# Дискретная математика

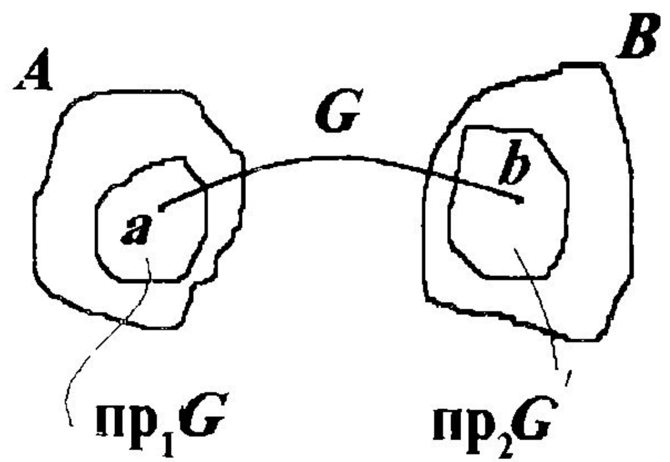
## Соответствия

# Основные определения

*Соответствием* между множествами $A$ и $B$ называется подмножество $G$ прямого произведения этих множеств: $G \subseteq A \times B$. Если $(a, b) \in G$, то говорят, что "$b$ соответствует $a$ при соответствии $G$".

Область определения соответствия G – множество $\text{пр}_1 G = \{a: (a,b) \in G\}$

Область значений соответствия G – множество $\text{пр}_2 G = \{b: (a,b) \in G\}$



# Основные определения

**Пример 1.** Экзаменационная ведомость устанавливает следующее соответствие :

- A={Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Синицын, Васечкин, Макарова}.
- B={2, 3, 4, 5}.

Иванов – 4
Петров – 2
Сидоров – 3
Конев – 4
Синицын на экзамен не явился
Васечкин – 3
Макарова – 5

$G \subseteq A \times B$, G-соответствие между студентами и оценками

# Основные определения

G={(Иванов, 4), (Петров, 2), (Сидоров, 3), (Конев, 4), (Васечкин, 3), (Макарова, 5)}.

Область определения соответствия G –

$пр_1$G={Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Васечкин, Макарова}.

Область значений соответствия G – $пр_2$G={2, 3, 4, 5}.

# Основные определения

*Образом элемента* $a$ в множество $B$ при соответствии $G$ называется множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$. *Прообразом элемента* $b$ в множество $A$ при соответствии $G$ называется множество всех $a \in A$, которым соответствует $b \in B$.

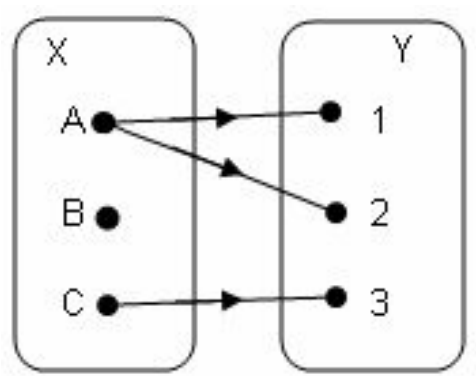
В примере 1:

- образом Иванова является 4;
- образом Сидорова - 3 и т.д.
- Прообразом 2 является Петров;
- Прообразом 4 – Иванов, Конев.

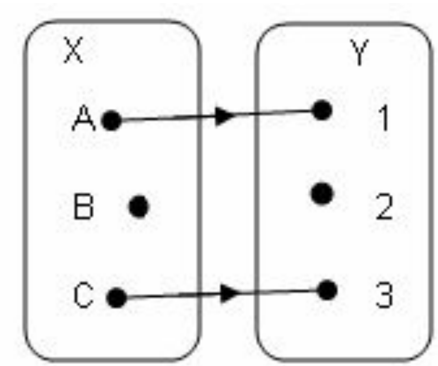
# Свойства соответствий

1. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **всюду (полностью) определенным**, если область определения совпадает с множеством A, т.е. $пр_1G=A$. В противном случае соответствие называется частично определенным.
2. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **сюръективным**, если область значений совпадает с множеством B, т.е. $пр_2G=B$.
3. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **функциональным**, если образом любого элемента *a* из области определения $пр_1G$ является единственный элемент *b* из области значений $пр_2G$.
4. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **инъективным**, если прообразом любого элемента *b* из области значений $пр_2G$ является единственный элемент *a* из области определения $пр_1G$.

# Свойства соответствий

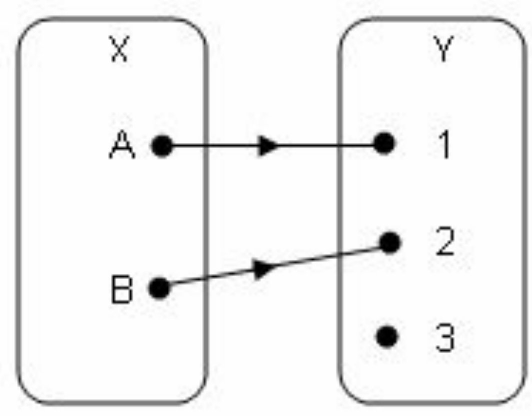



Частично определено, сюръективно, нефункционально, инъективно

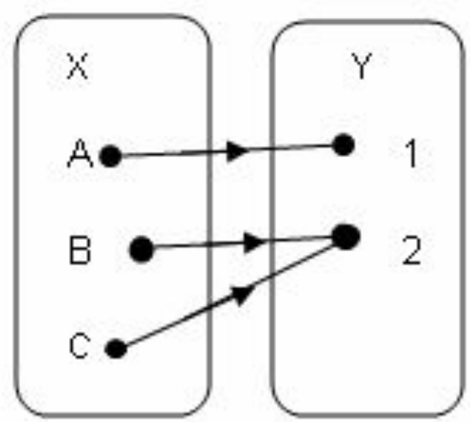



частично определено, несюръективно, функционально, инъективно

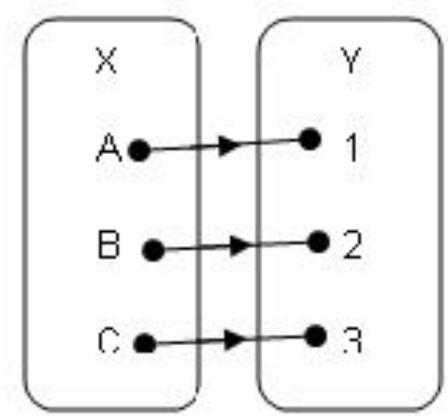
# Свойства соответствий




Всюду определено, несюръективно, функционально, инъективно




Всюду определено, сюръективно, функционально, неинъективно




Всюду определено, сюръективно, функционально, инъективно

# Свойства соответствий

Определим свойства отношения в примере 1.

1. Частично определено, так как нет образа для Синицына;
2. Сюръективно, так как для каждой оценки определен прообраз;
3. Функционально, так как каждому студенту соответствует единственная оценка;
4. Неинъективно, так как оценка 4 соответствует двум студентам.

# Функции и отображения

Функциональное соответствие называется функцией.

Если функция $f$ устанавливает соответствие между множествами A и B, то говорят, что функция имеет тип A→B (обозначается $f: A \to B$).

Каждому элементу $a$ из области определения функция $f$ ставит в соответствие элемент $b$ из области значений. Это обозначается $f(a)=b$. Элемент $a$ называется аргументом функции, элемент $b$ – значение функции на $a$.

# Функции и отображения

Отображением А в В называется всюду определенная функция $f$: А→В (обозначается $f$: А $\xrightarrow{в}$ В).

Отображением А на В называется всюду определенная и сюръективная функция $f$: А→В (обозначается $f$: А $\xrightarrow{на}$ В).

| Соответствие | Обязательное свойство | | |
|---|---|---|---|
| | функциональное | всюду определенное | сюръективное |
| Функция | + | | |
| Отображение $A$ в $B$ | + | + | |
| Отображение $A$ на $B$ | + | + | + |

# Функции и отображения

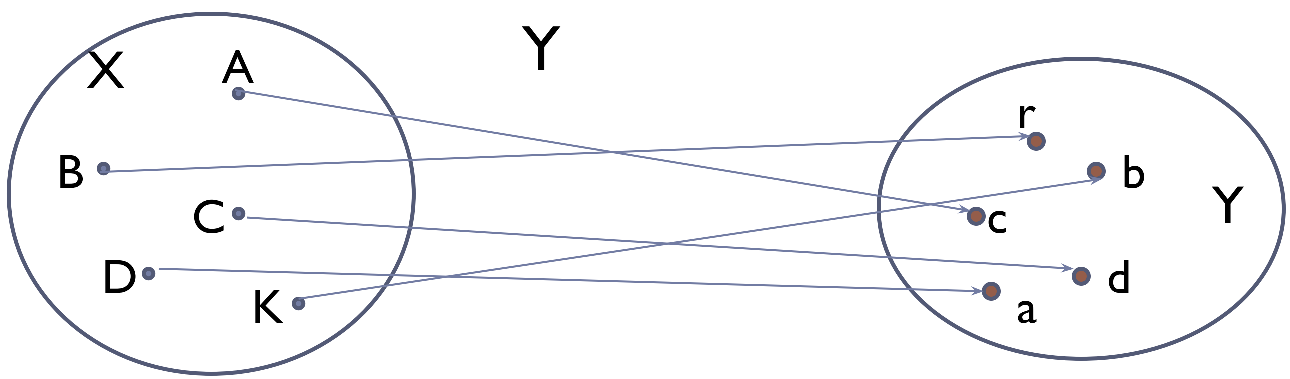
**Пример.** Является ли функция $f(x) = 2x$, имеющая $N \to N$, отображением, и если – да, то каким?

➢ Функция $f(x) = 2x$, $f : N \to N$, всюду определена на $N$, однако не сюръективна, так как область значений функции $f$ равна $\text{пр}_2 f = M_{2n} \neq N$ (область значений содержит не все натуральные числа из $N$, а только четные). Поэтому $f$ является отображением $N$ в $N$

# Взаимно-однозначное соответствие

Соответствие называется взаимно-однозначным, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

$G \subseteq X \times Y$



# Мощность множеств

Понятие мощности возникает при сравнении множеств по числу элементов.

Мощностью конечного множества является число его элементов. Множество, не являющееся конечным, называется **бесконечным.**

Если между множествами А и В существует взаимно-однозначное соответствие, то мощности этих множеств равны, т.е. $|A|=|B|$. В таком случае говорят, что множества А и В равномощны.

# Мощность множеств

Этот факт позволяет:

- установить равенство мощностей двух множеств, не вычисляя этих множеств;
- вычислить мощность множества, установив его взаимно-однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна или легко вычисляема.

Существование биекции между двумя эквивалентными множествами позволяет переносить изучение свойств с одного множества на другое, когда природа элементов не важна. Например, если $|A|=n$, то с элементами множества A можно работать как с числами $1,2,\ldots,n$.

# Счетные множества

Любое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называют счетным. Мощность счетного множества обозначают $\aleph_0$ (читается „алеф нуль").

Если некоторое множество M равномощно множеству натуральных чисел N, то между M и N можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию) $\nu$: N→ M, которое называют нумерацией счетного множества M.

# Счетные множества

Если элемент множества M есть $\nu(n)$ для некоторого $n \in N$, то этот элемент множества M обозначаем через $a_n$, называя натуральное число n номером элемента $a_n$ относительно данной нумерации $\nu$.

Таким образом, элементы счетного множества можно перенумеровать, записав их в виде последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$

# Счетные множества

**Пример.** Множество всех нечетных натуральных чисел счетно. Нумерацию ν можно задать так: ν(n) = 2n-1,

$$\left.\begin{array}{l} N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} \\ \quad\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ M_{2n-1}=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\} \end{array}\right\} \Rightarrow M_{2n-1}\text{- счетно.}$$

Получили:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & M_{2n-1} \subset N; \\ 2. & |M_{2n-1}| = |N|. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Множество равномощно своему подмножеству.}$$

# Счетные множества

**Пример.** Множество Z всех целых чисел счетно.
Расположим элементы множества целых чисел в определенном порядке:

- N={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …}
- Z={0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, … }

# Счетные множества

Нумерацию можно было установить так:

$$\nu(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} - 1, & n = 2k \text{ (четно)}; \\ -\dfrac{n+1}{2}, & n = 2k-1 \text{ (не четно)}. \end{cases}$$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | |
| Z={ | …, | -5, | -4, | -3, | -2, | -1, | 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | … } |

Получили:

1. N ⊂ Z;
2. |N|=|Z|.

# Счетные множества

Примеры счетных множеств:

- Множество рациональных чисел счетно;
- Множество периодических дробей счетно;
- Множество всех натуральных чисел, делящихся на заданное число к $\geq 2$, счетно.
- Множество пар натуральных чисел счетно.

# Счетные множества

- Докажем, что Множество  пар натуральных чисел счетно.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(1,4)$ | $(1,5)$ | $\ldots$ |
| $(2,1)$ | $(2,2)$ | $(2,3)$ | $(2,4)$ | $(2,5)$ | $\ldots$ |
| $(3,1)$ | $(3,2)$ | $(3,3)$ | $(3,4)$ | $(3,5)$ | $\ldots$ |
| $(4,1)$ | $(4,2)$ | $(4,3)$ | $(4,4)$ | $(4,5)$ | $\ldots$ |
| $(5,1)$ | $(5,2)$ | $(5,3)$ | $(5,4)$ | $(5,5)$ | $\ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |

# Счетные множества

Теорема.

- (а) Подмножество счетного множества конечно или счетно.
- (б) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
- (в) Объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.

# Несчетные множества

Теорема Кантора: Множество всех действительных чисел интервала (0,1) числовой оси несчетно.

Всякое множество, эквивалентное множеству всех действительных чисел интервала (0,1), называется континуальным или множеством мощности континуума.

Примеры континуальных множеств:

- Множество действительных,
- Множество иррациональных чисел ;
- Множество точек на отрезке [0,5];
- Множество β(M) всех подмножеств некоторого счетного множества M.