

# ТРЕНИНГ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЕГЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФОВ»

---

Учитель информатики ГБОУ СОШ №2093  
имени А.Н. Савельева  
Павлова Инна Борисовна

# Немного о графах

Теория графов – раздел дискретной математики, находящий свое приложение в прикладных задачах логистики, проектировании информационных сетей, геоинформационных систем, в химии, информатике и программировании, системотехнике, экономике. Так же графы – мощное средство моделирования.

Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер, но несмотря на историю применения насчитывающую около 3-х веков с момента формулировки им классической задачи о кёнигсберских мостах, понятийный аппарат теории не до конца устоялся<sup>1</sup>, а сама теория содержит большое количество нерешенных проблем и недоказанных гипотез..

# Графы в школе

В школьном курсе графы давно применяются для решения задач в начальной школе «Информатика в играх и задачах» А.В.Горячев.

Коротко теория и применение графов изложено в учебниках профильного курса А.Г.Гейн. А.И.Сенокосов «Информатика и ИКТ» 11 класс.

В качестве дополнительного материала в учебниках И.Г.Семакина 7 класс и учебниках углубленного уровня 10-11 класса. В учебниках Л.Л.Босовой (9 класс).

# Графы в ЕГЭ

- В настоящее время в ЕГЭ задачи такого типа сводятся к ОДНОЙ задаче: Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город Х ...(+ могут быть какие-то дополнительные условия). Хотя рисунки, схемы дорог, могут быть весьма замысловатые.
- Обсудим решение с помощью графов:

Номер задачи	Коды проверяемых элементов по кодификатору и элементы содержания	Уровень
1	1.1.2 Процесс передачи информации, источник и приемник. Сигнал, кодирование и декодирование. Искажение информации	Б
5, 15	1.3.1 Описание (информационная модель) реального объекта и процесса, соответствие описания объекту и целям описания. Схемы, таблицы, графики, формулы как описания	Б
11	1.5.3 Индуктивное определение объектов	Б
23	1.5.1 Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания	В
26	1.5.2 Цепочки (конечные последовательности), деревья, списки, графы, матрицы (массивы), псевдослучайные последовательности	В

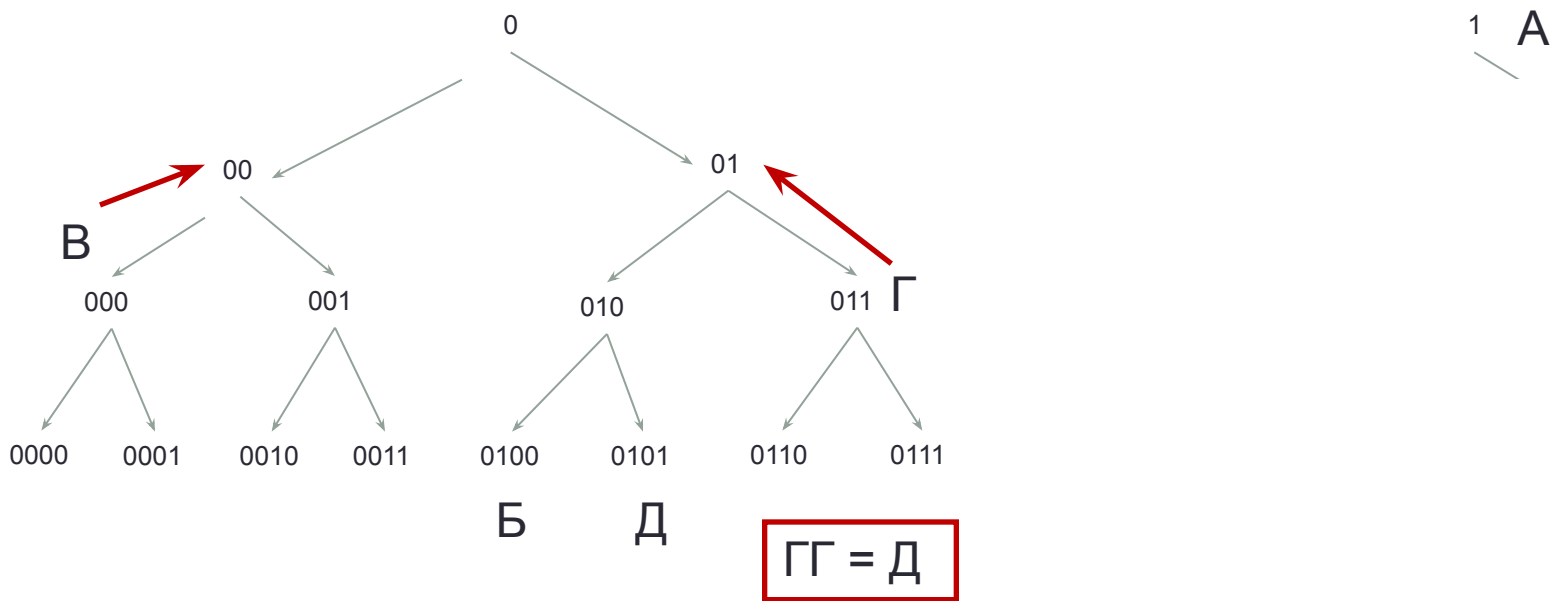
# Задача 1

1 Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г и Д, используется неравномерный двоичный код, позволяющий однозначно декодировать полученную двоичную последовательность. Вот этот код: А – 1; Б – 0100; В – 000; Г – 011; Д – 0101. Требуется сократить для одной из букв длину кодового слова так, чтобы код по-прежнему можно было декодировать однозначно. Коды остальных букв меняться не должны. Каким из указанных способов это можно сделать?

- 1) для буквы Г – 11
- 2) для буквы В – 00
- 3) для буквы Г – 01
- 4) это невозможно

Ответ:

# Решение



**Прямое правило Фано** – никакой код не должен быть началом другого кода.

**Обратное правило Фано** – никакой код не должен быть концом другого кода.

1

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г и Д, используется неравномерный двоичный код, позволяющий однозначно декодировать полученную двоичную последовательность. Вот этот код: А – 0; Б – 100; В – 1010; Г – 111; Д – 110. Требуется сократить для одной из букв длину кодового слова так, чтобы код по-прежнему можно было декодировать однозначно. Коды остальных букв меняться не должны. Каким из указанных способов это можно сделать?

- 1) для буквы В – 101
- 2) это невозможно
- 3) для буквы В – 010
- 4) для буквы Б – 10

Ответ:



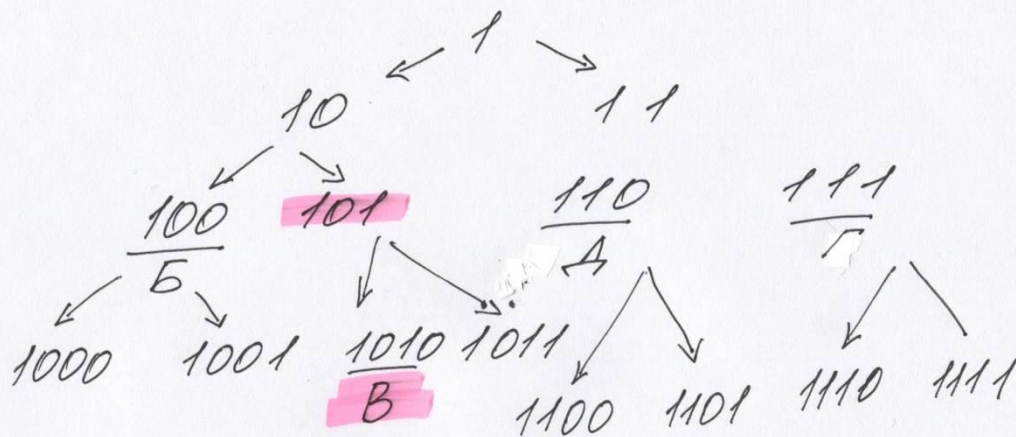
# Решение

[1] - 2 демо 2015

A - 0      Б - 100      В - 1010      Г - 111      Д - 110

обратное правило Фано не выполняется

0 - A



Можно "поэкспериментировать" с другими буквами и убедиться, что обратное правило Фано будет выполняться только в выделенном случае.

Ответ: 1)



1

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв К, Л, М, Н, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы Н использовали кодовое слово 0, для буквы К – кодовое слово 10. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?

*Примечание.* Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

1) 7

2) 8

3) 9

4) 10

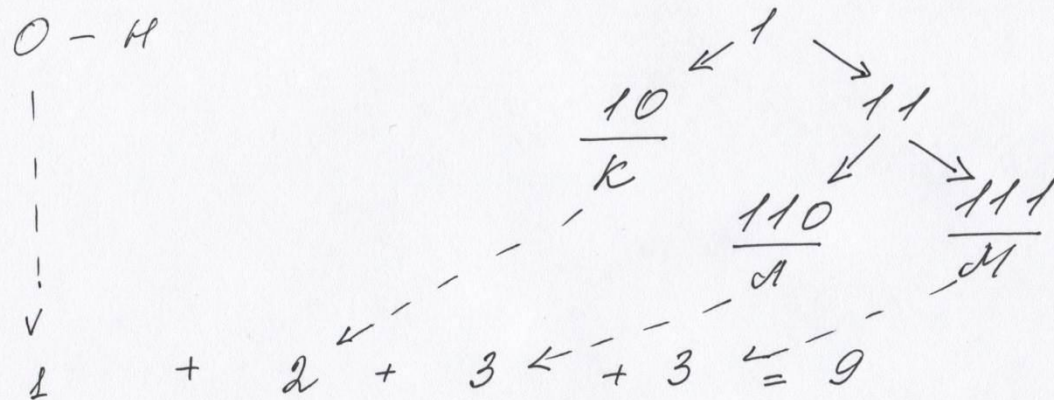
Ответ:

# Решение

1-3 диагностическая от 26.11.2014 вар. 1

К - 10      Л - ?      - М - ?      Н - 0

какое условие Фано не выполняется? (обратное)



Ответ: 3)

**1** Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв К, Л, М, Н, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы Л использовали кодовое слово 1, для буквы М – кодовое слово 01. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?

*Примечание.* Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

1) 10

2) 9

3) 8

4) 7

Ответ:

**9**

# Задача 5

5

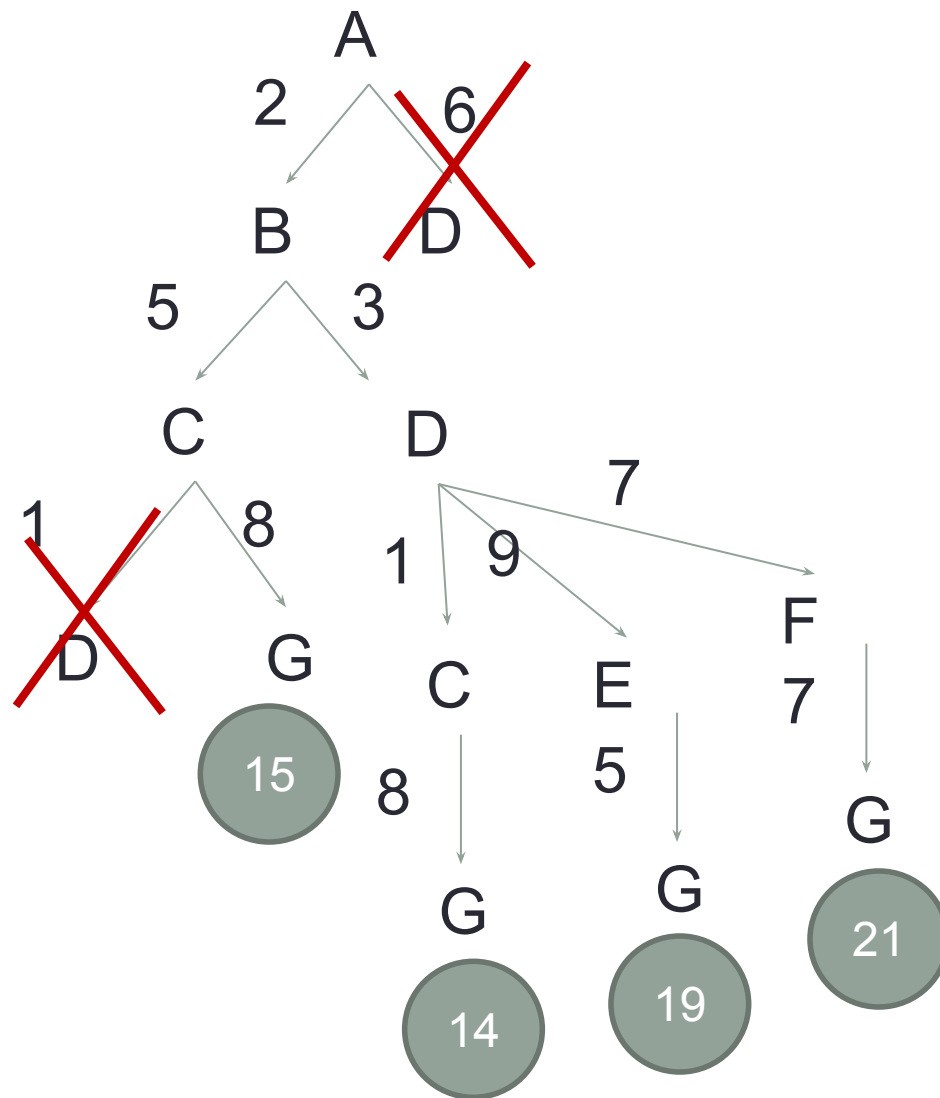
Между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		2		6			
B	2		5	3			
C		5		1			8
D	6	3	1		9	7	
E				9			5
F				7			7
G			8		5	7	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: \_\_\_\_\_.

# Решение



**5**

Между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		2		6			
B	2		5	2			
C		5		4			8
D	6	2	4		2	7	
E				2			5
F				7			7
G			8		5	7	

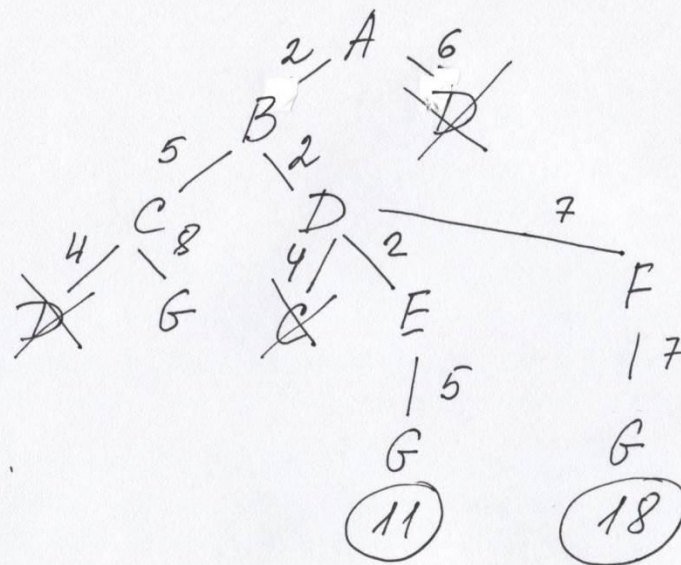
Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: \_\_\_\_\_.



# Решение

5-2 Диагностическая от 26.01.15 Вариант 2



Ответ: 11



**2**

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяжённость каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из A в B есть дорога длиной 4 км, а из B в A дороги нет.

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				30
B			3	4			
C				11			27
D					4	7	10
E						4	8
F					5		2
Z	29						

Сколько существует таких маршрутов из A в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты A и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

Ответ: \_\_\_\_\_.



**2**

Между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяжённость каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из А в В есть дорога длиной 4 км, а из В в А дороги нет.

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				30
B			3				
C				11			27
D					4	7	10
E						4	8
F					5		2
Z	29						

Сколько существует таких маршрутов из А в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты А и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

Ответ: **6 маршрутов**.

# Задача 11

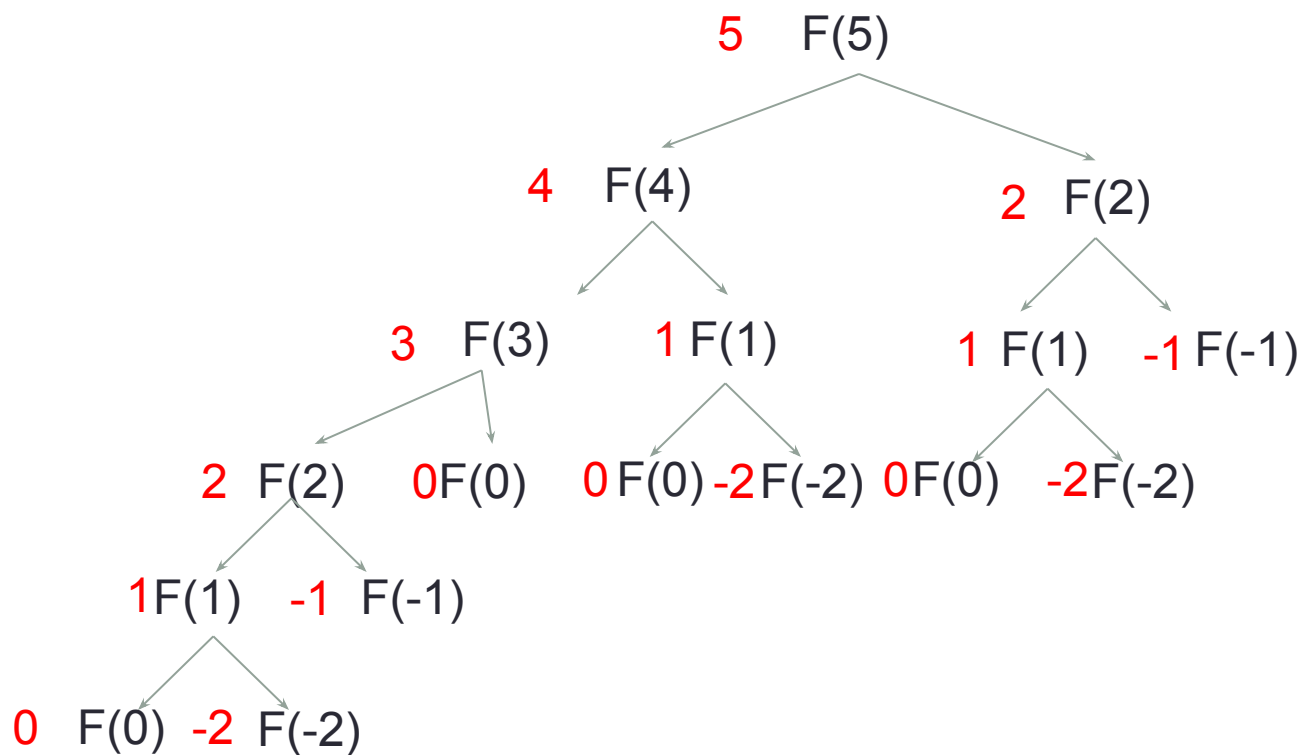
11 | Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

Бейсик	Python
<pre>SUB F(n)   PRINT n   IF n &gt; 0 THEN     F(n - 1)     F(n - 3)   END IF END SUB</pre>	<pre>def F(n):     print(n)     if n &gt; 0:         F(n - 1)         F(n - 3)</pre>

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(5)?

Ответ: \_\_\_\_\_

# Решение



$$5 + 4 + 2 + 3 + 1 + 1 - 1 + 2 + 0 + 0 - 2 + 0 - 2 + 1 - 1 + 0 - 2 = 11$$

11

Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

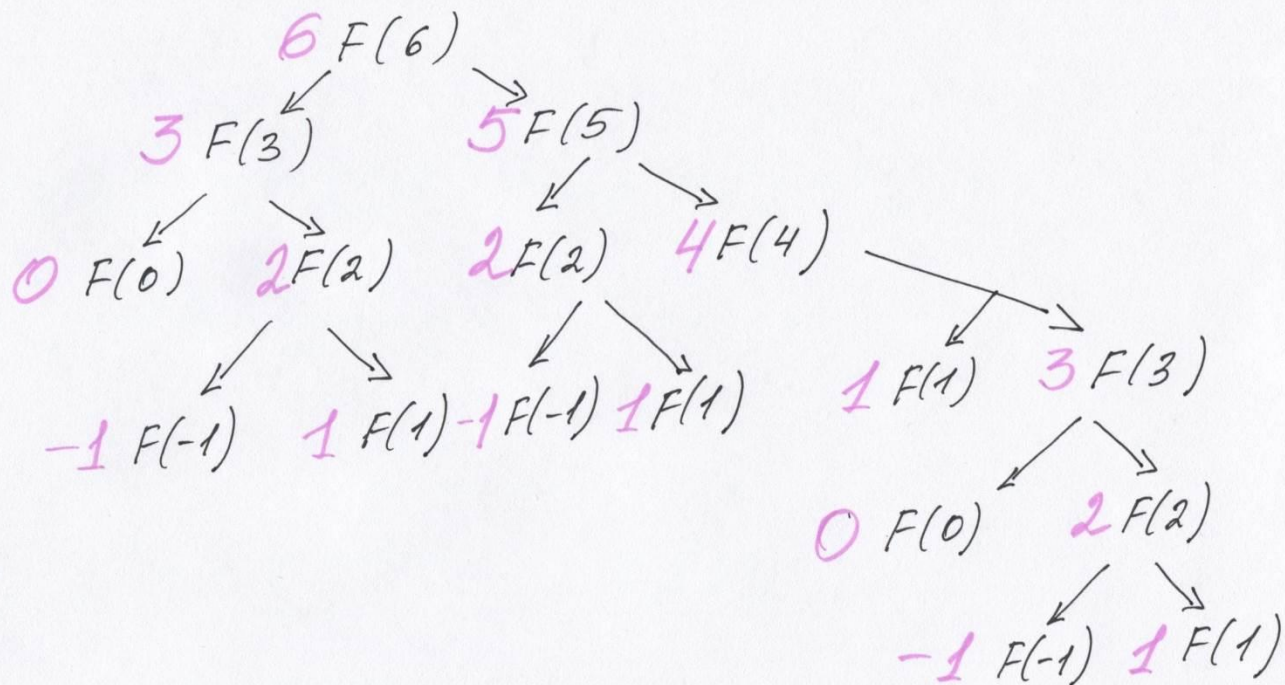
<b>Бейсик</b>	<b>Python</b>
<pre>SUB F(n)   PRINT n   IF n &gt; 1 THEN     F(n - 3)     F(n - 1)   END IF END SUB</pre>	<pre>def F(n):   print(n)   if n &gt; 1:     F(n - 3)     F(n - 1)</pre>
<b>Алгоритмический язык</b>	<b>Паскаль</b>
<pre>алг F(цел n) нач   вывод n, нс   если n &gt; 1 то     F(n - 3)     F(n - 1)   все кон</pre>	<pre>procedure F(n: integer); begin   writeln(n);   if n &gt; 1 then   begin     F(n - 3);     F(n - 1)   end end</pre>
<b>C++</b>	
<pre>void F(int n) {   printf("%d\n", n);   if (n &gt; 1)   {     F(n - 3);     F(n - 1);   } }</pre>	

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(6)?



# Решение

11. 2 Диалогическая от 26.01.15 вер. 2



$$6 + 3 + 5 + 0 + 2 + 2 + 4 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 3 + 0 + 2 - 1 + 1 = 28$$

Ответ: 28



11

Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

<p><b>Бейсик</b></p> <pre>SUB F(n)   PRINT n   IF n &lt; 5 THEN     F(n + 1)     F(n + 3)   END IF END SUB</pre>	<p><b>Python</b></p> <pre>def F(n):   print(n)   if n &lt; 5:     F(n + 1)     F(n + 3)</pre>
<p><b>Паскаль</b></p> <pre>procedure F(n: integer); begin   writeln(n);   if n &lt; 5 then   begin     F(n + 1);     F(n + 3)   end end</pre>	<p><b>Алгоритмический язык</b></p> <pre>алг F(цел n) нач   вывод n, нс   если n &lt; 5 то     F(n + 1)     F(n + 3)   все кон</pre>
<p><b>Си</b></p> <pre>void F(int n) {   printf("%d\n", n);   if (n &lt; 5) {     F(n + 1);     F(n + 3);   } }</pre>	

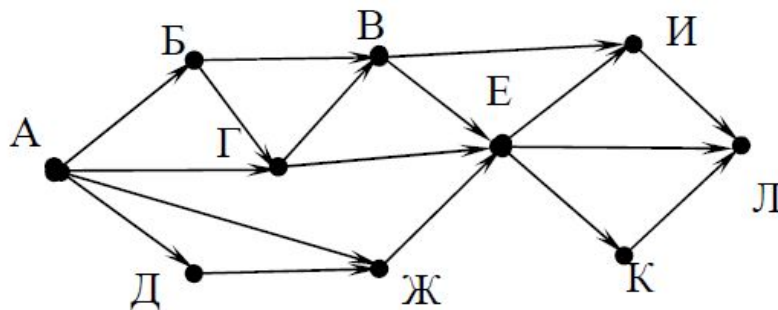
Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экран при выполнении вызова F(1)?

Ответ: **49**\_\_\_\_\_.

# Задача 15

15

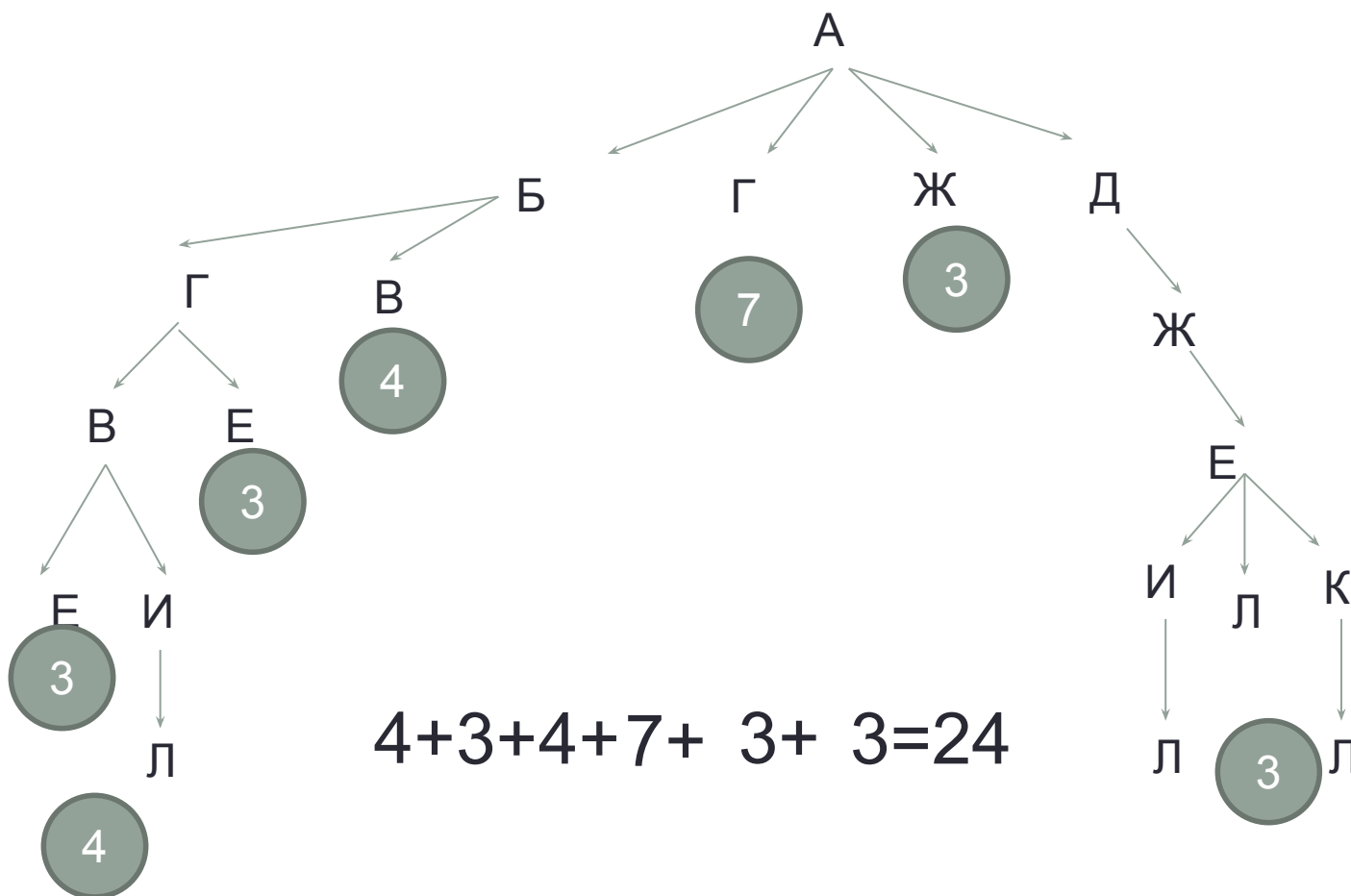
На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



Ответ: \_\_\_\_\_.

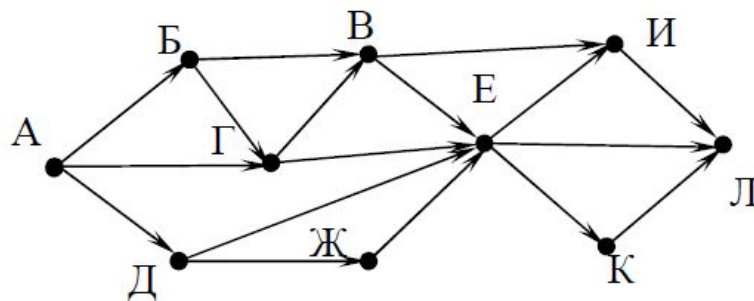
# Решение (прием 1)

Применим тот же подход, что и в задаче №5



15

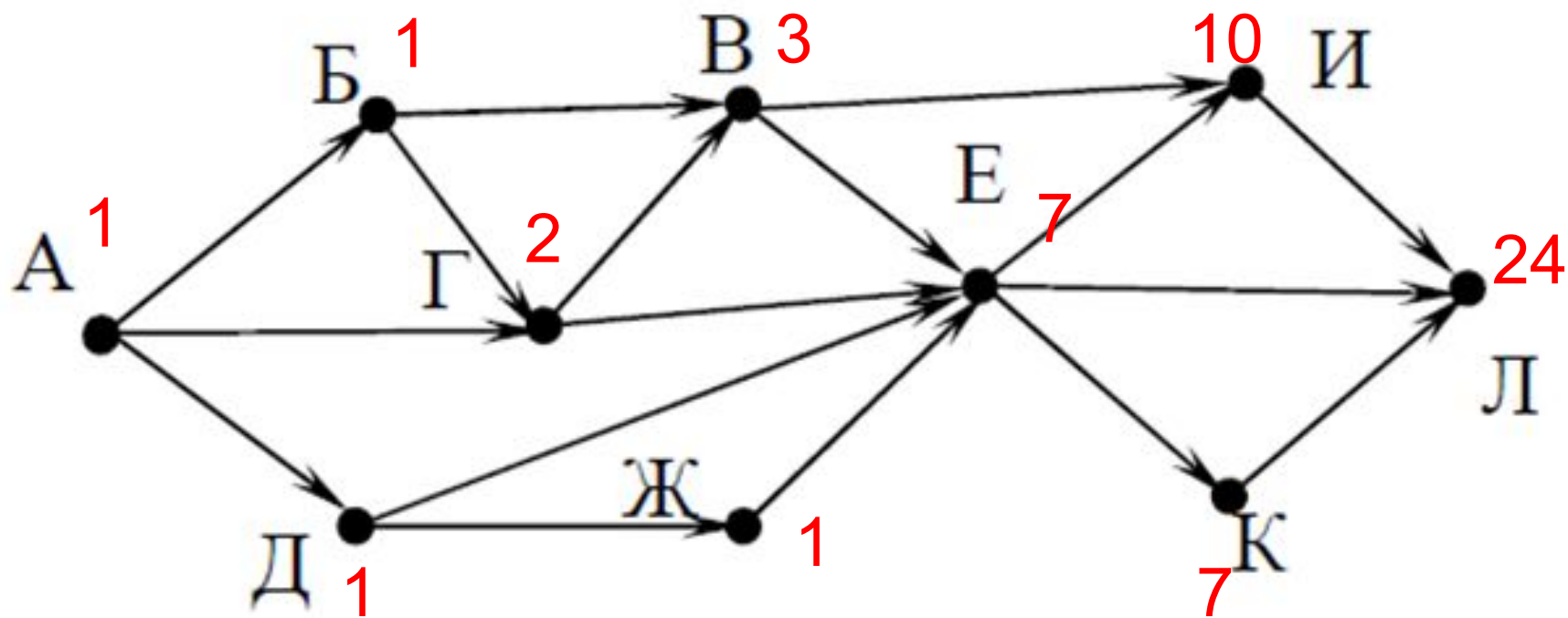
На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



Ответ: \_\_\_\_\_.

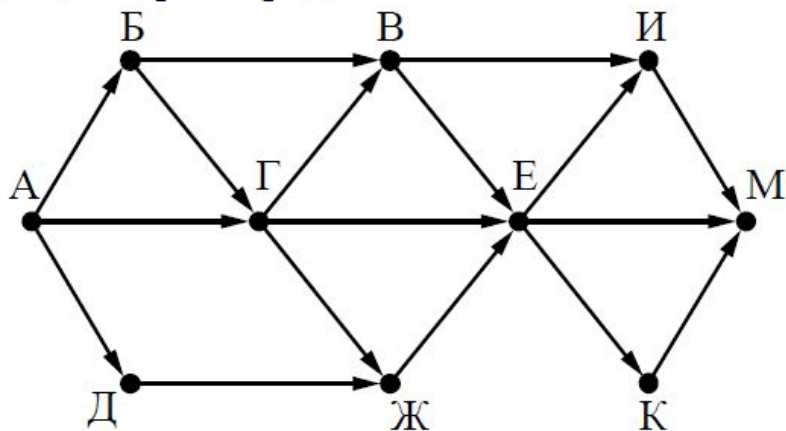
# Решение (прием 2)

Подсчитаем степень вершин графа



**20**

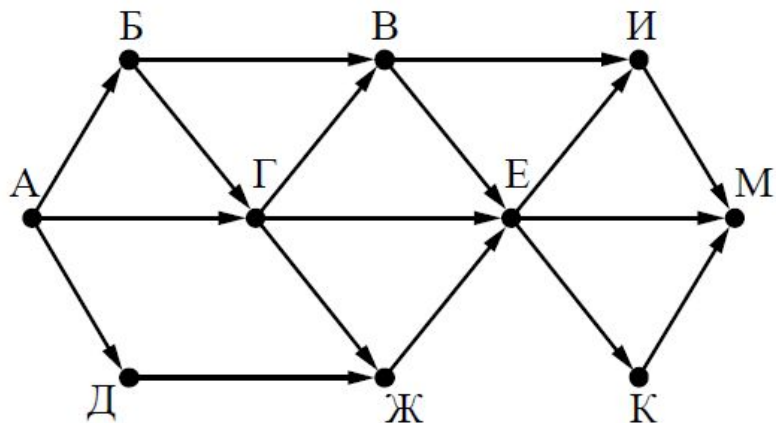
На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и проходящих через город Г?



Ответ: **20** \_\_\_\_\_.

20

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и **НЕ проходящих** через город Г?



Ответ: 13.



# Задача 23

1 из 8

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \vee y_1 = 1$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

# Решение

$x_1$	1			0					1		
$y_1$	1			1					0		
$y_2$	1			1				0		1	
$y_3$	1			1			0		1	1	
$y_4$	1			1		0		1	1	1	
$y_5$	1			1	0		1	1	1	1	
$x_2$	1			0	1	1		1	1	1	1
$x_3$	1		0		1	1	1		1	1	1
$x_4$	1	0		1	1	1	1		1	1	1
$x_5$	1	0	1	1	1	1	1		1	1	1

11  
решений

**В 23 № 4567.** Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) = 1$$

$$(\neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee y_3) \wedge (\neg y_3 \vee y_4) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow x_1) \wedge (y_2 \rightarrow x_2) \wedge (y_3 \rightarrow x_3) \wedge (y_4 \rightarrow x_4) = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Источник: Демонстрационная версия ЕГЭ—2013 по информатике.

[Показать пояснение](#)

[Обсудить ВКонтакте](#) [Сообщить об ошибке](#)





**В 23 № 4599.** Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) = 1$$

$$x_1 \rightarrow y_1 = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ , при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

[Показать пояснение](#)

[Обсудить ВКонтакте](#) [Сообщить об ошибке](#)

# Решение

23 | -3 задачи 4599

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_3)(x_3 \rightarrow x_4)(x_4 \rightarrow x_5) = 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2)(y_2 \rightarrow y_3)(y_3 \rightarrow y_4)(y_4 \rightarrow y_5) = 1 \\ x_1 \rightarrow y_1 = 1 \end{cases}$$

$x_1$	1					0							
$y_1$	1					1				0			
$y_2$	1					1			1	0			
$y_3$	1					1			1	1	0		
$y_4$	1					1			1	1	1	0	
$y_5$	1					1			1	1	1	1	0
$x_2$	1					1	0		5	5	5	5	5
$x_3$	1					1	1	0					
$x_4$	1					1	1	1	0				
$x_5$	1					1	1	1	1	0			

5 решений

Ответ: 31 решение

**B15**

Сколько существует различных наборов значений логических переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge ((x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3)) = 0$$

$$\neg(x_2 \equiv x_3) \wedge ((x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_4)) = 0$$

...

$$\neg(x_8 \equiv x_9) \wedge ((x_8 \wedge \neg x_{10}) \vee (\neg x_8 \wedge x_{10})) = 0$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

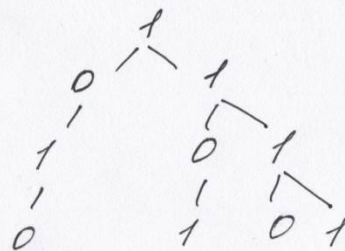
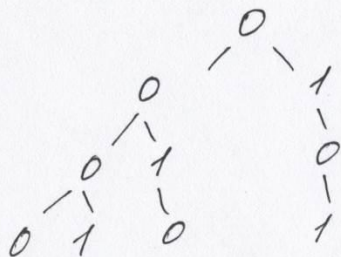
Ответ: \_\_\_\_\_.

# Решение

23 | -4 Демонстрационный вариант 2014.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x_1} \equiv x_2 \quad (x_1 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_3) = 0 \\ \overline{x_2} \equiv x_3 \quad (x_2 \overline{x_4} \vee \overline{x_2} x_4) = 0 \\ \dots \\ \overline{x_8} \equiv x_9 \quad (x_8 \overline{x_{10}} \vee \overline{x_8} x_{10}) = 0 \end{array} \right. \text{ преобразуем } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \equiv x_2 \quad \vee \quad x_1 \equiv x_3 = 1 \\ x_2 \equiv x_3 \quad \vee \quad x_2 \equiv x_4 = 1 \\ \dots \\ x_8 \equiv x_9 \quad \vee \quad x_8 \equiv x_{10} = 1 \end{array} \right.$$

$x_1$   
 $x_2$   
 $x_3$   
 $x_4$



т.о. наблюдаем  
увеличение количества  
решений на 2 с введением  
каждой новой переменной

при	$x_5$	будет	10	решений
	$x_6$		12	
	$x_7$		14	
	$x_8$		16	
	$x_9$		18	
	$x_{10}$		20	решений

Ответ: 20 решений



## Задача 26

- 26 Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один** или **три** камня или увеличить количество камней в куче **в два раза**. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.
- Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35.
- Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней.
- В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 34$ .

# Решение

Задачу проверяет эксперт. Поэтому ВАЖНО правильно ее оформить

1. Коротко записываем условие, к нему будем обращаться в ходе решения задачи.

$$\begin{array}{l} +1 \\ +3 \quad ! \geq 35 \\ *2 \end{array}$$

Задание 1 а)  $S=18\dots 34$  Во всех этих случаях Петя должен удвоить кучу камней и выиграть. При значениях  $<18$  невозможно одним ходом  $(+1; +3; *2)$  получить победное число камней

## Задание 1 б)

Кон	Петя	Ваня
17	[18..34]	!

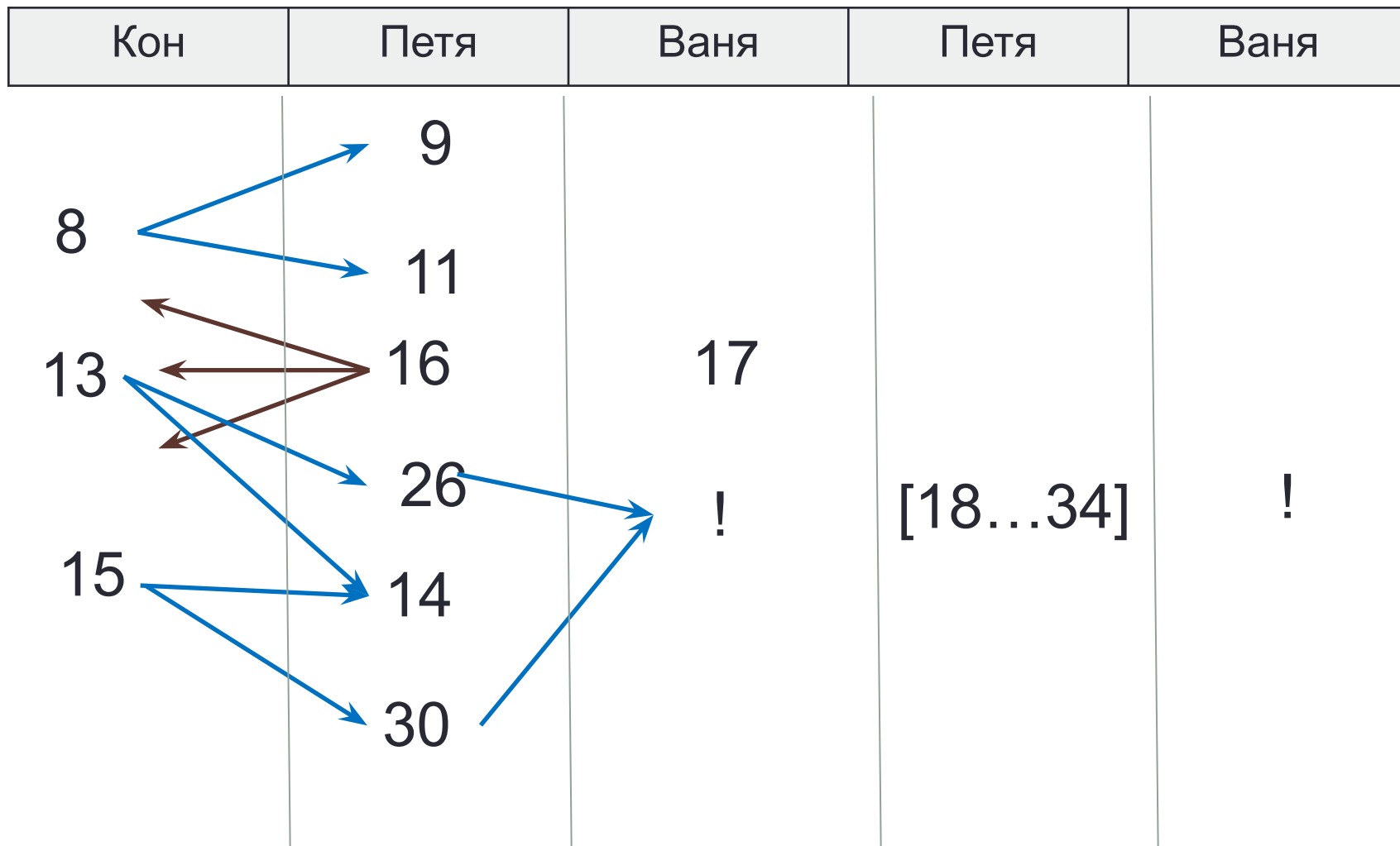
При  $S=17$  как бы ни пошел Петя ( $17+1=18$ ;  $17+3=20$ ;  $17*2=34$ ) Ваня удвоит количество камней в куче и выиграет ( $18*2=36$ ;  $20*2=40$ ;  $34*2=68$ ).

## Задание 2

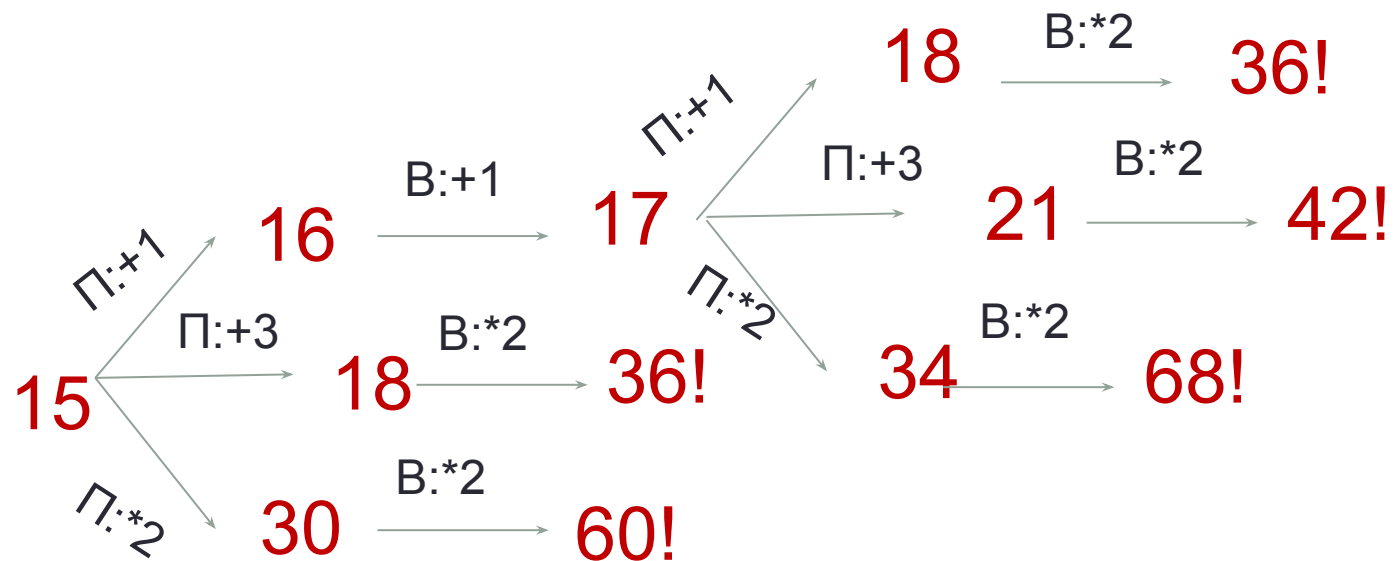
Кон	Петя	Ваня	Петя
16 14	17	[18..34]	!

При  $S=16$  или  $S=14$  в обоих случаях Петя может получить 17 камней ( $16+1=17$  или  $14+3=17$ ). При любом ответном ходе Вани ( $17+1=18$ ;  $17+3=20$ ;  $17*2=34$ ) Петя должен удвоить количество камней в куче и выиграть ( $18*2=36$ ;  $20*2=40$ ;  $34*2=68$ )

# Задание 3

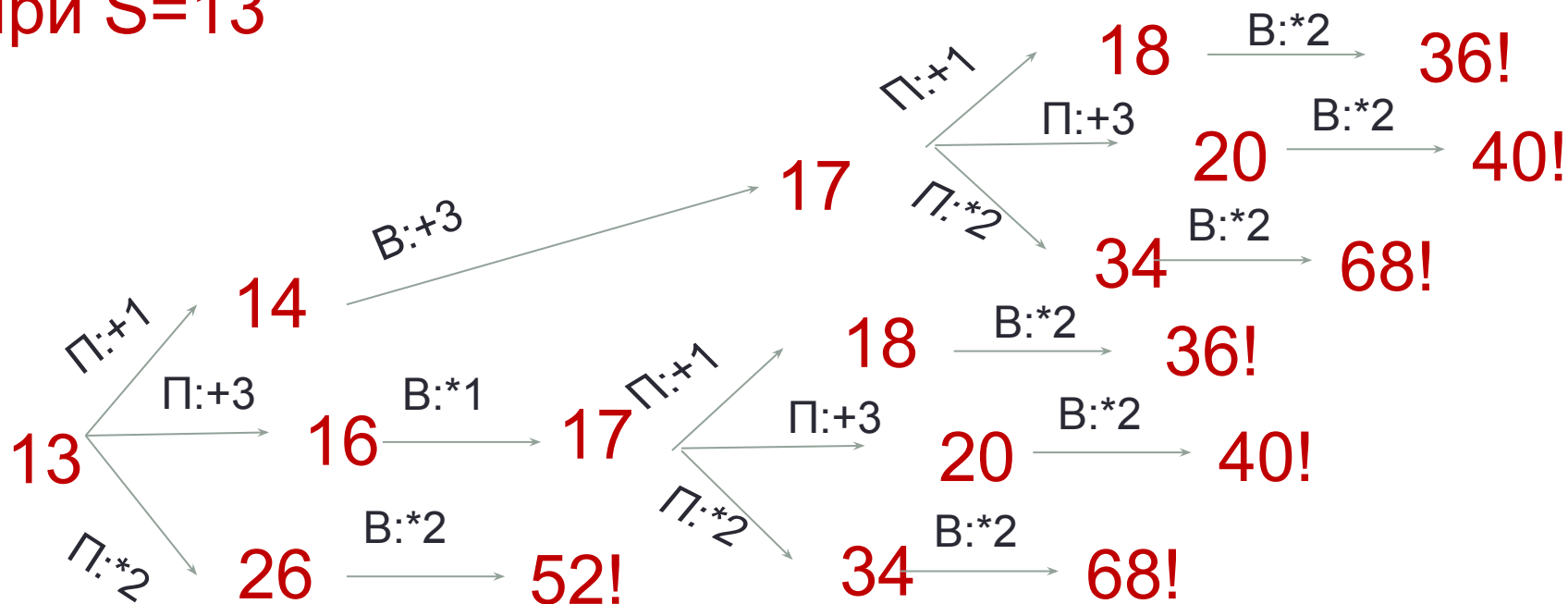


При  $S=15$



В этом дереве в каждой позиции, где должен ходить Петя разобраны все возможные ходы, а для позиции, где должен ходить Ваня приведены только ходы, соответствующие выбранной выигрышной стратегии

При  $S=13$



В этом дереве в каждой позиции, где должен ходить Петя разобраны все возможные ходы, а для позиции, где должен ходить Ваня приведены только ходы, соответствующие выбранной выигрышной стратегии



Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один камень** или **увеличить количество камней в куче в шесть раз**. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 60 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 360. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 361 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 360$

# Решение

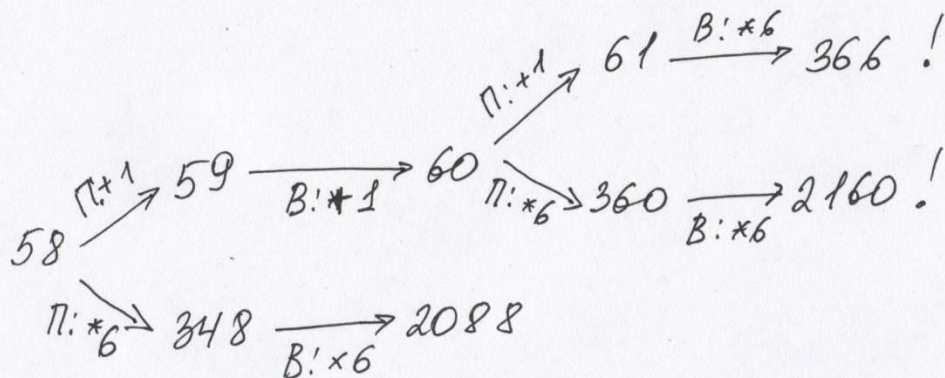
$$\boxed{26} - 2$$

$$1a) [61, \dots, 360]$$

$$b) 60$$

$$2. 10, 59$$

$$3. 58$$



# Источники:

- Поляков К.Ю. «Просто графы» Первое сентября. Информатика март 2012
- Демонстрационная версия ЕГЭ 2015
- Яндекс ЕГЭ. <https://ege.yandex.ru/>
- Дм.Гущин Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. <http://inf.reshuege.ru/>
- ЕГЭ 2015. Информатика. Тематические тестовые задания/С.С.Крылов, Д.М.Ушаков. – М.:Издательство «Экзамен», 2015. (Серия «ЕГЭ. ФИПИ. Тематические тестовые задания»)
- Статград, публикации 2014-2015 уч.год