

Дискретная математика

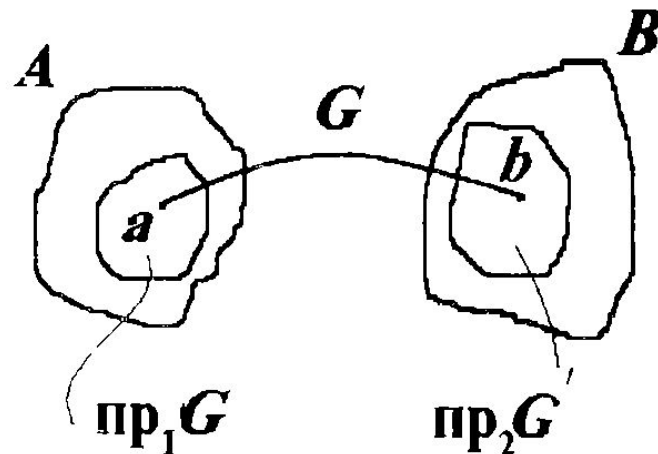
Соответствия

Основные определения

Соответствием между множествами A и B называется подмножество G прямого произведения этих множеств: $G \subseteq A \times B$. Если $(a, b) \in G$, то говорят, что “ b соответствует a при соответствии G ”.

Область определения соответствия G – множество $\text{пр}_1 G = \{a: (a, b) \in G\}$

Область значений соответствия G – множество $\text{пр}_2 G = \{b: (a, b) \in G\}$



Основные определения

Пример 1. Экзаменационная ведомость устанавливает следующее соответствие :

- $A = \{\text{Иванов, Петров, Сидоров, Конев, Сеницын, Васечкин, Макарова}\}.$
- $B = \{2, 3, 4, 5\}.$

Иванов – 4

Петров – 2

Сидоров – 3

Конев – 4

Сеницын на экзамен не явился

Васечкин – 3

Макарова – 5

$G \subseteq A \times B$, G -соответствие между студентами и оценками



Основные определения

$G = \{(\text{Иванов}, 4), (\text{Петров}, 2), (\text{Сидоров}, 3), (\text{Конев}, 4), (\text{Васечкин}, 3), (\text{Макарова}, 5)\}$.

Область определения соответствия G –

$\text{pr}_1 G = \{\text{Иванов}, \text{Петров}, \text{Сидоров}, \text{Конев}, \text{Васечкин}, \text{Макарова}\}$.

Область значений соответствия G – $\text{pr}_2 G = \{2, 3, 4, 5\}$.



Основные определения

Образом элемента a в множество B при соответствии G называется множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$. Прообразом элемента b в множество A при соответствии G называется множество всех $a \in A$, которым соответствует $b \in B$.

В примере 1:

- образом Иванова является 4;
- образом Сидорова - 3 и т.д.
- Прообразом 2 является Петров;
- Прообразом 4 – Иванов, Конев.

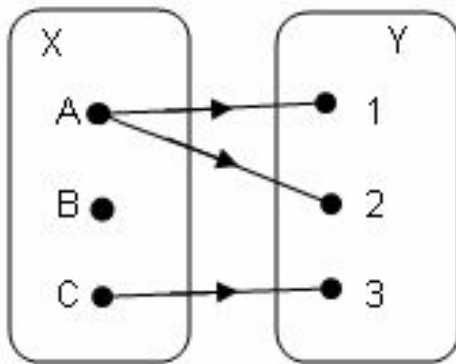


Свойства соответствий

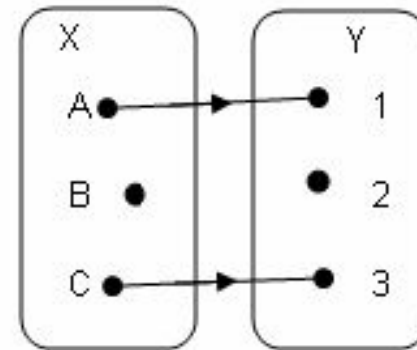
1. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **всюду (полностью) определенным**, если область определения совпадает с множеством A , т.е. $\text{pr}_1 G = A$. В противном случае соответствие называется частично определенным.
2. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **сюръективным**, если область значений совпадает с множеством B , т.е. $\text{pr}_2 G = B$.
3. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **функциональным**, если образом любого элемента a из области определения $\text{pr}_1 G$ является единственный элемент b из области значений $\text{pr}_2 G$.
4. Соответствие $G \subseteq A \times B$ называется **инъективным**, если прообразом любого элемента b из области значений $\text{pr}_2 G$ является единственный элемент a из области определения $\text{pr}_1 G$.



Свойства соответствий



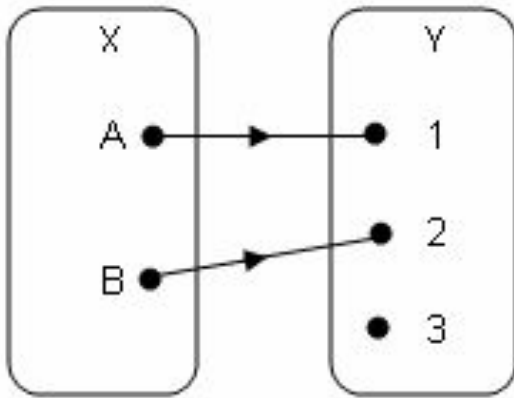
Частично определено,
сюръективно, нефункционально,
инъективно



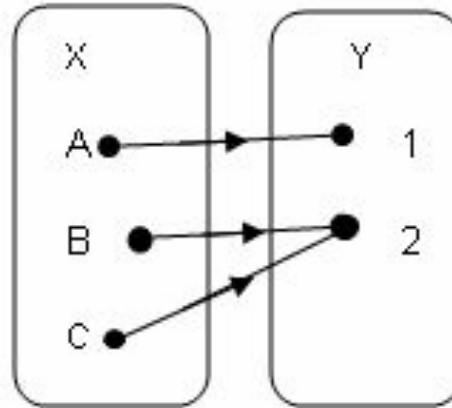
частично определено,
несюръективно, функционально,
инъективно



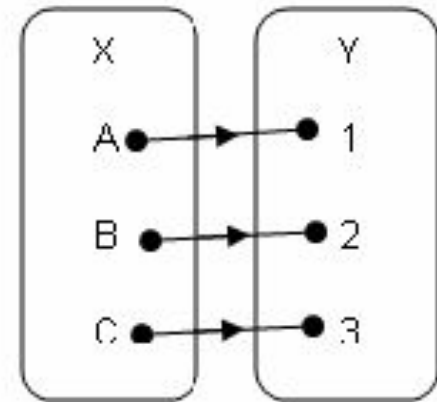
Свойства соответствий




Всюду определено,
несюръективно,
функционально,
инъективно



Всюду определено,
сюръективно,
функционально,
неинъективно



Всюду определено,
сюръективно,
функционально,
инъективно



Свойства соответствий

Определим свойства отношения в примере 1.

1. Частично определено, так как нет образа для Сеницына;
2. Сюръективно, так как для каждой оценки определен прообраз;
3. Функционально, так как каждому студенту соответствует единственная оценка;
4. Неинъективно, так как оценка 4 соответствует двум студентам.



Функции и отображения

Функциональное соответствие называется **функцией**.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами A и B , то говорят, что функция имеет тип $A \rightarrow B$ (обозначается $f: A \rightarrow B$).

Каждому элементу a из области определения функция f ставит в соответствие элемент b из области значений. Это обозначается $f(a)=b$. Элемент a называется **аргументом** функции, элемент b – **значение функции на a** .



Функции и отображения

Отображением A в B называется всюду определенная функция $f: A \rightarrow B$ (обозначается $f: A \xrightarrow{в} B$).

Отображением A на B называется всюду определенная и сюръективная функция $f: A \rightarrow B$ (обозначается $f: A \xrightarrow{на} B$).

| Соответствие | Обязательное свойство | | |
|------------------------|-----------------------|--------------------|--------------|
| | функциональное | всюду определенное | сюръективное |
| Функция | + | | |
| Отображение A в B | + | + | |
| Отображение A на B | + | + | + |



Функции и отображения

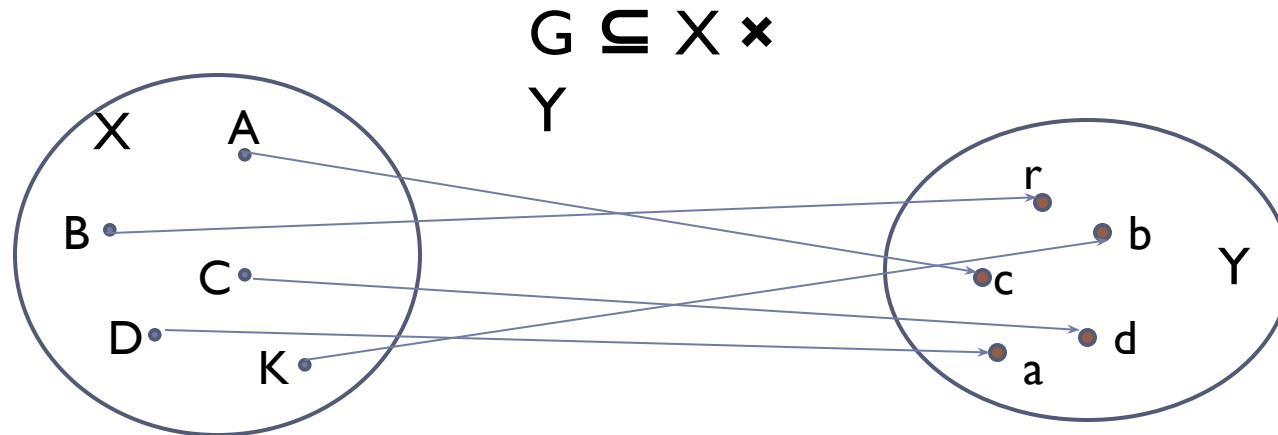
Пример. Является ли функция $f(x) = 2x$, имеющая $N \rightarrow N$, отображением, и если – да, то каким?

➤ Функция $f(x) = 2x$, $f: N \rightarrow N$, всюду определена на N , однако не сюръективна, так как область значений функции f равна $\text{pr}_2 f = M_{2n} \neq N$ (область значений содержит не все натуральные числа из N , а только четные). Поэтому f является отображением N в N



Взаимно-однозначное соответствие

Соответствие называется **взаимно-однозначным**, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.



Мощность множеств

Понятие мощности возникает при сравнении множеств по числу элементов.

Мощностью конечного множества является число его элементов. Множество, не являющееся конечным, называется **бесконечным**.

Если между множествами A и B существует взаимно-однозначное соответствие, то **мощности этих множеств равны**, т.е. $|A| = |B|$. В таком случае говорят, что множества A и B **равномощны**.



Мощность множеств

Этот факт позволяет:

- установить равенство мощностей двух множеств, не вычисляя этих множеств;
- вычислить мощность множества, установив его взаимно-однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна или легко вычисляема.

Существование биекции между двумя эквивалентными множествами позволяет переносить изучение свойств с одного множества на другое, когда природа элементов не важна. Например, если $|A|=n$, то с элементами множества A можно работать как с числами $1, 2, \dots, n$.



Счетные множества

Любое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называют **счетным**. Мощность счетного множества обозначают \aleph_0 (читается „алеф нуль“).

Если некоторое множество M равномощно множеству натуральных чисел N , то между M и N можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию) $v: N \rightarrow M$, которое называют **нумерацией** счетного множества M .



Счетные множества

Если элемент множества M есть $v(n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то этот элемент множества M обозначаем через a_n , называя натуральное число n номером элемента a_n относительно данной нумерации v .

Таким образом, элементы счетного множества можно перенумеровать, записав их в виде последовательности a_1, \dots, a_n, \dots



Счетные множества

Пример. Множество всех нечетных натуральных чисел счетно. Нумерацию v можно задать так: $v(n) = 2n - 1$,

$$\begin{array}{c} N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ M_{2n-1} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} N \\ M_{2n-1} \end{array}} \right\} \longrightarrow M_{2n-1} \text{ - счетно.}$$

Получили:

1. $M_{2n-1} \subset N$;
 2. $|M_{2n-1}| = |N|$.
- $\left. \vphantom{\begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array}} \right\} \longrightarrow$ Множество равномощно своему подмножеству.

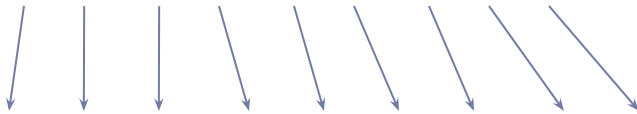


Счетные множества

Пример. Множество Z всех целых чисел счетно.
Расположим элементы множества целых чисел в определенном порядке:

$$\square N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

$$\square Z = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}$$



Счетные множества

Нумерацию можно было установить так:

$$\nu(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & n = 2k \text{ (четно)}; \\ -\frac{n+1}{2}, & n = 2k - 1 \text{ (не четно)}. \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ Z = \{ \dots, & -5, & -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \dots \} \end{array}$$

Получили:

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;
2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.



Счетные множества

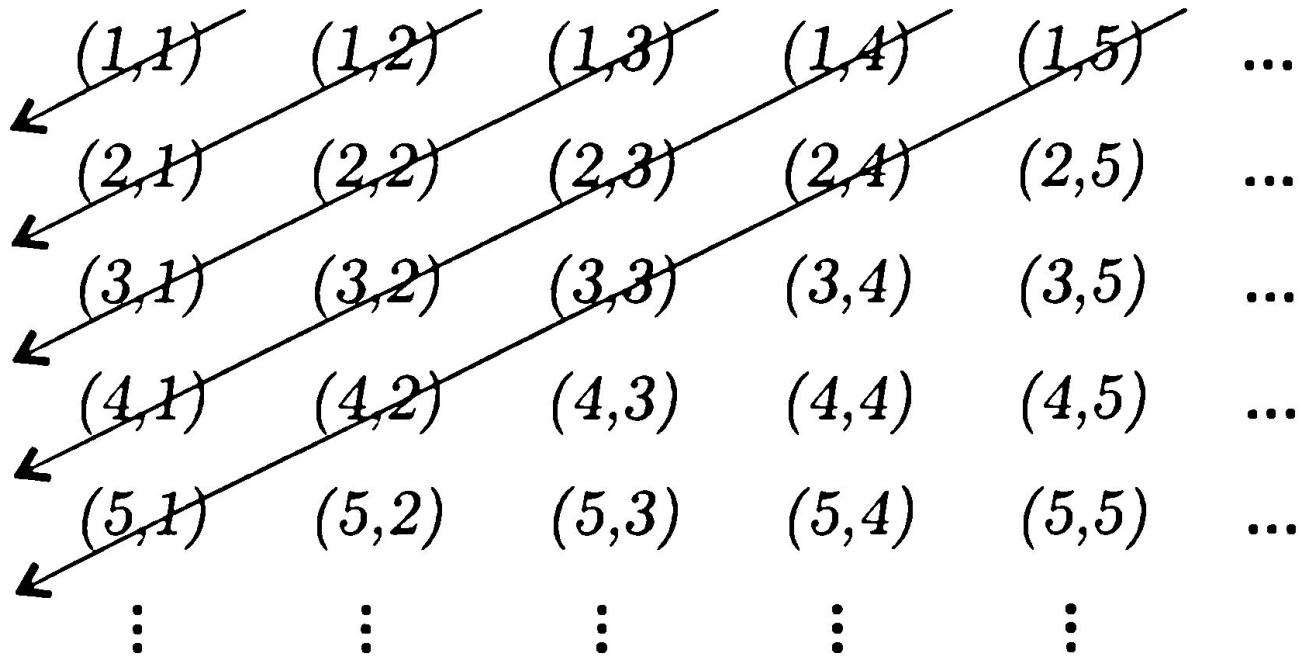
Примеры счетных множеств:

- Множество рациональных чисел счетно;
- Множество периодических дробей счетно;
- Множество всех натуральных чисел, делящихся на заданное число $k \geq 2$, счетно.
- Множество пар натуральных чисел счетно.



Счетные множества

- Докажем, что Множество пар натуральных чисел счетно.



Счетные множества

Теорема.

- (а) Подмножество счетного множества конечно или счетно.
- (б) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
- (в) Объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.



Несчетные множества

Теорема Кантора: Множество всех действительных чисел интервала $(0, 1)$ числовой оси несчетно.

Всякое множество, эквивалентное множеству всех действительных чисел интервала $(0, 1)$, называется континуальным или множеством мощности континуума.



Примеры континуальных множеств:

- Множество действительных,
- Множество иррациональных чисел ;
- Множество точек на отрезке $[0,5]$;
- Множество $\beta(M)$ всех подмножеств некоторого счетного множества M .

