ТРЕНИНГ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЕГЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФОВ»

Учитель информатики ГБОУ СОШ №2093 имени А.Н. Савельева

Павлова Инна Борисовна

Немного о графах

Теория графов – раздел дискретной математики, находящий свое приложение в прикладных задачах логистики, проектировании информационных сетей, геоинформационных систем, в химии, информатике и программировании, системотехнике, экономике. Так же графы – мощное средство моделирования.

Родоначальником теории графов считается Леонард Эйлер, но несмотря на историю применения насчитывающую около 3-х веков с момента формулировки им классической задачи о кёнигсберских мостах, понятийный аппарат теории не до конца устоялся[1], а сама теория содержит большое количество нерешенных проблем и недоказанных гипотез..

Поляков К.Ю. «Просто графы» Первое сентября. Информатика март 2012

Графы в школе

В школьном курсе графы давно применяются для решения задач в начальной школе «Информатика в играх и задачах» А.В.Горячев.

Коротко теория и применение графов изложено в учебниках профильного курса А.Г.Гейн. А.И.Сенокосов «Информатика и ИКТ» 11 класс.

В качестве дополнительного материала в учебниках И.Г.Семакина 7 класс и учебниках углубленного уровня 10-11 класса. В учебниках Л.Л.Босовой (9 класс).

Графы в ЕГЭ

- В настоящее время в ЕГЭ задачи такого типа сводятся к ОДНОЙ задаче: Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город Х ...(+ могут быть какие-то дополнительные условия). Хотя рисунки, схемы дорог, могут быть весьма замысловатые.
- Обсудим решение с помощью графов:

Номер задачи	Коды проверяемых элементов по кодификатору и элементы содержания	Уровень
1	1.1.2 Процесс передачи информации, источник и приемник. Сигнал, кодирование и декодирование. Искажение информации	Б
5, 15	1.3.1 Описание (информационная модель) реального объекта и процесса, соответствие описания объекту и целям описания. Схемы, таблицы, графики, формулы как описания	Б
11	1.5.3 Индуктивное определение объектов	Б
23	1.5.1 Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания	В
26	1.5.2 Цепочки (конечные последовательности), деревья, списки, графы, матрицы (массивы), псевдослучайные последовательности	В

Задача 1

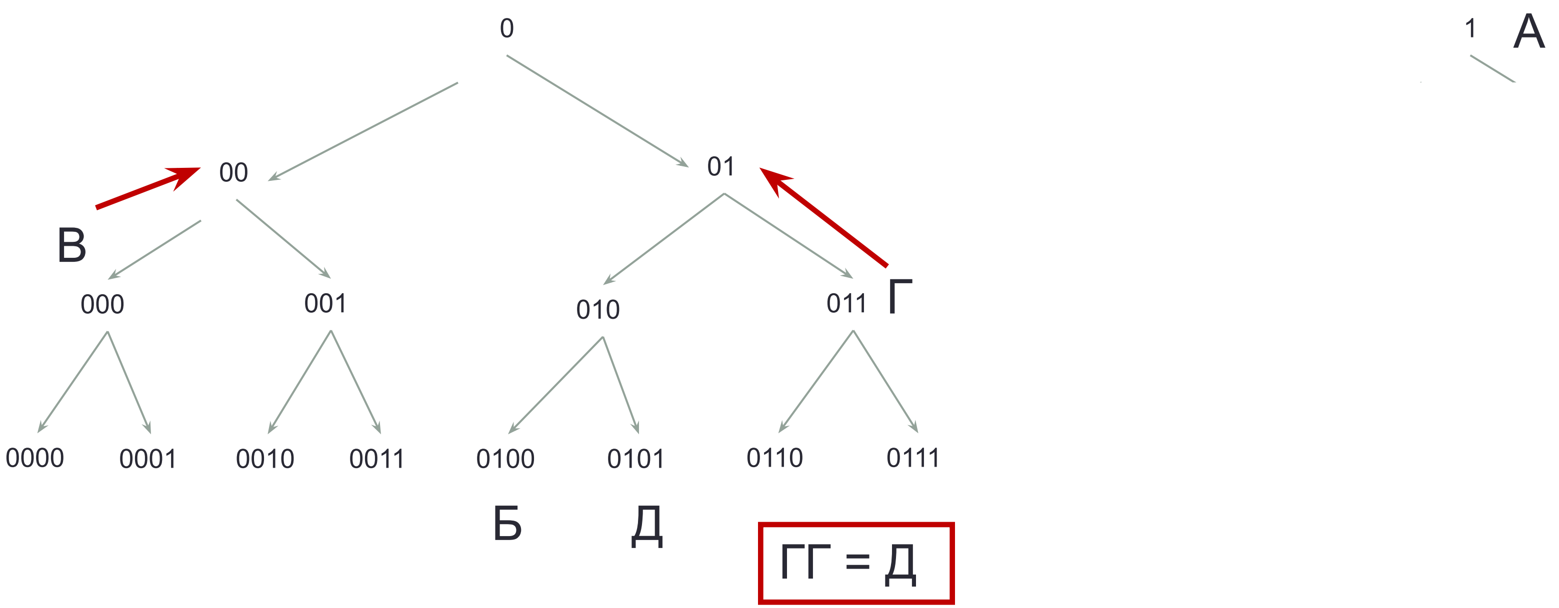
1

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г и Д, используется неравномерный двоичный код, позволяющий однозначно декодировать полученную двоичную последовательность. Вот этот код: А – 1; Б – 0100; В – 000; Г – 011; Д – 0101. Требуется сократить для одной из букв длину кодового слова так, чтобы код по-прежнему можно было декодировать однозначно. Коды остальных букв меняться не должны.
Каким из указанных способов это можно сделать?

1) для буквы Г – 11
2) для буквы В – 00
3) для буквы Г – 01
4) это невозможно

Ответ: ☐

Решение



Прямое правило Фано – никакой код не должен быть началом другого кода.
Обратное правило Фано – никакой код не должен быть концом другого кода.

1 Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г и Д, используется неравномерный двоичный код, позволяющий однозначно декодировать полученную двоичную последовательность. Вот этот код: А – 0; Б – 100; В – 1010; Г – 111; Д – 110. Требуется сократить для одной из букв длину кодового слова так, чтобы код по-прежнему можно было декодировать однозначно. Коды остальных букв меняться не должны.
Каким из указанных способов это можно сделать?

1) для буквы В – 101
2) это невозможно
3) для буквы В – 010
4) для буквы Б – 10

Ответ: ☐

Решение

$\boxed{1}$ – 2 демо 2015

А – 0   Б – 100   В – 1010   Г – 111   Д – 110

обратное правило Фано не выполняется

0 – А

1

10   11

100 (Б)   101   110 (Д)   111 (Г)

1000   1001   1010 (В)   1011   1100   1101   1110   1111

Можно „поэкспериментировать" с другими буквами и убедиться что прямое правило Фано будет выполняться только в выделенном случае.

Ответ: 1)

1 Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв К, Л, М, Н, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы Н использовали кодовое слово 0, для буквы К – кодовое слово 10. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?

Примечание. Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

1) 7 2) 8 3) 9 4) 10

Ответ: ☐

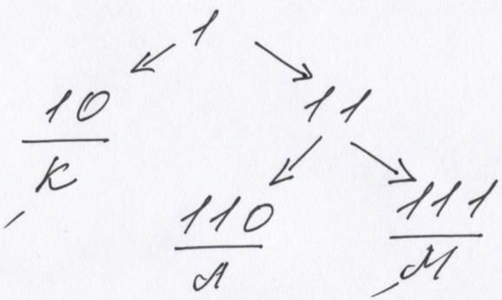
Решение

$\boxed{1}$ – 3 диагностическая от 26.11.2014 вар. 1

К – 10 Л – ? М – ? Н – 0

Какое условие Фано не выполняется? (обратное)

0 – Н



1 + 2 + 3 + 3 = 9

Ответ: 3)

1 Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв К, Л, М, Н, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы Л использовали кодовое слово 1, для буквы М – кодовое слово 01. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырёх кодовых слов?

Примечание. Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

1) 10 2) 9 3) 8 4) 7

Ответ: 9

Задача 5

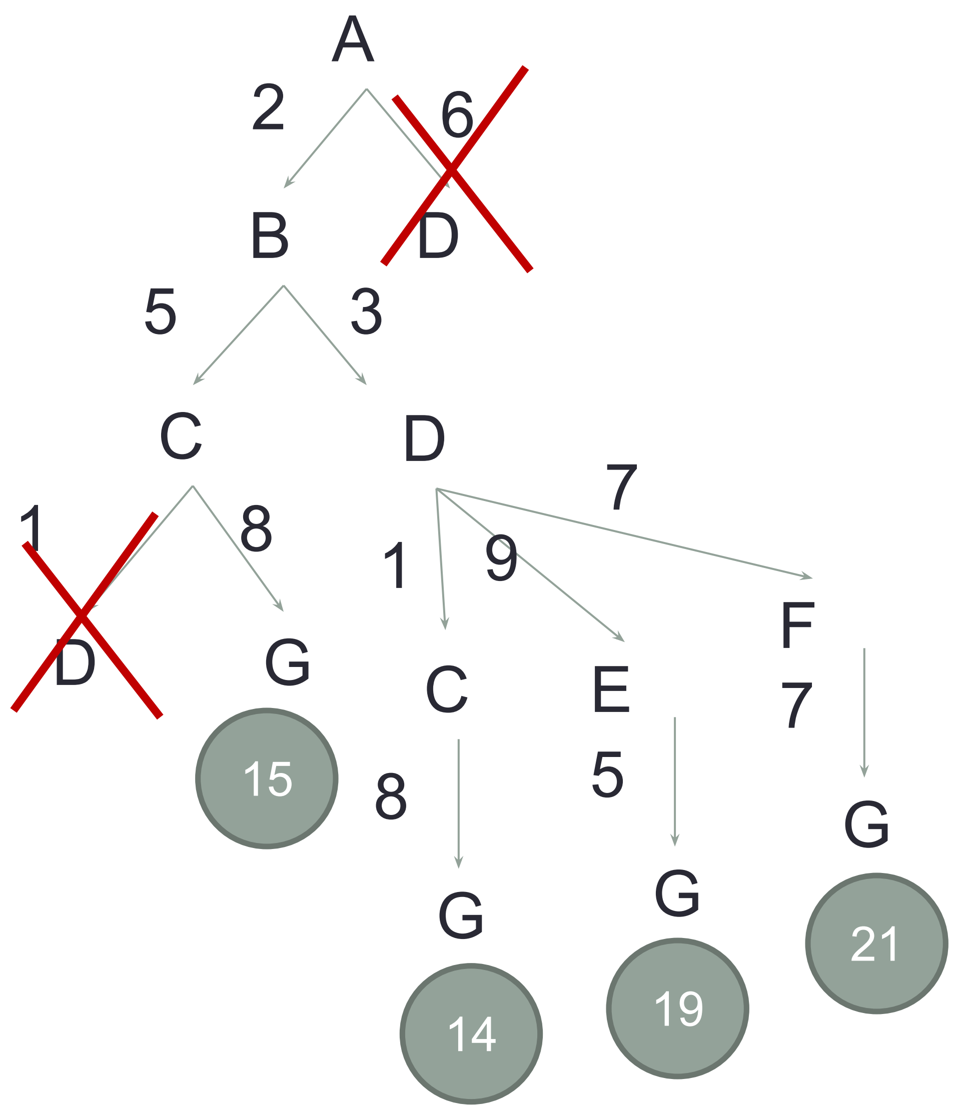
5 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		2		6			
B	2		5	3			
C		5		1			8
D	6	3	1		9	7	
E				9			5
F				7			7
G			8		5	7	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: ________________________________.

Решение



5 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		2		6			
B	2		5	2			
C		5		4			8
D	6	2	4		2	7	
E				2			5
F				7			7
G			8		5	7	

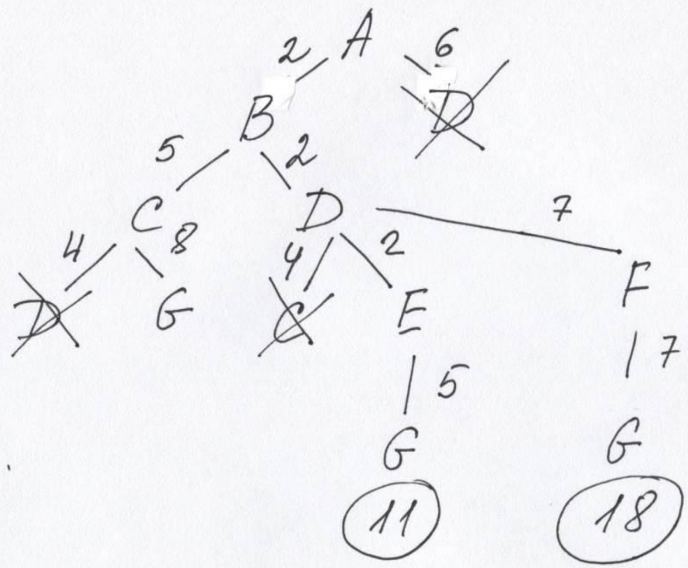
Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: ________________________________.

Диагностическая от 26.01.2015 Вариант 2

Решение

$\boxed{5}$ -2 Диагностическая от 26.01.15 вариант 2



Ответ: 11

2 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяжённость каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из A в B есть дорога длиной 4 км, а из B в A дороги нет.

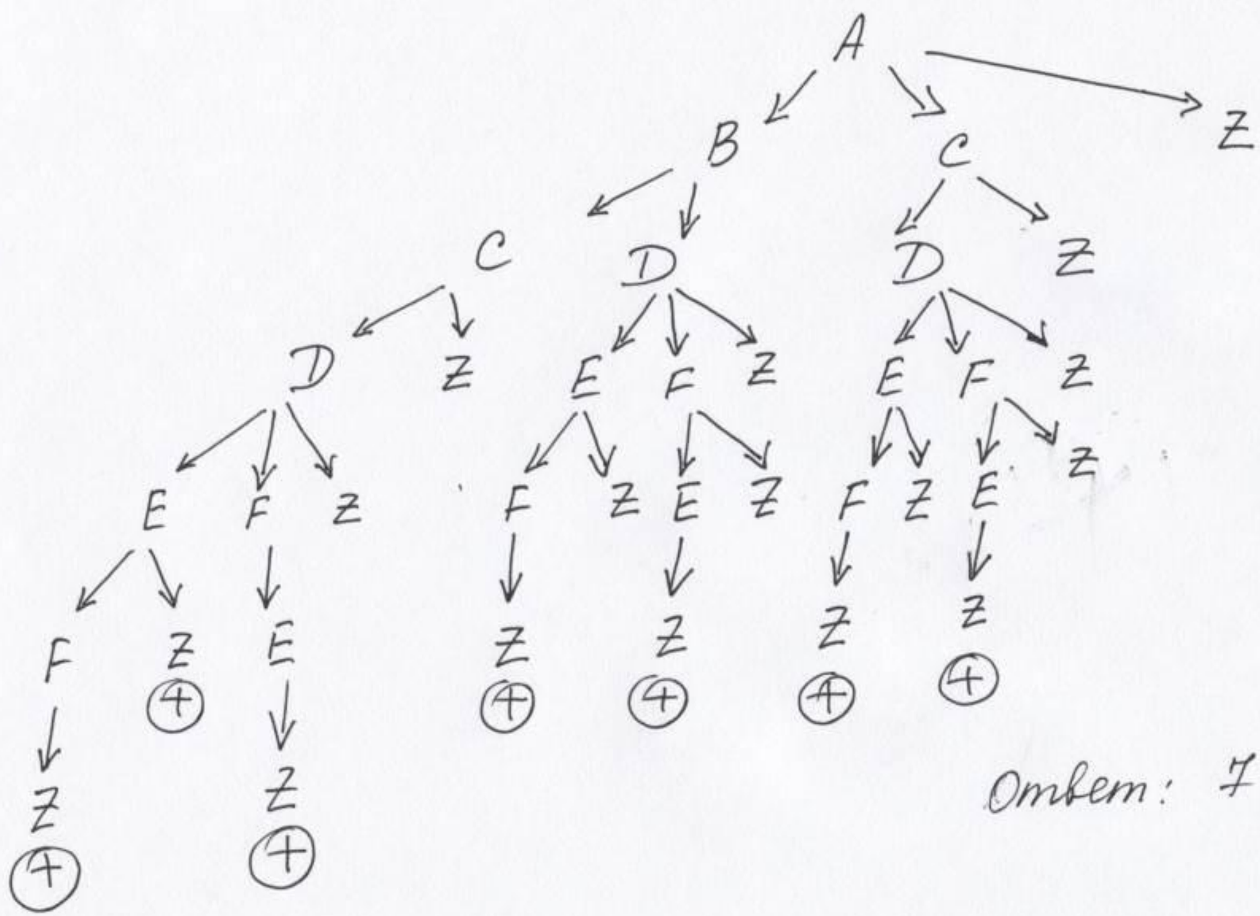
	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				30
B			3	4			
C				11			27
D					4	7	10
E						4	8
F					5		2
Z	29						

Сколько существует таких маршрутов из A в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты A и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

Ответ: ______________________________.

Решение

$\boxed{5}$ – 3 Диагностическая 2014 г. Вариант 1.



Ответ: 7 маршрутов

2 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, Z построены дороги с односторонним движением. В таблице указана протяжённость каждой дороги. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет. Например, из A в B есть дорога длиной 4 км, а из B в A дороги нет.

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				30
B			3				
C				11			27
D					4	7	10
E						4	8
F					5		2
Z	29						

Сколько существует таких маршрутов из A в Z, которые проходят через 6 и более населенных пунктов? Пункты A и Z при подсчете учитывать. Два раза проходить через один пункт нельзя.

Ответ: 6 маршрутов.

Диагностическая 2014 г. Вариант 2

Задача 11

11 Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

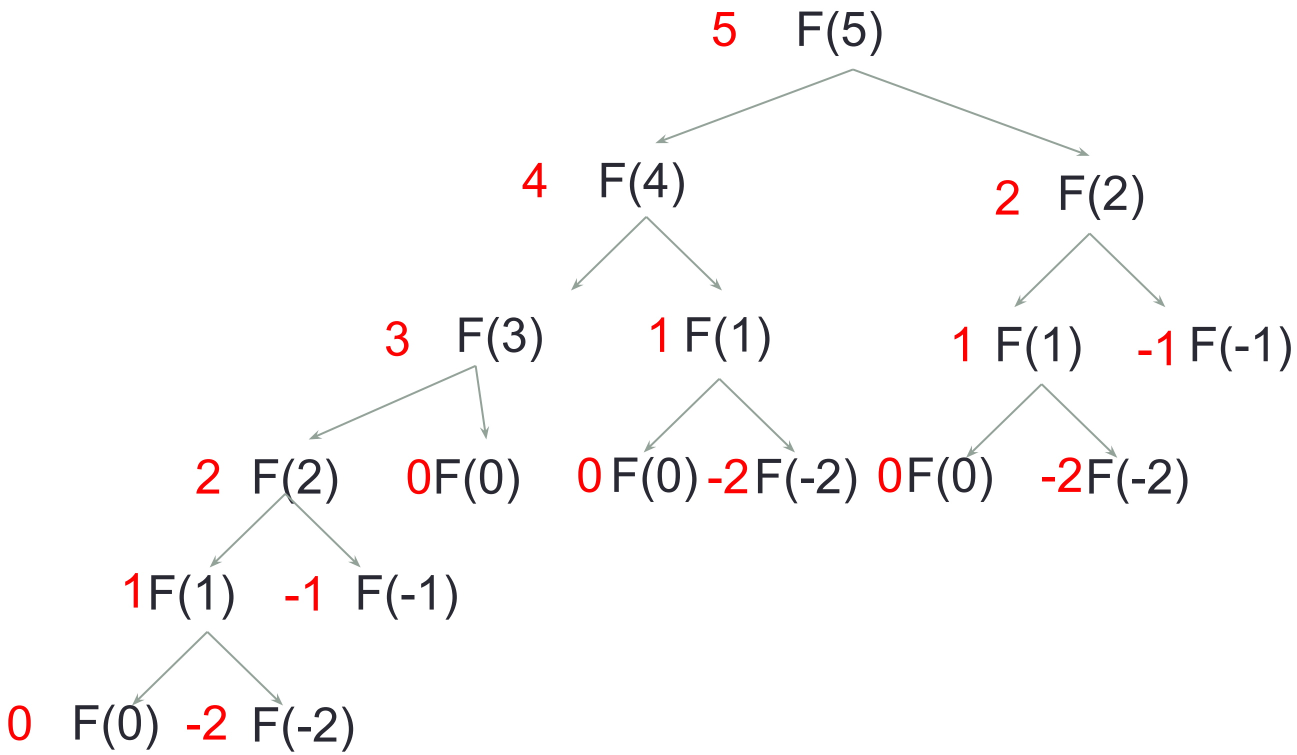
Бейсик	**Python**

<pre>SUB F(n)
  PRINT n
  IF n > 0 THEN
    F(n - 1)
    F(n - 3)
  END IF
END SUB</pre>
	<pre>def F(n):
	    print(n)
	    if n > 0:
	        F(n - 1)
	        F(n - 3)</pre>

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(5)?

Ответ: ___________________________

Решение



5+ 4+ 2+ 3+ 1+ 1 -1+ 2+ 0+ 0 -2+0 -2+ 1 -1+ 0 -2 =11

11 Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

Бейсик	Python

<pre>SUB F(n)
  PRINT n
  IF n > 1 THEN
    F(n - 3)
    F(n - 1)
  END IF
END SUB</pre>
	<pre>def F(n):
	    print(n)
	    if n > 1:
	        F(n - 3)
	        F(n - 1)</pre>

Алгоритмический язык	**Паскаль**

<pre>алг F(цел n)
нач
  вывод n, нс
  если n > 1 то
    F(n - 3)
    F(n - 1)
  все
кон</pre>
	<pre>procedure F(n: integer);
	begin
	  writeln(n);
	  if n > 1 then
	  begin
	    F(n - 3);
	    F(n - 1)
	  end
	end</pre>

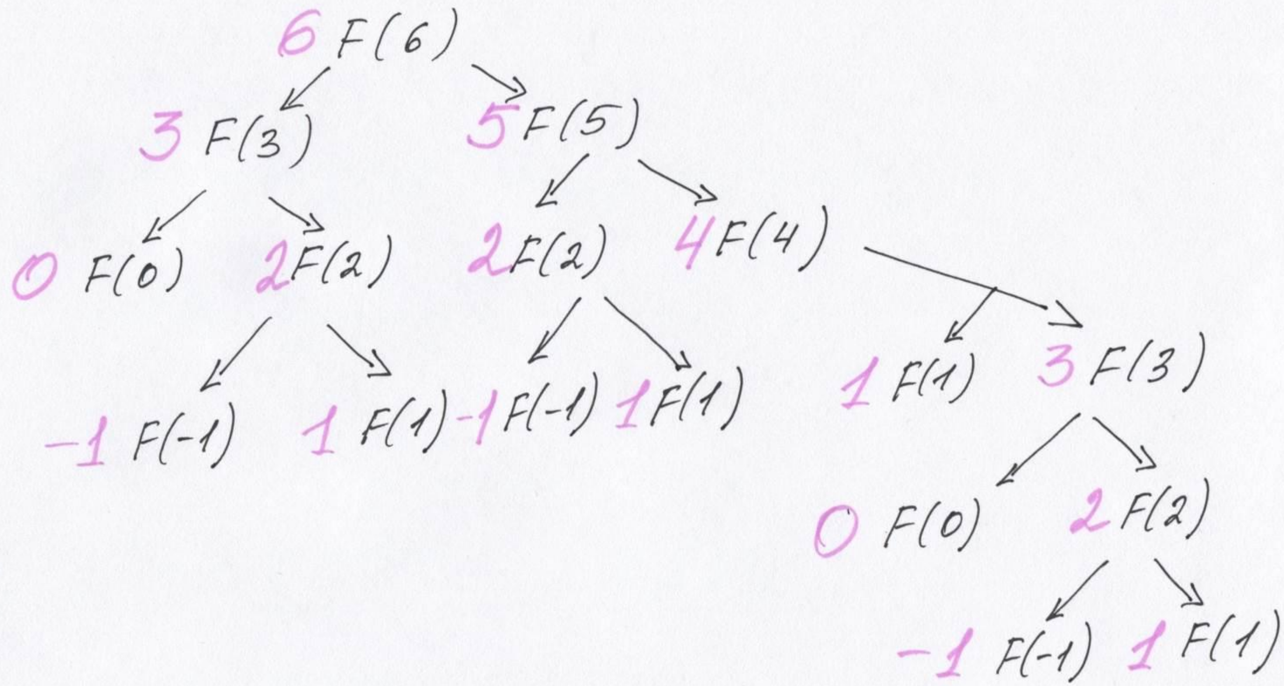
Си

```
void F(int n)
{
  printf("%d\n", n);
  if (n > 1)
  {
    F(n - 3);
    F(n - 1);
  }
}
```

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(6)?

Решение

$\boxed{11.}$ 2 Диагностическая от 26.01.15 вар. 2



$6+3+5+0+2+2+4-1+1-1+1+1+3+0+2-1+1=$

$=28$

Ответ: 28

11 Ниже на пяти языках программирования записан рекурсивный алгоритм F.

Бейсик

```
SUB F(n)
  PRINT n
  IF n < 5 THEN
    F(n + 1)
    F(n + 3)
  END IF
END SUB
```

Python

```
def F(n):
    print(n)
    if n < 5:
        F(n + 1)
        F(n + 3)
```

Паскаль

```
procedure F(n: integer);
begin
  writeln(n);
  if n < 5 then
  begin
    F(n + 1);
    F(n + 3)
  end
end
```

Алгоритмический язык

```
алг F(цел n)
нач
  вывод n, нс
  если n < 5 то
    F(n + 1)
    F(n + 3)
  все
кон
```

Си

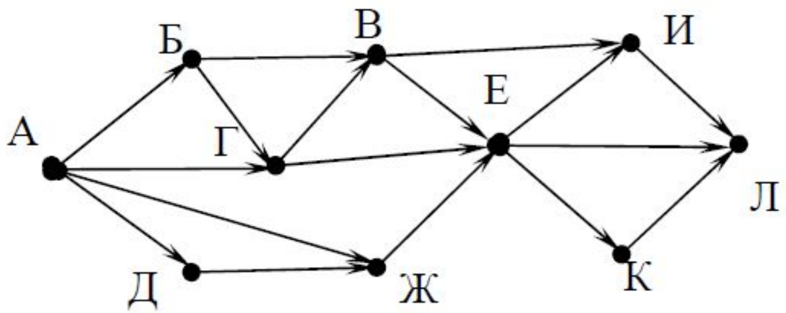
```
void F(int n)
{
  printf("%d\n", n);
  if (n < 5)  {
    F(n + 1);
    F(n + 3);
  }
}
```

Чему равна сумма всех чисел, напечатанных на экране при выполнении вызова F(1)?

Ответ: 49 ____________________.

Задача 15

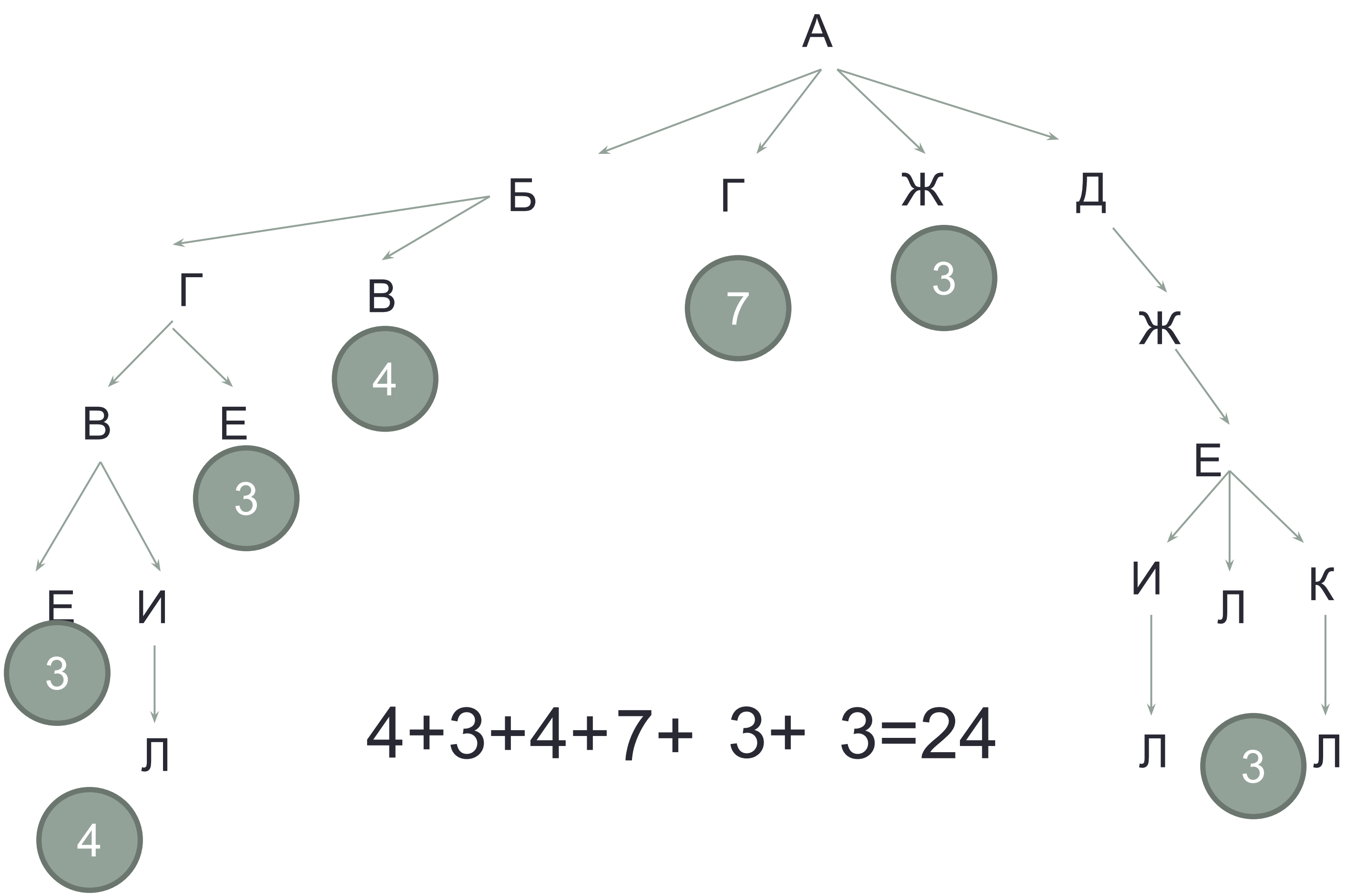
15 На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



Ответ: ___________________________.

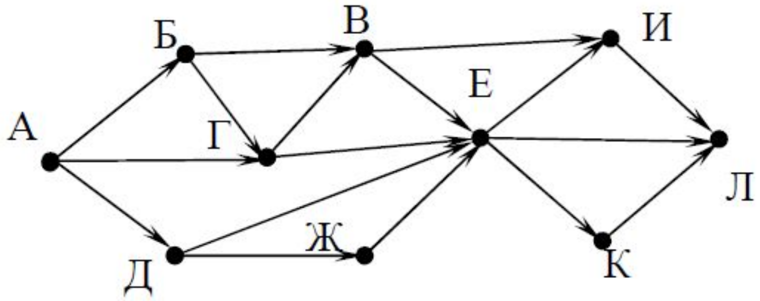
Решение (прием 1)

Применим тот же подход, что и в задаче №5



4+3+4+7+ 3+ 3=24

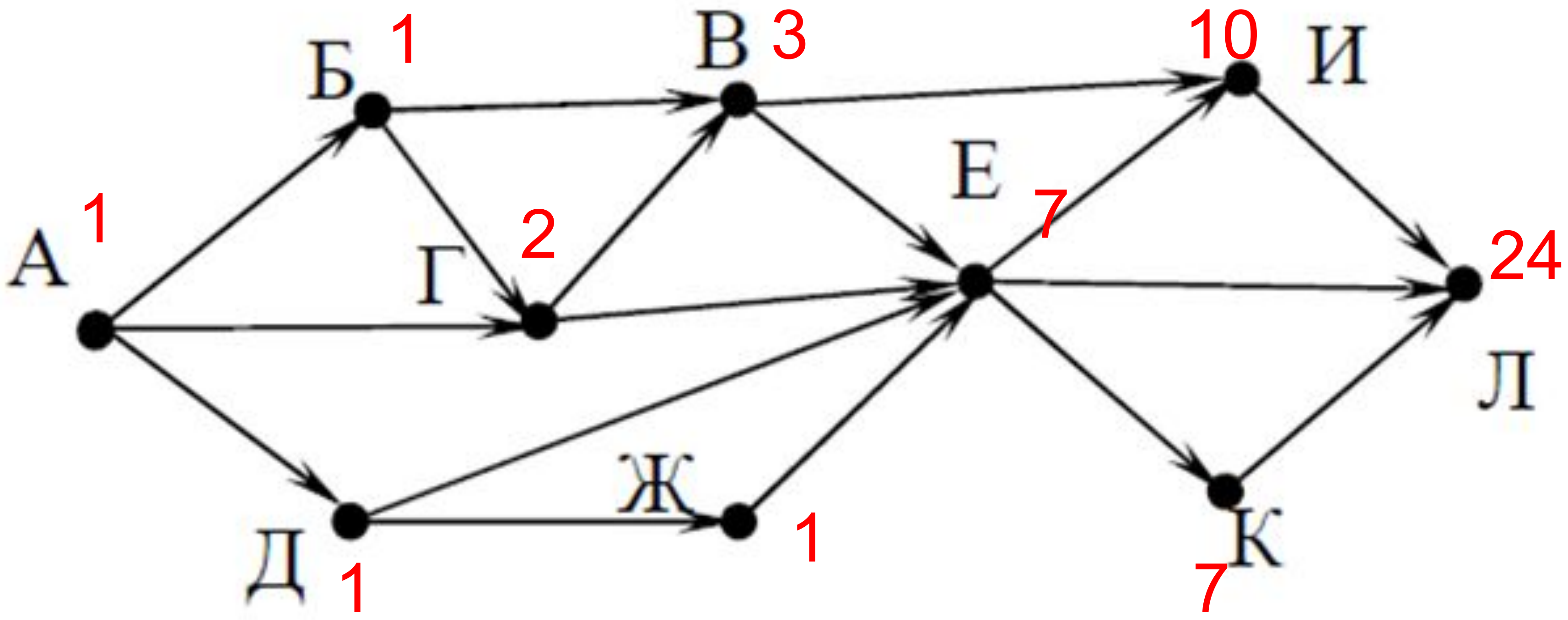
15 На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



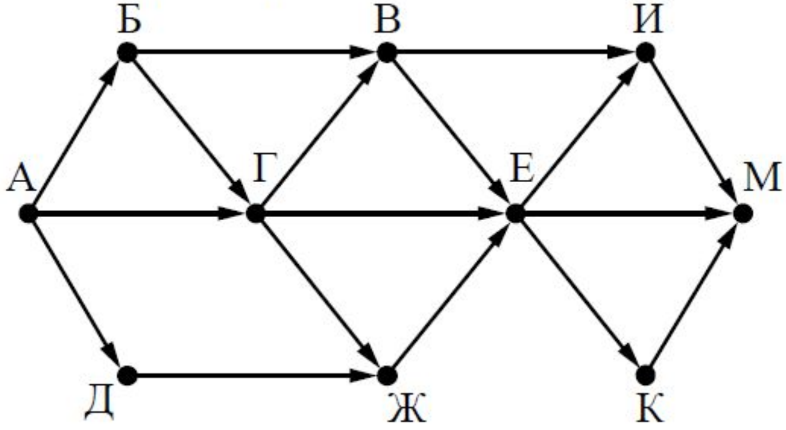
Ответ: ______________________________.

Решение (прием 2)

Подсчитаем степень вершин графа

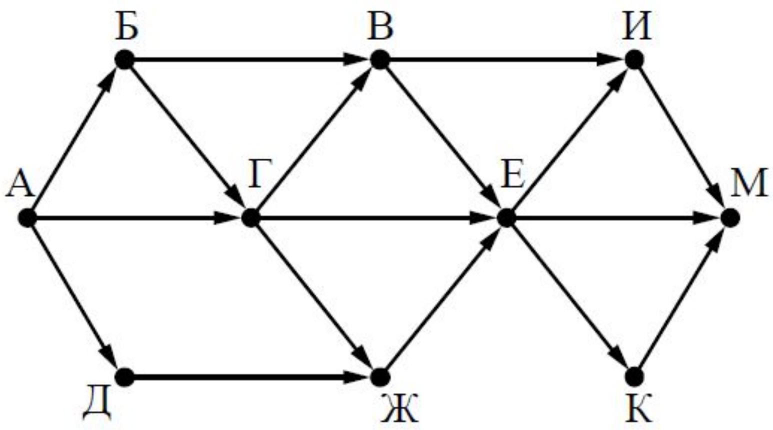


20 На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и проходящих через город Г?



Ответ: 20 .

20 На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей, ведущих из города А в город М и **НЕ проходящих** через город Г?



Ответ: 13 .

Задача 23

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x1 \to x2) \wedge (x2 \to x3) \wedge (x3 \to x4) \wedge (x4 \to x5) = 1$

$(y1 \to y2) \wedge (y2 \to y3) \wedge (y3 \to y4) \wedge (y4 \to y5) = 1$

$x1 \vee y1 = 1$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

https://ege.yandex.ru/informatics/ Вариант 1

Решение

x_1	1				0					1	
y_1	1				1					0	
y_2	1				1					0	1
y_3	1				1			0		1	1
y_4	1				1			0	1	1	1
y_5	1				1		0	1	1	1	1
x_2	1				0	1	1	1	1	1	1
x_3	1			0	1	1	1	1	1	1	1
x_4	1	0		1	1	1	1	1	1	1	1
x_5	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

11 решений

В 23 № 4567. Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, y1, y2 y3, y4, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$(x1 \to x2) \land (x2 \to x3) \land (x3 \to x4) = 1$$
$$(\neg y1 \lor y2) \land (\neg y2 \lor y3) \land (\neg y3 \lor y4) = 1$$
$$(y1 \to x1) \land (y2 \to x2) \land (y3 \to x3) \land (y4 \to x4) = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, x3, x4, y1, y2 y3, y4, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Источник: Демонстрационная версия ЕГЭ—2013 по информатике.

Показать пояснение

Обсудить ВКонтакте   Сообщить об ошибке

Решение

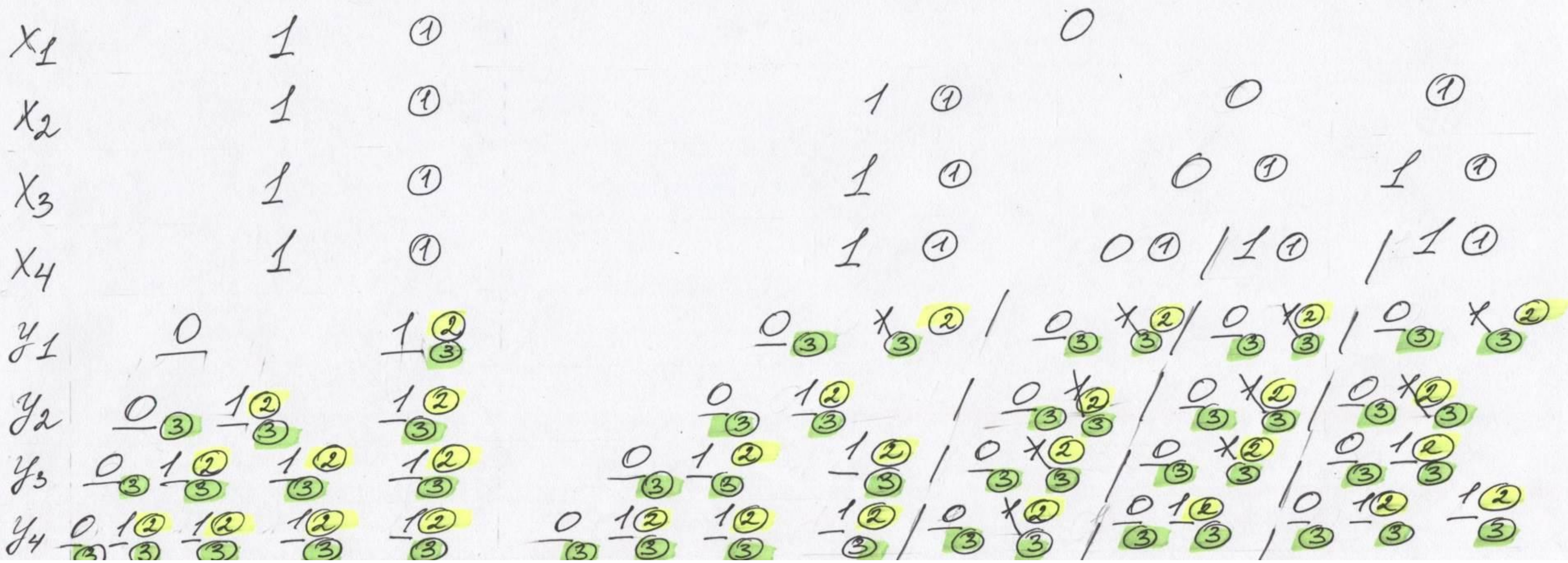
23 -2 дм. Гущин N 4567

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_4) = 1 \\ (\bar{y}_1 \vee y_2)(\bar{y}_2 \vee y_3)(\bar{y}_3 \vee y_4) = 1 \\ (y_1 \to x_1)(y_2 \to x_2)(y_3 \to x_3)(y_4 \to x_4) = 1. \end{cases}$$

после преобразования 1-е и 2-е уравнения приводятся к однотипному виду

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_4) = 1 & (1) \\ (y_1 \to y_2)(y_2 \to y_3)(y_3 \to y_4) = 1 & (2) \\ (y_1 \to x_1)(y_2 \to x_2)(y_3 \to x_3)(y_4 \to x_4) = 1 & (3) \end{cases}$$

Ответ: 15 решений



В 23 № 4599. Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5) = 1$
$(y1 \rightarrow y2) \wedge (y2 \rightarrow y3) \wedge (y3 \rightarrow y4) \wedge (y4 \rightarrow y5) = 1$
$x1 \rightarrow y1 = 1$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Показать пояснение

Обсудить ВКонтакте Сообщить об ошибке

http://inf.reshuege.ru/ Задание №4599

Решение

$\boxed{23}$ — 3 Гущин 4599

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_4)(x_4 \to x_5) = 1 \\ (y_1 \to y_2)(y_2 \to y_3)(y_3 \to y_4)(y_4 \to y_5) = 1 \\ x_1 \to y_1 = 1 \end{cases}$$

x_1	1			0				
y_1	1	1			0			
y_2	1	1		1	0			
y_3	1	1		1	1	0		
y_4	1	1		1	1	1	0	
y_5	1	1		1	1	1	1	0
x_2	1	1 0		5	5	5	5	5
x_3	1	1 1 0						
x_4	1	1 1 1 0						
x_5	1	1 1 1 1 0						
		5 решений						

Ответ: 31 решение

B15 Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, … x_{10}, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\neg(x_1 \equiv x_2) \wedge ((x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3)) = 0$$
$$\neg(x_2 \equiv x_3) \wedge ((x_2 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_4)) = 0$$
$$\ldots$$
$$\neg(x_8 \equiv x_9) \wedge ((x_8 \wedge \neg x_{10}) \vee (\neg x_8 \wedge x_{10})) = 0$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x_1, x_2, … x_{10} при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Ответ: ______________________________.

Решение

$\boxed{23}$ – 4 Демонстрационный вариант 2014 г.

$$\begin{cases} \overline{x_1 \equiv x_2}\ (x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3) = 0 \\ \overline{x_2 \equiv x_3}\ (x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_4) = 0 \\ \dots \\ \overline{x_8 \equiv x_9}\ (x_8\bar{x}_{10} \vee \bar{x}_8 x_{10}) = 0 \end{cases}$$

преобразуем

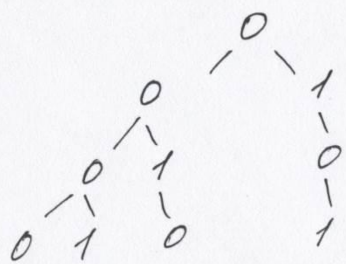
$$\begin{cases} x_1 \equiv x_2 \vee x_1 \equiv x_3 = 1 \\ x_2 \equiv x_3 \vee x_2 \equiv x_4 = 1 \\ \dots \\ x_8 \equiv x_9 \vee x_8 \equiv x_{10} = 1 \end{cases}$$

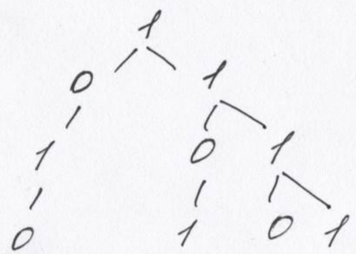
x_1

x_2

x_3

x_4





т. о. наблюдаем увеличение количества решений на 2 с введением каждой новой переменной

при x_5 будет 10 решений

x_6 12

x_7 14

x_8 16

x_9 18

x_{10} 20 решений

Ответ: 20 решений

Задача 26

26 Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один** или **три** камня или увеличить количество камней в куче **в два раза**. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \le S \le 34$.

Решение

Задачу проверяет эксперт. Поэтому ВАЖНО правильно ее оформить

1. Коротко записываем условие, к нему будем обращаться в ходе решения задачи.

+1
+3 ! >=35
***2**

Задание 1 а) S=18… 34 Во всех этих случаях Петя должен удвоить кучу камней и выиграть. При значениях <18 невозможно одним ходом (+1;+3;*2) получить победное число камней

Задание 1 б)

Кон	Петя	Ваня
17	[18..34]	!

При S=17 как бы ни пошел Петя (17+1=18; 17+3=20; 17*2=34) Ваня удвоит количество камней в куче и выиграет (18*2=36; 20*2=40; 34*2=68).

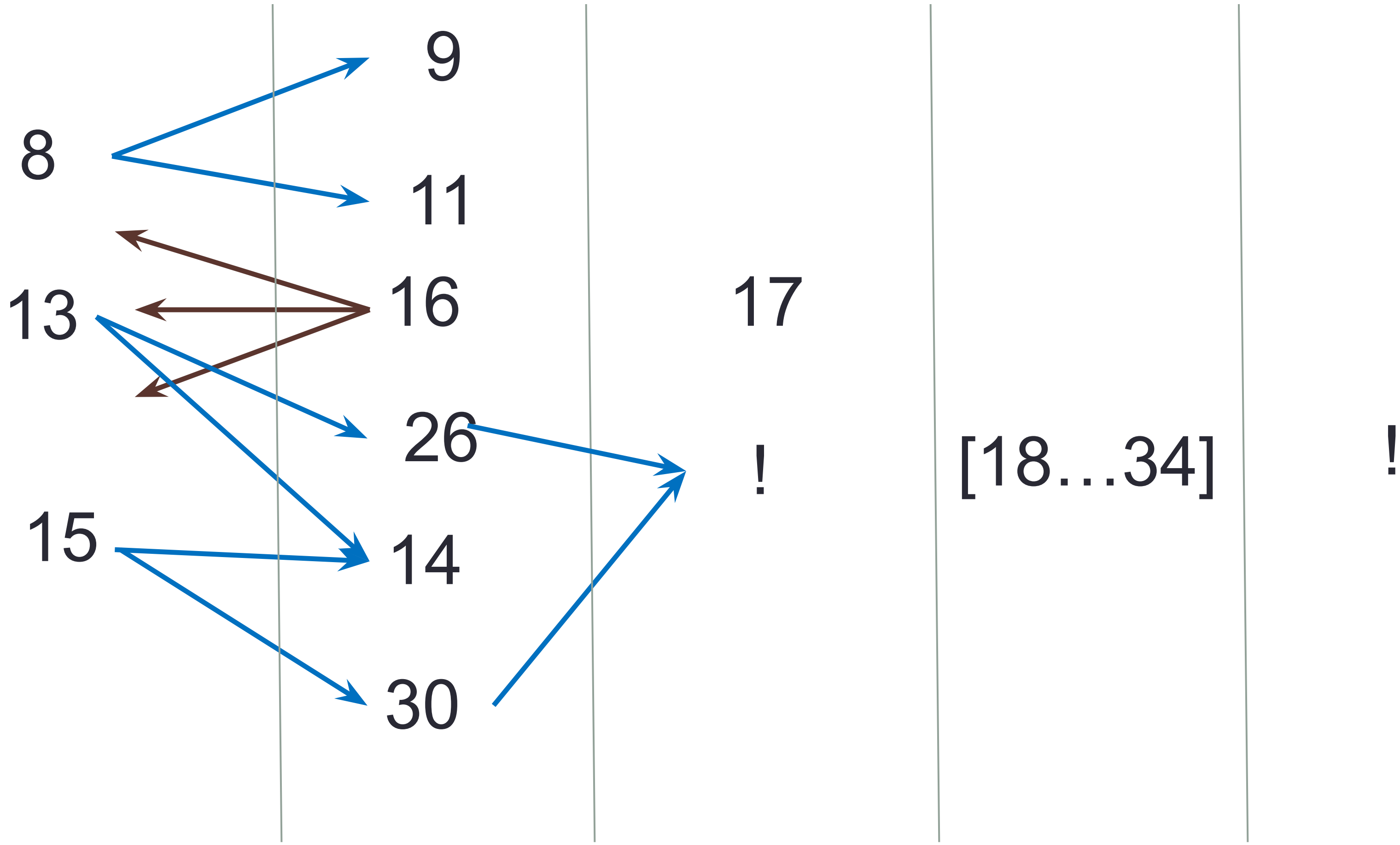
Задание 2

Кон	Петя	Ваня	Петя
16 14	17	[18..34]	!

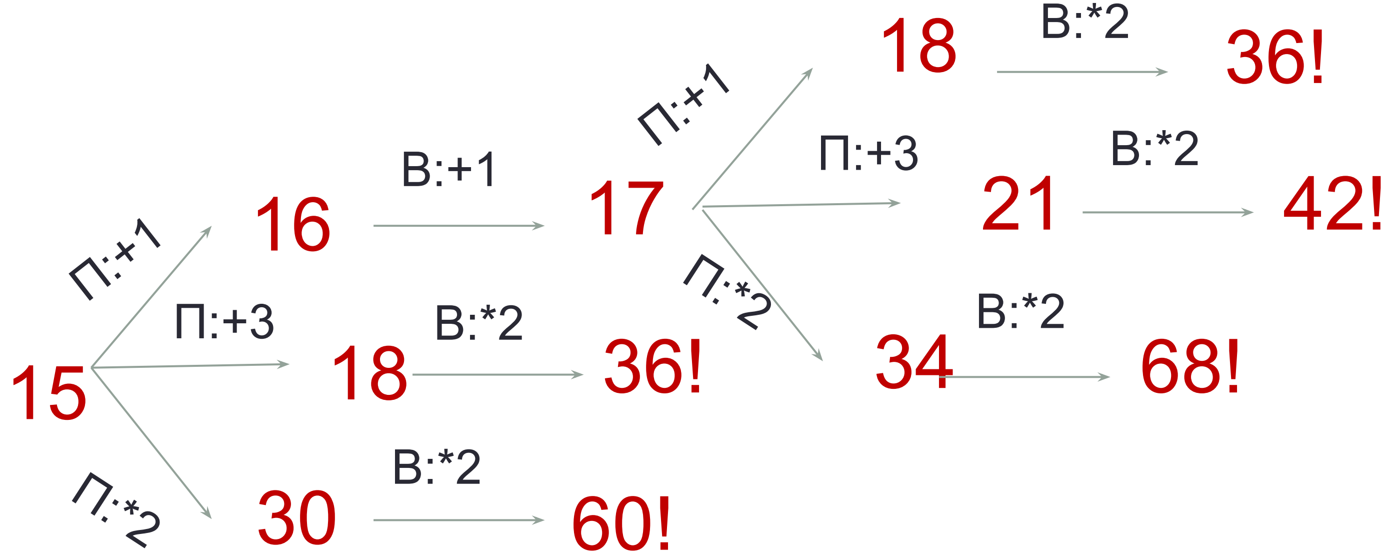
При S=16 или S=14 в обоих случаях Петя может получить 17 камней (16+1=17 или 14+3=17). При любом ответном ходе Вани (17+1=18; 17+3=20; 17*2=34) Петя должен удвоить количество камней в куче и выиграть (18*2=36; 20*2=40; 34*2=68)

Задание 3

Кон	Петя	Ваня	Петя	Ваня

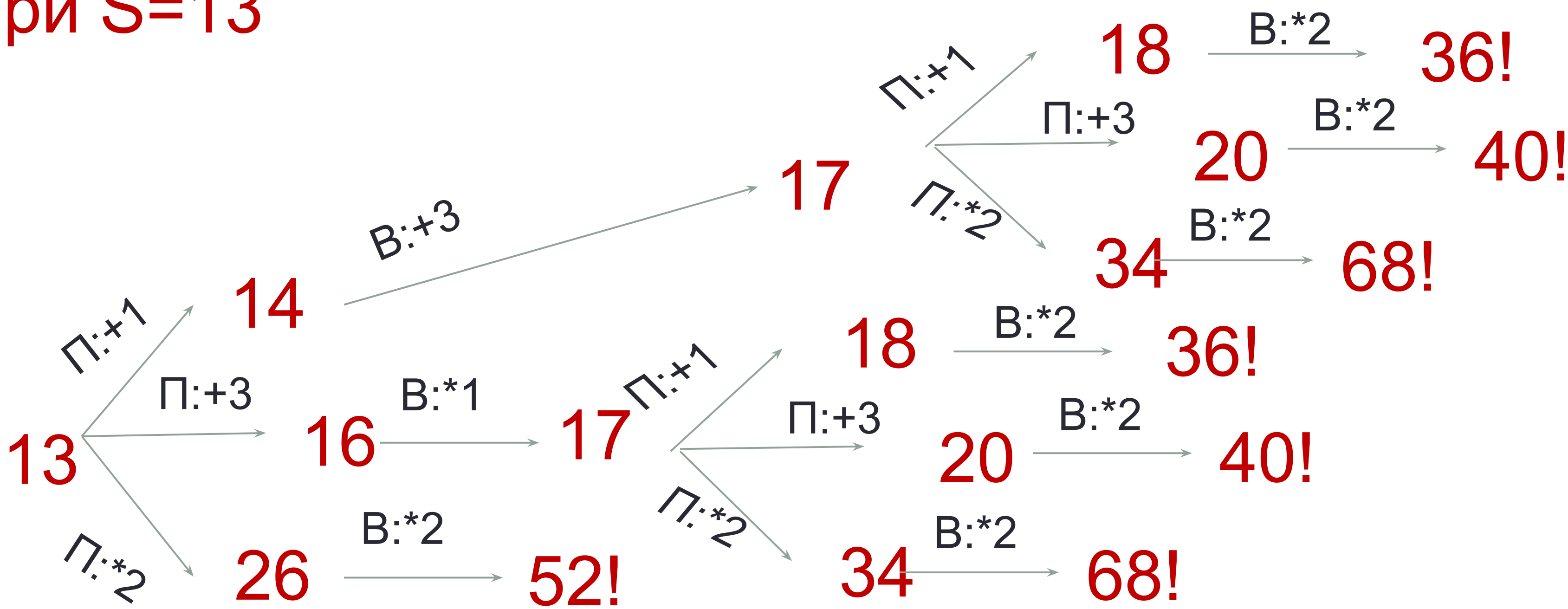


При S=15



В этом дереве в каждой позиции, где должен ходить Петя разобраны все возможные ходы, а для позиции, где должен ходить Ваня приведены только ходы, соответствующие выбранной выигрышной стратегии

При S=13



В этом дереве в каждой позиции, где должен ходить Петя разобраны все возможные ходы, а для позиции, где должен ходить Ваня приведены только ходы, соответствующие выбранной выигрышной стратегии

26

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один камень** или **увеличить количество камней в куче в шесть раз**. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 60 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 360. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 361 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 360$

Решение

$\boxed{26}$ – 2

1а) [61.. 360]

б) 60

2. 10, 59

3. 58

$58 \xrightarrow{П: +1} 59 \xrightarrow{В: *1} 60 \xrightarrow{П: +1} 61 \xrightarrow{В: *6} 366$!

$60 \xrightarrow{П: *6} 360 \xrightarrow{В: *6} 2160$!

$58 \xrightarrow{П: *6} 348 \xrightarrow{В: \times 6} 2088$

Источники:

- Поляков К.Ю. «Просто графы» Первое сентября. Информатика март 2012
- Демонстрационная версия ЕГЭ 2015
- Яндекс ЕГЭ. https://ege.yandex.ru/
- Дм.Гущин Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. http://inf.reshuege.ru/
- ЕГЭ 2015. Информатика. Тематические тестовые задания/С.С.Крылов, Д.М.Ушаков. – М.:Издательство «Экзамен», 2015. (Серия «ЕГЭ. ФИПИ. Тематические тестовые задания»)
- Статград, публикации 2014-2015 уч.год