.

Лемма 1. Пусть f - допустимый поток в сети $G = (V, E)$, h - допустимый поток в сети $G_f = (V_f, E_f)$ и \bar{h} - определённый выше поток в сети G . Тогда поток $f + \bar{h}$ допустим в G , причём $v(\bar{h}) = v(h)$ и $S(\bar{h}) = S(h)$.

Доказательство. В силу допустимости потока h в сети G_f получим

Поэтому $0 \leq f(e) + \bar{h}(e) \leq c(e)$ что означает допустимость потока $f + \bar{h}$. Из равенства $div \bar{h}(v) = div h(v)$ вытекает $v(\bar{h}) = v(h)$. Наконец

$$S(\bar{h}) = \sum_{e \in E} d(e)(h(e) - h(\bar{e})) = \sum_{e \in E_f} h(e') d_f(e') = S(h).$$

■ Для потоков f, g в сети G определим новый поток $h = g \ominus f$ в сети G_f :

- 1) если $e \in E$ и $g(e) > f(e)$, то $h(e) = g(e) - f(e)$;
- 2) если $e \in E$ и $g(e) < f(e)$, то $h(\bar{e}) = f(e) - g(e)$;
- 3) на всех остальных дугах сети G_f поток считаем равным 0.

Очевидно $g \ominus f$ всегда неотрицательна. Поэтому, вообще говоря $g \ominus f \neq f \ominus g$. Более того, функции $g \ominus f$ и $f \ominus g$ определены на разных сетях G_f и G_g .

Отметим, что для любых допустимых потоков f и g в сети G и для любой вершины v из V выполняется равенство $div(g \ominus f)(v) = div(g - f)(v)$.

Потоки минимальной стоимости

Лемма 2. Для любых двух допустимых потоков f и g в сети $G = (V, E)$ поток $h = g \ominus f$ в сети $G_f = (V_f, E_f)$ также допустим. Для него справедливы равенства $v(h) = v(g) - v(f)$ и $S(h) = S(g) - S(f)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную дугу $e \in E$. В силу допустимости потоков f , g , если $g(e) > f(e)$, то $h(e) = g(e) - f(e) \leq c(e) - f(e)$, а если $g(e) < f(e)$, то $h(\bar{e}) = f(e) - g(e) \leq f(e)$. Отсюда видно, что поток h допустим. Из $\text{div}(g \ominus f)(v) = \text{div}(g - f)(v)$ вытекает, что мощность потока h равна

$\gamma(g - f) = \gamma(g) - \gamma(f)$. Далее, из определения $\sum_{e \in E_f} (g(e) - f(e))d(e) = \sum_{e \in E_f} h(e)d_f(e) + \sum_{e \in E} h(\bar{e})d_f(\bar{e})$ (в правой части которого одно из слагаемых нулевое или вообще отсутствует). Поэтому $S(h) = \sum_{e \in E_f} h(e)d_f(e) + \sum_{e \in E} h(\bar{e})d_f(\bar{e}) = \sum_{e \in E_f} (g(e) - f(e))d(e) = S(g - f) = S(g) - S(f)$. ■

Потоки минимальной стоимости

Удельной стоимостью пути (или цикла) в сети будем называть сумму удельных стоимостей входящих в него дуг.

Теорема 1. (Критерий оптимальности потока фиксированной мощности). Пусть дана сеть G с заданными пропускными способностями и удельными стоимостями дуг, источником s и стоком t . Тогда допустимый поток f в сети G имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков той же величины в том и только том случае, когда в графе G_f нет контуров с отрицательной удельной стоимостью.

Доказательство. Пусть f – поток величины m с минимальной стоимостью. Предположим, что в графе G_f есть контур с отрицательной удельной стоимостью. Обозначим через ρ минимальную пропускную способность дуг этого контура. Число ρ положительно. Пропустим по контуру поток h , который принимает значение ρ на всех дугах контура и нулевое значение на остальных дугах. Легко видеть, что этот поток допустим в сети G_f , имеет отрицательную стоимость, а его величина равна нулю. Ему соответствует поток в сети G . По лемме 1 поток $f + h$ допустим, имеет величину $v(f)$, а его стоимость строго меньше $S(f)$. Значит, стоимость потока f не минимальна.

С другой стороны, допустим, что поток f не оптимален. Тогда существует такой допустимый поток g в сети G , что $v(g) = v(f)$, а $S(g) < S(f)$. Напомним, что $v(f) = \text{div } f(s) = -\text{div } f(t)$. Поэтому разность $g - f$ является циркуляцией, т.е. потоком величины 0. В силу $\text{div } (g \ominus f)(v) = \text{div } (g - f)(v)$ поток $h = g \ominus f$ в графе G_f тоже является циркуляцией. По лемме 2 ее стоимость $S(h) = S(g) - S(f)$ отрицательна. Но сама циркуляция h положительна. Она раскладывается в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров. Стоимость h равна сумме стоимостей этих потоков. Следовательно, хотя бы один из потоков имеет отрицательную стоимость. Но тогда и соответствующий контур имеет отрицательную удельную стоимость. ■

Потоки минимальной стоимости

Следствие 1. Нулевой поток в сети G тогда и только тогда имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков нулевой величины, когда в G нет контура с отрицательной удельной стоимостью.

Следствие 2. Допустимый поток f в сети G имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков той же величины в том и только том случае, когда не существует потока h вдоль неориентированного цикла в сети G , который удовлетворял бы следующим двум условиям: а) поток $f + h$ допустим и б) $S(h) < 0$.

Алгоритм Басакера – Гоуэна

На каждом его шаге находится наиболее дешевый ориентированный путь из s в t в графе модифицированных стоимостей G_f . По леммам 1, 2 этому пути соответствует увеличивающая цепь минимальной удельной стоимости в сети G . Затем по этой цепи пропускается максимальный поток, который можно добавить к имеющемуся потоку f .

Шаг 0. В сети G пропускаем нулевой поток f . Его величина и стоимость равны нулю.

Шаг 1. Строим граф модифицированных стоимостей G_f .

Шаг 2. Если в G_f нет ни одного ориентированного пути из s в t , то мощность потока f не может быть увеличена, и задача не имеет решения. В противном случае среди всех путей из s в t в графе G_f находим путь с минимальной удельной стоимостью. Обозначим его P_f .

Шаг 3. В исходной сети G определяем неориентированную цепь P , соответствующую пути P_f . Для всех дуг e из цепи P вычисляем числа $\rho(e)$: на прямых дугах $\rho(e) = c(e) - f(e)$, а на обратных дугах $\rho(e) = f(e)$. Затем находим $\rho = \min\{\rho(e), m - v(f) \mid e \in P\}$. На прямых дугах цепи P увеличиваем поток f на ρ , а на обратных дугах уменьшаем поток f на ρ . При этом величина потока увеличивается на ρ .

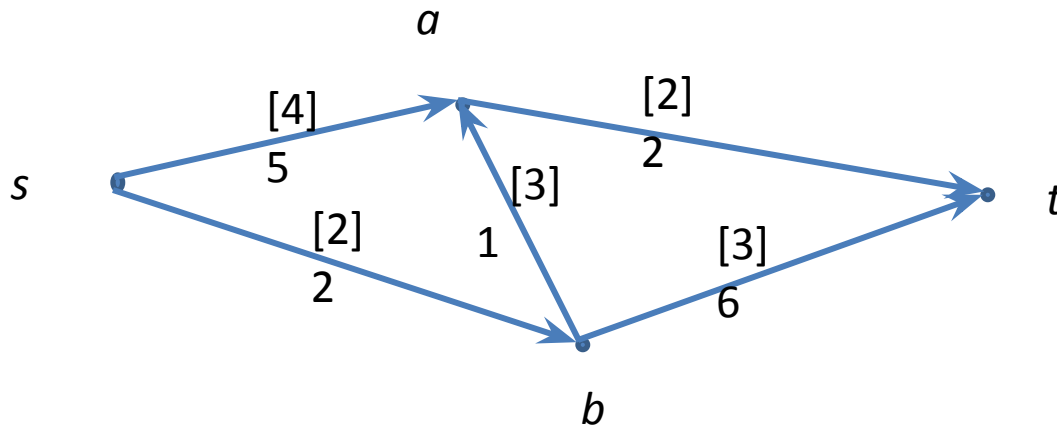
Шаг 4. Если величина нового потока меньше m , то переходим к шагу 1. Если же она равна m , то в сети построен оптимальный поток мощности m .

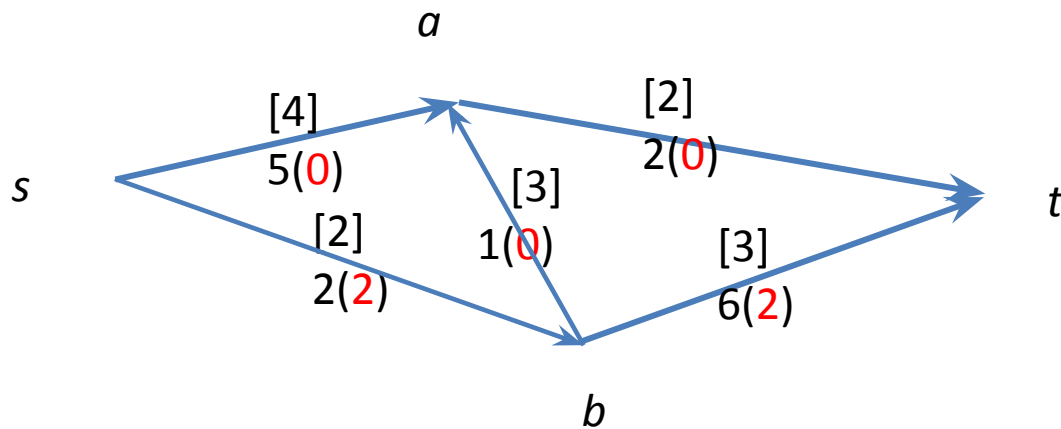
Потоки минимальной стоимости

Теорема 1 показывает, что алгоритм Басакера - Гоуэна имеет смысл применять только к таким сетям G , в которых нет контуров отрицательной удельной стоимости. Выполнение или невыполнение этого условия можно проверять с помощью алгоритма Форда-Беллмана или алгоритма Флойда.

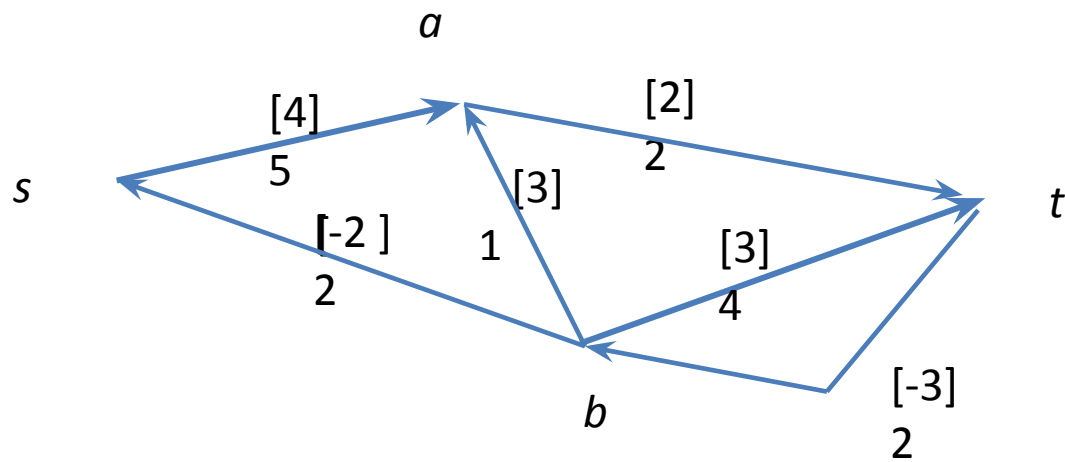
Для поиска самого дешевого пути из s в t в графе G_f (шаг 2 алгоритма Басакера - Гоуэна) тоже можно использовать алгоритмы Форда-Беллмана и Флойда.

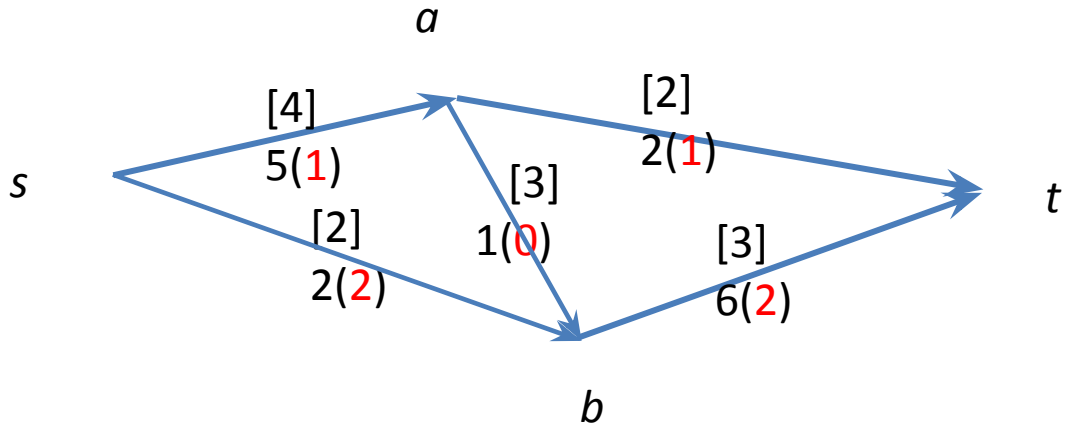
Пример. Построить поток величины $m=3$ с минимальной стоимостью в сети G . Здесь без скобок указана пропускная способность, в квадратных скобках удельная стоимость.





$\gamma=2, S=10.$





$\gamma=3, S=16.$

Потоки минимальной стоимости

Алгоритм Клейна

Его сущность заключается в том, что вначале нужно найти *какой-нибудь* поток f величины m , а затем последовательно уменьшать его стоимость, перестраивая вдоль имеющихся циклов с отрицательной удельной стоимостью. При этих перестройках величина потока f будет сохраняться. В тот момент, когда циклы с отрицательной удельной стоимостью исчезнут, поток f станет оптимальным.

Шаг 0. Находим любой допустимый поток f величины $\gamma(f) = m$.

Это можно сделать с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона (в котором вычисления нужно проводить до тех пор, пока поток не достигнет величины m). Если в сети не существует допустимого потока величины m , то задача не имеет решения.

Шаг 1. Строим граф модифицированных стоимостей G_f . Если в нем нет контуров с отрицательной удельной стоимостью, то задача решена: построенный поток f имеет минимальную стоимость среди потоков величины m . В противном случае находим в графе G_f контур P_f с отрицательной удельной стоимостью (например, с помощью алгоритма Флойда).

Шаг 2. В исходной сети G определяем неориентированный цикл P , соответствующий контуру P_f . Все дуги $e \in P$ разбиваются на два класса: *прямые*, для которых $e \in P_f$ и *обратные*, для которых $\bar{e} \in P_f$ - (где \bar{e} - дуга, противоположная e). Вычисляем $\rho = \min\{\rho(e) \mid e \in P\}$, где $\rho(e) = c(e) - f(e)$ на прямых дугах и $\rho(e) = f(e)$ на обратных дугах.

Шаг 3. На прямых дугах цикла P увеличиваем поток f на ρ , а на обратных дугах цикла P уменьшаем поток f на ρ . Переходим к шагу 1.

Потоки минимальной стоимости

Пример. Построить поток величины 5 с минимальной стоимостью в следующей сети:

